

# طراحی کنترل کننده فازی تطبیقی مستقیم برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی به کمک جبران ساز

پوریا جعفری<sup>۱</sup>، مربی و دانشجوی دکتری؛ محمد تشنه‌لب<sup>۲</sup>، استاد؛ مهسان توکلی کاخکی<sup>۳</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه سیستان و بلوچستان - زاهدان - ایران - pjafari@ece.usb.ac.ir  
 ۲- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تهران - ایران - teshnehlab@eetd.kntu.ac.ir  
 ۳- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تهران - ایران - matavakoli@eetd.kntu.ac.ir

**چکیده:** با توجه به گسترش حسابان کسری، این زمینه روزبه‌روز بیش‌تر مورد توجه پژوهشگران قرار می‌گیرد. مهندسان کنترل نیز از این امر مستثنی نبوده و الگوریتم‌های کنترلی مختلفی برای سیستم‌های مرتبه کسری ارائه داده‌اند. همچنین توانایی بالای سیستم‌های فازی در کنترل سیستم‌های دینامیکی با نامعینی و اغتشاش ثابت شده است. شرط اصلی استفاده از سیستم‌های فازی پیاده‌سازی مناسب دانش فرد خبره است. در صورتی که نقصی در انتقال دانش خبره رخ دهد، دیگر سیستم فازی تقریب‌گر جامع نبوده و قابل اعتماد نیست. در این مقاله یک سیستم فازی تطبیقی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری معرفی شده است. برای بهبود عملکرد کنترل کننده، سیگنال جبران ساز اضافه شده تا در صورتی که توابع تعلق نامناسب انتخاب گردند، باز هم عمل کنترل به‌خوبی انجام شود. پایداری میتگ-لفلر سیستم حلقه‌بسته با لیاپانوف مرتبه کسری تضمین شده و الگوریتم تصویرسازی مرتبه کسری نیز برای محدود نگه‌داشتن پارامترهای آزاد سیستم فازی ارائه شده است. در انتها نیز روش کنترلی پیشنهادی بر روی دو نوع سیستم غیرخطی مرتبه کسری پیاده‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهند که ترکیب کنترل کننده فازی با جبران ساز به‌خوبی اهداف کنترلی را برآورده کرده و خروجی سیستم حلقه بسته در دو حالت توابع تعلق مناسب و توابع تعلق نامناسب در بخش مقدم، بسیار قابل قبول است.

**واژه‌های کلیدی:** کنترل کننده فازی تطبیقی، سیگنال جبران ساز، سیستم غیرخطی مرتبه کسری، لیاپانوف مرتبه کسری.

## Design of Direct Adaptive Fuzzy Controller for Nonlinear Fractional Order Systems with Compensation

P. Jafari<sup>1</sup>, Lecturer and PhD student; M. Teshnehlab<sup>2</sup>, Professor; M. Tavakoli-Kakhki<sup>3</sup>, Assistant Professor

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Sistan and Balochistan, Zahedan, Iran, Email: pjafari@ece.usb.ac.ir  
 2- Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, Email: teshnehlab@eetd.kntu.ac.ir  
 3- Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, Email: matavakoli@eetd.kntu.ac.ir

**Abstract:** Nowadays according to the rapid growth of the fractional order calculus, this field has converted to a beloved context for researchers. Also, there have been introduced various control algorithms with the fractional order approach. On the other hand, it has been proved that fuzzy systems are capable of controlling uncertain system with disturbance if they are well equipped with the expert knowledge. However, when there is not enough information to build fuzzy system or the expert knowledge cannot be properly transformed to the fuzzy inference part, a fuzzy system is not a universal approximation and cannot be applied. For these reasons, this paper proposes a direct adaptive fuzzy system with compensation to control a certain class of fractional order nonlinear systems with unknown nonlinearities. The stability criterion in fractional order definition is studied and based on a Lyapunov function candidate. Using the Lyapunov theorem ensures global Mittag-Leffler stability of the closed loop system. Free parameters are adjusted online and kept limited by the fractional order adaptation law, which is kept limited with a projection algorithm. In addition, according to the proposed method, the plant, which is little known, can be controlled effectively no matter whether the membership functions are suitable or not. Two numerical simulations show validity and effectiveness of the introduced control strategy for nonlinear models that perturbed by disturbance and uncertainty.

**Keywords:** Adaptive fuzzy controller, compensation Signal, fractional order nonlinear system, fractional order Lyapunov theorem.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۱۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۲۱ و ۱۳۹۵/۰۸/۰۵

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۹/۰۹

نام نویسنده مسئول: محمد تشنه‌لب

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - رسالت - سیدخندان - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده مهندسی برق - آزمایشگاه سیستم‌های هوشمند.

## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر حسابان مرتبه کسری با قدمتی بیش از ۳۰۰ سال در علم ریاضی، به‌عنوان زمینه‌ای جدید در مهندسی مورد توجه قرار گرفته است. به‌طوری که در آن مفهوم انتگرال و مشتق صحیح به مرتبه غیرصحیح تعمیم یافته است. کاربردهای فراوانی از حسابان کسری در فیزیک، مکانیک، الکترونیک، پزشکی، کنترل و غیره معرفی شده است [۱، ۲]. به‌عنوان مثال از حسابان مرتبه کسری در مدل‌سازی فرآیند انتقال گرما [۳]، فرآیندهای الکتروشیمیایی و ساختارهای انعطاف‌پذیر [۴] استفاده شده است. در [۵] سیستم‌های بیولوژیکی با کمک محاسبات مرتبه کسری مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین فرآیند انتشار<sup>۲</sup> در باتری‌ها [۶]، قطبش دی‌الکتریک<sup>۲</sup>، امواج الکترومغناطیس و سیستم‌های ویسکوالاستیک [۷] را نیز توانسته‌اند با معادلات دیفرانسیلی مرتبه کسری ارائه دهند. به‌علاوه در شاخه کنترل نیز حسابان مرتبه کسری به‌عنوان زمینه‌ای جذاب به‌خوبی جای خود را به‌دست آورده و توانایی آن در بهبود عملکرد کنترل‌کننده‌ها به اثبات رسیده است [۸]. در سال ۱۹۹۶ استالوپ<sup>۴</sup> با معرفی کنترل‌کننده مرتبه کسری مقاومی بنام CRONE<sup>۵</sup>، نقطه شروعی برای ورود روابط مرتبه کسری در کنترل ایجاد کرد. به دنبال آن مقالات و پژوهش‌های فراوانی با دیدگاه کنترل سیستم‌های مرتبه کسری و کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری ارائه شدند. از جمله این تحقیق‌ها می‌توان به کنترل‌کننده‌های مشتق‌گیر، انتگرال‌گیر و تناسبی<sup>۶</sup> مرتبه کسری [۸]، مدل مرجع مرتبه کسری [۹، ۱۰]، کنترل‌کننده‌های تطبیقی مرتبه کسری [۱۱] و همزمان‌سازی سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری آشوب [۱۲-۱۵] اشاره نمود. همچنین در سال‌های اخیر به‌دلیل آنکه در سیستم‌های مرتبه کسری پایدار، انرژی تعمیم‌یافته به‌صورت نمایی کاهش پیدا نمی‌کند، پایداری لیاپانوف مرتبه کسری معرفی و بسط داده شده است [۱۶-۱۹].

سیستم فازی یکی از روش‌های کاربردی برای به خدمت گرفتن دانش فرد خبره در پیش‌بینی، کنترل، کلاس‌بندی و غیره بوده که در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه واقع شده است [۲۰، ۲۱]. این روش برای کنترل سیستم‌هایی که از نظر ریاضی دارای مدل ضعیفی بوده و عدم قطعیت در مدل سیستم وجود دارد، مفید خواهد بود [۲۲]. همچنین از آنجایی که ثابت شده است که در صورت برآورده شدن شرایط لازم، سیستم‌های فازی تقریب‌گر جامع<sup>۷</sup> بوده و توانایی تخمین هر تابع غیرخطی پیوسته با هر درجه دلخواهی را دارند، از آن‌ها به‌عنوان روش کنترلی مستقل از مدل استفاده می‌شود. در کنار آن منطق فازی به‌خوبی توانسته جای خود را در کنترل تطبیقی باز کرده و با ساختارهای مختلف کنترل تطبیقی فازی عملکرد خوبی را از خود نشان دهد [۲۳-۲۶].

در سال‌های اخیر با ترکیب کنترل‌کننده‌های تطبیقی فازی با سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری زمینه تحقیقاتی جدیدی ایجاد شده است. اولین بار اوندرف در سال ۲۰۰۸ از کنترل‌کننده تطبیقی

مرتبه کسری به همراه مد لغزشی برای کنترل بازوی ربات دو درجه آزادی با مدل دینامیکی مرتبه صحیح استفاده کرد [۲۷]. لین و همکارانش کنترل تطبیقی غیرمستقیم فازی مرتبه کسری و مد لغزشی را برای همزمان‌سازی سیستم غیرخطی مرتبه کسری آشوبناک مورد استفاده قرار داده‌اند [۲۸]. همچنین آن‌ها کنترل‌کننده تطبیقی فازی مرتبه کسری  $H^\infty$  را برای همزمان‌سازی سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری [۲۹] و کنترل‌کننده فازی تطبیقی و مد لغزشی را برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری تأخیردار به کار برده‌اند [۳۰]. اما در هر سه مقاله قبل به‌علت عدم دقت کافی در محاسبات ریاضی مرتبه کسری نتایج به‌دست‌آمده قابل اتکا نیست [۳۱، ۳۲]. در [۳۳] کنترل تطبیقی فازی ترکیبی برای رسیدن به کنترل مناسب سیستم غیرخطی مرتبه کسری نامعین ارائه شده است که علاوه‌بر استفاده نامناسب از روابط ریاضی مرتبه کسری از لم باربالات مرتبه صحیح در اثبات پایداری لیاپانوف مرتبه کسری استفاده شده است. یولاه و همکاران سیستم دینامیکی مرتبه صحیح نامعین را با سیستم تطبیقی فازی مرتبه کسری به‌همراه مد لغزشی کنترل کرده‌اند [۳۴-۳۵]. این توضیحات نشان می‌دهد که بیش‌تر پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه کنترل فازی تطبیقی مرتبه کسری یا با ایرادهای محاسباتی همراه بوده و یا بر روی سیستم‌های مرتبه صحیح پیاده‌سازی شده‌اند. به این ترتیب طراحی کنترل‌کننده فازی تطبیقی مرتبه کسری برای سیستم‌های دینامیکی مرتبه کسری چالشی قابل تأمل بوده که می‌تواند یک موضوع جذاب برای مهندسان کنترل به حساب آید.

از طرف دیگر اساس طراحی تمام سیستم‌های تطبیقی فازی بر تقریب‌گر جامع بودن آن‌ها بنا شده است. اما در صورتی که توابع تعلق یک سیستم فازی به‌خوبی طراحی نشوند و یا دانش فرد خبره نسبت به پیاده‌سازی توابع تعلق بخش مقدم کافی نباشد، آنگاه دیگر نمی‌توان بر خاصیت تقریب‌گر جامع بودن سیستم فازی تکیه کرد و سیستم کنترل تطبیقی فازی را به‌خوبی طراحی نمود. همچنین توضیحات فوق نشان می‌دهد که تا به امروز مقاله درخور توجه و کاملی برای کنترل تطبیقی فازی سیستم‌های مرتبه کسری ارائه نشده و جای خالی این مبحث کاملاً احساس می‌شود. با این انگیزه و با توجه به قضایای لیاپانوف مرتبه کسری، در این مقاله سیستم فازی تطبیقی مرتبه کسری به کمک جبران‌ساز با هدف کنترل سیستم دینامیکی غیرخطی مرتبه کسری معرفی شده است. به این ترتیب که با تعریف تابع لیاپانوف مناسب و استفاده از قوانین پایداری لیاپانوف مرتبه کسری پارامترهای بخش تالی کنترل‌کننده فازی تنظیم می‌شوند. در نتیجه پارامترهای آزاد سیستم فازی با قانون تطبیق مرتبه کسری به‌روزرسانی خواهند شد. به‌علاوه، از الگوریتم تصویرسازی در قانون تطبیق مرتبه کسری استفاده شده تا از محدود ماندن اندازه بردار پارامترهای آزاد سیستم فازی اطمینان حاصل شود. کنترل‌کننده تطبیقی فازی در کنار یک جبران‌ساز قرار گرفته تا در صورت وجود نقص در بخش دانش فرد خبره باز هم کنترل مطلوبی برای سیستم تحت کنترل فراهم شود.

کسری  $(I_t^q f)(t)$  و نماد  $D^q f(t)$  یا  $f^{(q)}(t)$  به جای مشتق مرتبه کسری کپوتوی  ${}^C_0 D_t^q f(t)$  به کار گرفته می شود. همچنین رابطه بین انتگرال مرتبه کسری و مشتق مرتبه کسری کپوتو نیز برای  $0 < q < 1$  طبق رابطه (۵) قابل بیان است [۲].

$$I^q D^q v = v(t) - v(0) \quad (5)$$

**قضیه ۱:** سیستم خطی مرتبه کسری خودگردان  $D^q X = AX$  با شرایط اولیه  $X(0) = X_0$  را در نظر بگیرید. به طوری که در آن  $0 < q < 1$ ،  $X \in \mathbb{R}^n$  و  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  فرض شده اند. این سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر برای تمامی مقادیر ویژه ماتریس  $A$  نامساوی  $|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2$  برقرار باشد. در اینجا  $\text{eig}(A)$  به مقادیر ویژه ماتریس  $A$  اشاره دارد [۲].

**قضیه ۲ [۱۹]:** (قضیه پایداری لیاپانوف مرتبه کسری) فرض شود که  $X = 0$  نقطه تعادل سیستم  $f(t, X) = D^q X(t)$  باشد که  $f(t, X)$  تابع تکه خطی پیوسته نسبت به  $t$  و لپشیتز محلی نسبت به  $X$  و  $0 < q < 1$  است. ناحیه  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  دربرگیرنده نقطه تعادل و تابع لیاپانوف  $v: [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  پیوسته، مشتق پذیر و لپشیتز محلی نسبت به  $x$  در نظر گرفته شود. آنگاه در صورتی که:

$$k_1 \|X\| \leq v(t, X(t)) \leq k_2 \|X\|^{ab} \quad (6)$$

$$D^\beta v(t, X(t)) \leq -k_3 \|X\|^{ab} \quad (7)$$

برقرار باشند، نقطه تعادل  $X = 0$  پایدار میتگ-فلر<sup>۱</sup> محلی است. در اینجا  $t \geq 0$ ،  $X \in \mathbb{D}$ ،  $\beta \in (0, 1)$ ،  $\| \cdot \|$  نرم دلخواه و ثابت های مثبت  $k_1$ ،  $k_2$ ،  $k_3$ ،  $a$  و  $b$  اختیاری انتخاب می شوند. اگر ناحیه  $\mathbb{D}$  تمام  $\mathbb{R}^n$  را شامل شود آنگاه نقطه تعادل پایدار میتگ-فلر سراسری است. در نتیجه  $X(t)$  طبق رابطه (۸) محدود باقی می ماند.

$$\|X(t)\| \leq \left[ \frac{v(0)}{k_1} E_\beta \left( -\frac{k_3 t^\beta}{k_2} \right) \right]^{\frac{1}{a}} \quad (8)$$

که در آن  $E_\beta(z)$  تابع میتگ-فلر تک پارامتر با رابطه (۹) است.

$$E_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \quad (9)$$

**لم ۲:** اگر  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  یک تابعی برداری مشتق پذیر باشد آنگاه به ازای  $t \geq t_0$  و  $q \in (0, 1)$  می توان نشان داد که رابطه (۱۰) برقرار است [۱۷].

$$\frac{1}{2} D^q (X^T(t) P X(t)) \leq X^T(t) P D^q X(t) \quad (10)$$

که در آن  $P$  ماتریس مثبت معین است.

**لم ۳:** در صورتی که  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس مثبت نیمه معین و متقارن باشد، به ازای هر بردار  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  داریم:

$$\lambda_{\min P} \|X\|^2 \leq X^T P X \leq \lambda_{\max P} \|X\|^2 \quad (11)$$

به طوری که  $\lambda_{\min}$  و  $\lambda_{\max}$  به ترتیب کم ترین و بیش ترین مقدار ویژه ماتریس  $P$  است [۳۸].

پایه سازی عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری یکی از چالش های کار در حسابان کسری است. تحلیل عددی معادله

بدین گونه حتی اگر توابع تعلق مناسب انتخاب نشوند، باز هم می توان به خوبی سیستم را کنترل کرد و به نتیجه مناسب رسید. ایده اصلی این مقاله از روش کنترل تطبیقی فازی سیستم های غیرخطی مرتبه صحیح که در مقاله تانگ و همکارانش [۳۶] بیان شده، سرچشمه می گیرد. به این ترتیب این مقاله می تواند به عنوان شروع خوبی از ادغام سیستم فازی تطبیقی و سیستم های مرتبه کسری به حساب آید و مرجعی مناسبی برای ادامه این مسیر در نظر گرفته شود.

در ادامه نحوه چیدمان مطالب مقاله به این گونه است که در بخش ۲ تعاریف اولیه و کاربردی حسابان مرتبه کسری بیان شده و در بخش ۳ مدل فازی ممدانی به صورت خلاصه توصیف شده است. بخش ۴ به معرفی سیستم غیرخطی مرتبه کسری و روابط آن اختصاص دارد. در بخش ۵ به روش کنترلی پیشنهادی پرداخته شده و در بخش ۶ الگوریتم تصویرسازی مرتبه کسری معرفی می گردد. در انتها شبیه سازی ها و نتیجه گیری به ترتیب در بخش های ۷ و ۸ آورده شده اند.

## ۲- تعاریف پایه حسابان مرتبه کسری

در این بخش به بیان تعاریف پایه حسابان مرتبه کسری مورد نیاز مقاله پرداخته می شود. بعد از آن الگوریتم پیاده سازی عددی مشتق مرتبه کسری معرفی می گردد.

**تعریف ۱:** انتگرال مرتبه کسری  ${}_{t_0} I_t^q$  با مرتبه  $q \in \mathbb{R}^+$  از تابع  $f(t)$  به صورت رابطه (۱) محاسبه می شود.

$${}_{t_0} I_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau) d\tau \quad t > t_0 \quad (1)$$

که  $t_0$  و  $\Gamma(\cdot)$  به ترتیب زمان شروع و تابع گاما است.

**تعریف ۲:** مشتق ریمان لیوویل<sup>۲</sup> از تابع  $f(t)$  با مرتبه  $q \in \mathbb{R}^+$  نسبت به زمان عبارت است از:

$${}_{t_0}^{RL} D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-q-1} f(\tau) d\tau \quad (2)$$

به طوری که  $m \in \mathbb{N}$  و  $m-1 < q \leq m$  است.

**تعریف ۳:** مشتق کپوتو<sup>۳</sup> از تابع  $f(t)$  با مرتبه  $q \in \mathbb{R}^+$  نسبت به زمان عبارت است از:

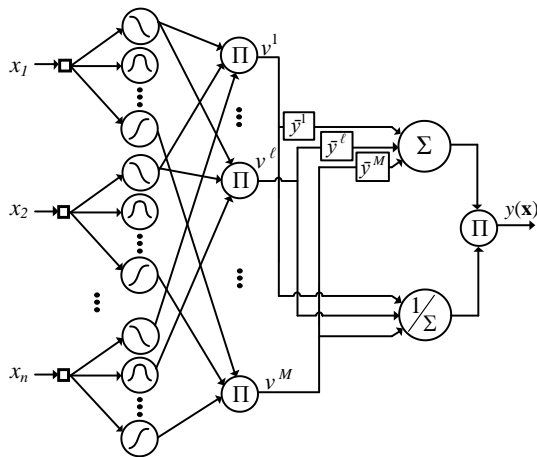
$${}^C_0 D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-q-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (3)$$

به طوری که  $m \in \mathbb{N}$  و  $m-1 < q \leq m$  است [۲].

**لم ۱:** اگر  $x(t) \in C^1[0, T]$  به معنی پیوسته بودن مشتق مرتبه اول در بازه زمانی  $[0, T]$  است، به شرطی رابطه (۴) (خاصیت جابه جایی و جمع مرتبه ها در مشتق کپوتوی پی در پی) برقرار است که  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^+$  و  $q_1 + q_2 \leq 1$  باشد [۳۷].

$${}^C_0 D_t^{q_1} {}^C_0 D_t^{q_2} x(t) = {}^C_0 D_t^{q_2} {}^C_0 D_t^{q_1} x(t) = {}^C_0 D_t^{q_1+q_2} x(t) \quad (4)$$

در ادامه بحث با توجه به آنکه در بیش تر قضایای پایداری مورد نیاز مقاله از مشتق کپوتو استفاده کرده اند، تنها این روش استفاده می شود. به این ترتیب به منظور سادگی نماد  $I^q f(t)$  به جای انتگرال مرتبه



شکل ۱: شمای کلی سیستم فازی ممدانی

#### ۴- ویژگی‌های مسئله

سیستم مرتبه کسری غیرخطی همسان<sup>۱۶</sup> از مرتبه  $(n)$  را مطابق با رابطه (۱۸) در نظر بگیرید. به طوری که تابع  $f(\cdot)$  پیوسته و نامعلوم و ثابت  $b$  معلوم فرض می‌شود.

$$\begin{cases} x_1^{(q)} = x_2 \\ x_2^{(q)} = x_3 \\ \vdots \\ x_n^{(q)} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + bu(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (18)$$

سیگنال کنترلی  $u \in \mathbb{R}$  به‌عنوان ورودی و  $y \in \mathbb{R}$  خروجی سیستم خواهد بود. مطابق لم ۱ و با در نظر گرفتن  $x = x_1$  بردار و معادله حالت سیستم بیان شده در رابطه (۱۸) به ترتیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} X &= [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T \\ &= [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x^{(q)} = x_2 = x_1^{(q)} \\ x^{(2q)} = x_3 = x_2^{(q)} \\ \vdots \\ x^{((n-1)q)} = x_n = x_{n-1}^{(q)} \\ x^{(nq)} = x_n^{(q)} = f(X) + bu(t) \end{cases} \quad (20)$$

که در آن  $x^{(q)}$  مشتق کپوتو با مرتبه  $q$  از متغیر  $x$  است و به‌منظور تأمین شرط لم ۱ باید  $nq \leq 1$  فرض شود. همچنین تمام متغیرهای حالت سیستم قابل اندازه‌گیری در نظر گرفته خواهند شد.

فرض می‌شود که سیگنال مرجعی مثل  $y_d$  وجود دارد که دارای مشتق‌های مرتبه کسری از مرتبه  $q$  پیوسته و کران‌دار است. هدف کنترل این سیستم، تعقیب و ردیابی سیگنال مرجع کران‌دار توسط خروجی سیستم است. برای رسیدن به این هدف سیگنال کنترلی  $u_f(X | \Theta)$  با کمک سیستم فازی با پارامترهای آزاد  $\Theta$  تولید می‌شود. خطای ردیابی  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  و بردار خطا  $E = [e, e^{(q)}, e^{(2q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T$

دیفرانسیل مرتبه کسری به‌سادگی حل عددی حالت مرتبه صحیح نبوده و روش‌های متفاوتی برای آن معرفی شده است. این پژوهش الگوریتمی را که در مرجع [۳۹] ارائه شده، استفاده می‌نماید. برای بیان عملکرد این روش ابتدا معادله دیفرانسیل مرتبه کسری (۱۲) را در نظر بگیرید.

$${}_{t_0} D_t^q x(t) = f(x(t), t) \quad (12)$$

حل عددی این معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه کسری را می‌توان به‌صورت رابطه (۱۳) بیان کرد.

$$x(t_k) = f(x(t_{k-1}), t_k) h^q - \sum_{j=1}^k c_j x(t_{k-j}) \quad (13)$$

به طوری که  $t_k = kh$ ، گام زمانی و  $c_j$  ضرایب دو جمله‌ای بوده که می‌توان آن‌ها را با رابطه (۱۴) محاسبه نمود.

$$c_0 = 1, \quad c_j = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1} \quad (14)$$

#### ۳- توصیف مدل فازی ممدانی

روش استنتاج فازی ممدانی<sup>۱۱</sup> یکی از متداول‌ترین روش‌های استنتاج فازی است. مدل اولیه این سیستم نخستین بار توسط ممدانی در سال ۱۹۷۵ در کنترل مورد استفاده قرار گرفت. خروجی سیستم فازی ممدانی با فرض آنکه از فازی‌ساز منفرد<sup>۱۲</sup>، موتور استنتاج ضرب<sup>۱۳</sup> و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز<sup>۱۴</sup> استفاده شده باشد، از رابطه (۱۵) به‌دست می‌آید.

$$y(X) = \frac{\sum_{\ell=1}^m \bar{y}^\ell \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^\ell}(x_i)}{\sum_{\ell=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^\ell}(x_i) \right)} \quad \ell = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

به طوری که در آن  $X \in \mathbb{R}^n$  بردار دقیق ورودی،  $y \in \mathbb{R}$  خروجی دقیق سیستم فازی،  $m$  تعداد کل قواعد سیستم و  $n$  ابعاد ورودی است.  $\mu_{A_i^\ell}(x_i)$  مقدار تابع تعلق ورودی  $i$ ام مربوط به قاعده  $\ell$ ام و  $\bar{y}^\ell$  مقداری است که در آن تابع تعلق خروجی در قاعده  $\ell$ ام برابر بیش‌ترین مقدار خود، یعنی ۱، است [۲۶]. در صورتی که در سیستم فازی ممدانی مقادیر  $\bar{y}^\ell$  را قابل تنظیم در نظر بگیریم آنگاه می‌توان رابطه (۱۵) را به فرم زیر نوشت.

$$y(X) = \Theta^T \xi(X) = \xi(X)^T \Theta \quad (16)$$

که در آن  $\Theta = [\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^m]^T$  بردار پارامترهای توابع تعلق خروجی و  $\xi(X) = [\xi^1(X), \dots, \xi^m(X)]^T$  بردار رگرسور<sup>۱۵</sup> بوده که رگرسور هر قاعده عبارت است از:

$$\xi^\ell(X) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^\ell}(x_i)}{\sum_{\ell=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^\ell}(x_i) \right)} = \frac{v^\ell}{\sum_{\ell=1}^m v^\ell}, \quad \ell = 1, \dots, m \quad (17)$$

که در آن  $v^\ell$  مقدار عددی بخش مقدم قاعده  $\ell$ ام از حاصل ضرب مقادیر توابع تعلق بخش مقدم به‌دست می‌آید [۳۶]. شکل ۱ شمای کلی سیستم فازی ممدانی را نشان می‌دهد.

[۲] برقرار است. به علاوه بهره سیگنال کنترلی (b) معلوم و قابل اندازه گیری در نظر گرفته می شود. در این صورت می توان تابع لیاپانوف را به فرم زیر تعریف کرد.

$$v = E^T P E + \frac{b}{2\gamma} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} \quad (28)$$

به طوری که  $\gamma$  عدد ثابت هم علامت با b،  $\tilde{\Theta} = \Theta^* - \Theta$  خطای تخمین پارامتر و P ماتریس مثبت معین متقارن بوده که در معادله لیاپانوف زیر صدق می نماید (ضمیمه الف):

$$\Lambda_c^T P + P \Lambda_c = -Q \quad (29)$$

که در آن ماتریس Q مثبت معین در نظر گرفته می شود. اگر مطابق با لم ۲ از رابطه (۲۸) مشتق کسری مرتبه qام گرفته شود، رابطه (۳۰) حاصل می شود.

$$v^{(q)} \leq E^T P E^{(q)} + E^T P E^{(q)} + \frac{b}{\gamma} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta}^{(q)} \quad (30)$$

با ترکیب رابطه (۳۰) با (۲۹) می توان به رابطه (۳۱) رسید.

$$v^{(q)} \leq -E^T Q E + \frac{b}{\gamma} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta}^{(q)} + 2E^T P B_c [u^*(t) - u_f(X(t) | \Theta(t)) - u_c(t)] \quad (31)$$

با اضافه و کم کردن  $2E^T P B_c u_f(X(t) | \Theta^*(t))$  و همچنین با توجه به تساوی  $E^T P b_c = E^T P_n b$  و پس از ساده سازی ریاضی، رابطه (۳۲) به دست می آید.  $P_n$  آخرین ستون از ماتریس P است.

$$v^{(q)} \leq -E^T Q E + 2E^T P_n b \tilde{\Theta}^T \xi(X) + \frac{b}{\gamma} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta}^{(q)} + 2E^T P_n b [u^*(t) - u_f(X(t) | \Theta^*(t)) - u_c(t)] \quad (32)$$

مقداری که برای سیگنال کنترلی جبران ساز پیشنهاد می شود عبارت است از:

$$u_c(t) = u^*(t-1) - \Theta^T(t) \xi(X(t-1)) + \varepsilon \operatorname{sgn}(E^T P_n b) \quad (33)$$

که  $\varepsilon$  مقدار کوچک مثبت است. از رابطه (۳۱) داریم:

$$u^*(t-1) = \frac{(-f(X(t-1)) + y_d^{(nq)}(t-1) + K^T E(t-1))}{b} \quad (34)$$

و از (۲۰) داریم:

$$f(X(t-1)) = x^{(nq)}(t-1) - bu(t-1) \quad (35)$$

در نتیجه با ترکیب روابط (۳۵)، (۳۴) و (۳۳) سیگنال کنترلی  $u_c(t)$  معلوم و قابل محاسبه خواهد بود.

$$u_c(t) = u(t-1) - \Theta^T(t) \xi(X(t-1)) + \varepsilon \operatorname{sgn}(E^T P_n b) + \frac{1}{b} (y_d^{(nq)}(t-1) - x^{(nq)}(t-1) + K^T E(t-1)) \quad (36)$$

از طرف دیگر با قرار دادن رابطه (۳۳) در نامساوی (۳۲) و بعد از اضافه و کم کردن  $2E^T P_n b \Theta^{*T}(t) \xi(X(t-1))$  خواهیم داشت:

$$v^{(q)} \leq -E^T Q E + 2E^T P_n b (u^*(t) - u^*(t-1)) + \frac{b \tilde{\Theta}^T}{\gamma} [\tilde{\Theta}^{(q)} + 2\gamma E^T P_n (\xi(X(t)) - \xi(X(t-1)))] + 2E^T P_n b (u_f(X(t-1) | \Theta^*(t)) - u_f(X(t) | \Theta^*(t))) - 2\varepsilon |E^T P_n b| \quad (37)$$

$K = [k_n, k_{n-1}, \dots, k_2, k_1]^T \in \mathbb{R}^n$  طوری انتخاب می شود که زاویه تمام ریشه های معادله مشخصه مرتبه کسری  $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}$  در نامساوی  $h(s) = s^{(nq)} + k_n s^{((n-1)q)} + \dots + k_1$  صدق نماید. اگر فرض شود که تابع غیرخطی (.) معلوم باشد، سیگنال کنترلی ایده آل به سادگی با رابطه (۲۱) به دست می آید.

$$u^* = \frac{1}{b} [-f(X) + y_d^{(nq)} + K^T E] \quad (21)$$

در این صورت با جایگذاری  $u^*$  در رابطه (۲۰) داریم:

$$e^{(nq)} + k_n e^{((n-1)q)} + \dots + k_1 e = 0 \quad (22)$$

پس با انتخاب مناسب ضریب  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )، خطا به صفر میل خواهد کرد ( $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ ). در عمل مقدار تابع غیرخطی (.) نامشخص بوده و محاسبه سیگنال کنترلی ایده آل ممکن نیست.

به همین دلیل از سیستم فازی برای تولید سیگنال کنترلی مطلوب استفاده می شود. فرض شود سیگنال کنترلی به صورت مجموع سیگنال کنترلی فازی  $u_f(X | \Theta)$  و سیگنال جبران ساز  $u_c(t)$  تعریف شود.

$$u(t) = u_f(X(t) | \Theta(t)) + u_c(t) \quad (23)$$

$u_f(X | \Theta)$  خروجی سیستم فازی مطابق با رابطه (۱۵) و  $\Theta$  بردار پارامترهای قابل تنظیم آن است. به این ترتیب با ترکیب روابط (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) می توان معادله خطای سیستم حلقه بسته را به صورت رابطه (۲۴) نوشت.

$$e^{(nq)} = -K^T E + b(u^* - u_f(X(t) | \Theta(t)) - u_c(t)) \quad (24)$$

همچنین فرم برداری رابطه (۲۴) عبارت است از:

$$E^{(q)} = \Lambda_c E + B_c (u^* - u_f(X(t) | \Theta(t)) - u_c(t)) \quad (25)$$

که در آن  $\Lambda_c$  و  $B_c$  طبق رابطه (۲۴) به دست می آیند.

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \dots & -k_1 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (26)$$

## ۵- روش کنترل پیشنهادی

در این بخش روش کنترل پیشنهادی ارائه و پارامترهای آزاد سیستم فازی به گونه ای تنظیم می شوند که اهداف کنترلی به خوبی تأمین گردد. در این راستا از سیگنال کنترلی جبران ساز نیز استفاده می شود تا در صورت عدم انتخاب توابع تعلق مناسب باز هم عمل کنترل به خوبی انجام شود. در ابتدا  $\Theta^*$ ، بردار پارامترهای مطلوب سیستم فازی، به صورت زیر تعریف می شود.  $m_\Theta$  حداکثر مقدار مجاز اندازه بردار  $\Theta$  است که توسط طراح در روش تصویرسازی (بخش ۵-۱) تعیین می شود.

$$\Theta^* \equiv \arg \min \left[ \sup_{\|\Theta\| \leq m_\Theta} |u^* - u_f(X(t) | \Theta(t)) - u_c(t)| \right] \quad (27)$$

همچنین فرض می شود که  $\Theta^*$  ثابت بوده ( $\Theta^*(t-1) = \Theta^*(t)$ ) و  $\Theta^{*(q)} = 0$  (مشتق کسری کیوتوی عدد ثابت برابر با صفر خواهد بود)

روش تصویرسازی قانون تطبیق پارامتر را طبق رابطه (۴۱) تغییر می‌دهد.

$$(41)$$

$$\Theta^{(q)}(t) = \begin{cases} 2\gamma E^T P_n \Psi(X) & \text{if } (\|\Theta\| < m_\Theta) \text{ or } (\|\Theta\| = m_\Theta, E^T P_n \Theta^T \Psi(X) \leq 0) \\ \Pr(2\gamma E^T P_n \Psi(X)) & \text{if } \|\Theta\| = m_\Theta, E^T P_n \Theta^T \Psi(X) > 0 \end{cases}$$

به طوری که در آن  $m_\Theta$  ثابتی است که محدوده مجاز برای اندازه پارامترهای آزاد را مشخص کرده و توسط طراح مشخص خواهد شد.

همچنین  $\Psi(X) = (\xi(X(t)) - \xi(X(t-1)))$  و تابع تصویرسازی

$\Pr(\cdot)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(42)$$

$$\Pr(2\gamma E^T P_n \Psi(X)) = 2\gamma \left( E^T P_n \Psi(X) - E^T P_n \frac{\Theta \Theta^T \Psi(X)}{\|\Theta\|^2} \right)$$

که در آن  $\|\Theta\|$  نرم ۲ بردار  $\Theta$  است. برای اثبات آنکه پارامتر  $\Theta$  با این روش محدود باقی می‌ماند تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$v_\Theta = \frac{1}{2} \Theta^T \Theta \quad (43)$$

ابتدا فرض شود که در رابطه (۴۱) شرط اول برقرار بوده و

$$\Theta^{(q)} = 2\gamma E^T P_n \Psi(X) \quad \text{است؛ که یا } \|\Theta\| < m_\Theta \text{ بوده پس } \Theta$$

محدود است و یا  $(\|\Theta\| = m_\Theta, E^T P_n \Theta^T \Psi(X) \leq 0)$  برقرار است

که در نتیجه  $v_\Theta^{(q)}$  (طبق رابطه (۴۴)) منفی خواهد بود و باز هم  $\Theta$  محدود باقی می‌ماند. یادآوری می‌شود که رابطه (۴۴) از رابطه (۱۰) قابل استنتاج است.

$$v_\Theta^{(q)} \leq \Theta^T \Theta^{(q)} = 2\gamma \Theta^T E^T P_n \Psi(X) = 2\gamma E^T P_n \Theta^T \Psi(X) \quad (44)$$

اگر شرط دوم درست باشد و  $\Theta^{(q)} = \Pr(2\gamma E^T P_n \Psi(X))$  آنگاه:

$$\begin{aligned} v_\Theta^q &\leq \Theta^T \Theta^{(q)} \\ &= 2\gamma \Theta^T \left( E^T P_n \Psi(X) - E^T P_n \frac{\Theta \Theta^T \Psi(X)}{\|\Theta\|^2} \right) \\ &= 2\gamma \left( E^T P_n \Theta^T \Psi(X) - E^T P_n \frac{\|\Theta\|^2 \Theta^T \Psi(X)}{\|\Theta\|^2} \right) \\ &= 2\gamma (E^T P_n \Theta^T \Psi(X) - E^T P_n \Theta^T \Psi(X)) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

در نتیجه  $v_\Theta^{(q)} \leq 0$  بوده و طبق قضیه پایداری لیاپانوف مرتبه کسری در قضیه ۲،  $\Theta$  محدود باقی خواهد ماند. با این توضیح می‌توان نتیجه گرفت که اگر تطبیق پارامترهای آزاد سیستم فازی طبق رابطه (۴۱) انتخاب شود، همواره  $\|\Theta\| \leq m_\Theta$  است.

## ۶- شبیه‌سازی

در این بخش، ۲ شبیه‌سازی به منظور نمایش توانایی و عملکرد مؤثر روش کنترلی پیشنهادی بیان می‌شوند. برای این منظور در تمام

با صفر قرار دادن عبارت درون کروشه رابطه (۳۷) و با توجه به  $\tilde{\Theta} = \Theta^* - \Theta$  و ثابت فرض شدن  $\Theta^*$  قانون تطبیق کسری (۳۸) به دست می‌آید.

$$\Theta^{(q)} = 2\gamma E^T P_n \xi(X(t)) - 2\gamma E^T P_n \xi(X(t-1)) \quad (38)$$

در این صورت نامساوی لیاپانوف عبارت است از:

$$\begin{aligned} v^{(q)} &\leq -E^T Q E + 2E^T P_n b (u^*(t) - u^*(t-1)) \\ &\quad + 2E^T P_n b (u_f(X(t-1)|\Theta^*(t)) - u_f(X(t)|\Theta^*(t))) \\ &\quad - 2\varepsilon |E^T P_n b| \end{aligned} \quad (39)$$

و یا

$$\begin{aligned} v^{(q)} &\leq -E^T Q E + 2E^T P_n b (u^*(t) - u_f(X(t)|\Theta^*(t))) \\ &\quad + 2E^T P_n b (u_f(X(t-1)|\Theta^*(t)) - u^*(t-1)) \\ &\quad - 2\varepsilon |E^T P_n b| \end{aligned} \quad (40)$$

$$\leq -E^T Q E + 2E^T P_n b (\omega(t) - \omega(t-1)) - 2\varepsilon |E^T P_n b|$$

مقدار  $\varepsilon$  باید تنها از اختلاف  $\omega(t) - \omega(t-1)$  بیش‌تر باشد تا از منفی بودن مشتق کسری تابع لیاپانوف اطمینان حاصل شود. به طوری

که  $\omega(t) = u^*(t) - u_f(X(t)|\Theta^*(t))$  خطای مدل است. از

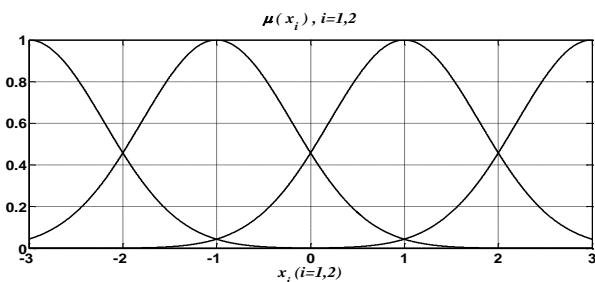
آنجایی که فرض شده است که  $\Theta^*(t)$  با زمان تغییر نکرده و مقدار ثابتی دارد، پس اختلاف بین  $\omega(t)$  و  $\omega(t-1)$  نیز اندک خواهد بود.

بنابراین انتخاب مقدار  $\varepsilon$  چندان بحرانی و سخت نیست و در بخش شبیه‌سازی‌ها نیز نشان داده شده است که مقدار ناچیز اپسیلون (در حدود  $10^{-4}$ ) نیز برای اطمینان از همگرایی پاسخ سیستم به مقدار مطلوب کافی است. به این ترتیب حتی اگر سیستم فازی با توابع تعلق نامناسب هم به کار گرفته شود، باز هم مشتق کسری تابع لیاپانوف منفی خواهد بود. زیرا مشتق کسری تابع لیاپانوف به جای آنکه به خطای مدل وابسته باشد به تغییرات خطای مدل ارتباط دارد. برای مطالعه اجمالی، الگوریتم پیشنهادی در شکل ۱۰ رسم شده است.

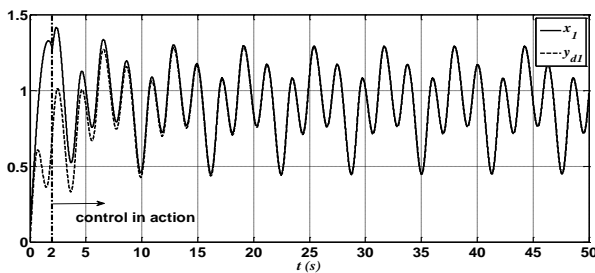
## ۵-۱- محدود کردن پارامترهای سیستم فازی با تصویرسازی

یکی از روش‌های مؤثر در محدود نگه داشتن پارامترهای آزاد در یک ناحیه از پیش تعیین شده و جلوگیری از پدیده گریز پارامتر<sup>۱۷</sup> استفاده از روش تصویرسازی<sup>۱۸</sup> است. در این روش پارامترهای آزاد همواره درون مجموعه محدب محدود<sup>۱۹</sup> مجاز در فضای پارامتر قرار می‌گیرند. زیرا ممکن است در طول روند کنترل مقدار پارامترهای آزاد سیستم واگرا شده و برای دستیابی به عملکرد مناسب به مکانی در بی‌نهایت میل نمایند. اما الگوریتم محدودسازی سبب می‌شود که پارامترهای تحت آموزش سیستم کنترلی در ناحیه اطراف مقدار ایده‌آل محدود، (البته در صورت وجود) باقی بمانند [۳۸]. در ضمن از آنجایی که معادلات و روابط سیستم غیرخطی برای کنترل کننده کاملاً نامعین است، وجود چنین الگوریتمی جهت مراقبت از پارامترهای آزاد سیستم کنترلی ضروری به نظر می‌رسد. در همین راستا روش تصویرسازی مرتبه کسری<sup>۲۰</sup> پارامترهای آزاد سیستم فازی در این بخش معرفی می‌شود.

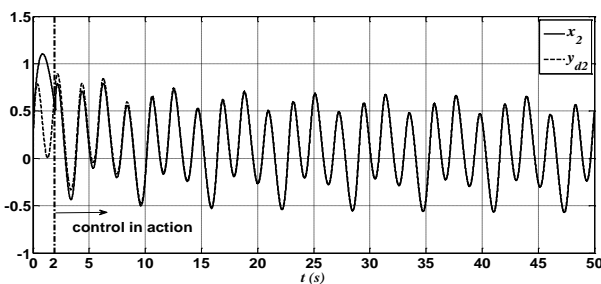
سیستم تحت کنترل و خروجی مطلوب به ازای شروع سیگنال کنترلی از ثانیه ۲، شکل ۳- (ت) مقدار خطا، شکل ۳- (ث) سیگنال کنترلی  $u(t)$  و شکل ۳- (ج) تلاش سیگنال کنترلی فازی را نمایش می دهد. همان طور که در این نمودارها قابل مشاهده است، سیستم به خوبی کنترل شده و خطا به سمت صفر همگرا می شود. همچنین برای تأیید عملکرد مناسب سیستم فازی نمودار شکل ۴ رسم شده است. در این نمودار خروجی کنترل فازی صفر و تنها از سیگنال کنترلی جبران ساز استفاده شده است. همان طور که مشخص است، بدون کنترل تطبیقی فازی خطا به صفر همگرا نشده و جبران ساز به تنهایی قادر به کنترل مناسب و کامل سیستم نیست.



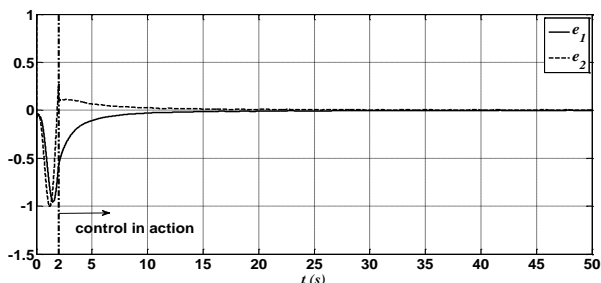
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۳: نتایج شبیه سازی کنترل سیستم ناپایدار با توابع تعلق مناسب؛ الف- توابع تعلق بخش مقدم، ب و پ- خروجی های کنترل شده، ت- سیگنال های خطا

مثال ها گام نمونه برداری برابر با  $h=0.001^s$ ،  $\varepsilon=10^{-4}$  و ماتریس لیاپانوف  $Q=\Delta I$  (ماتریس واحد  $n \times n$  و  $n$  تعداد حالات سیستم) در نظر گرفته شده اند. توابع تعلق به شکل گوسی با انحراف معیار  $\sigma=0.8$  و پارامترهای آزاد کنترل کننده فازی در ابتدا  $(\Theta(0))$  به صورت تصادفی در بازه  $[0, 1]$  انتخاب می شوند.

### ۶-۱- شبیه سازی اول: کنترل سیستم ناپایدار

در این شبیه سازی سیستم تحت کنترل ناپایدار بوده و روش کنترلی پیشنهادی به منظور همزمان سازی خروجی این سیستم با خروجی سیستم پایدار و مطلوب به کار گرفته می شود. سیستم تحت کنترل با معادله دینامیکی غیر خطی مرتبه کسری زیر بیان می شود:

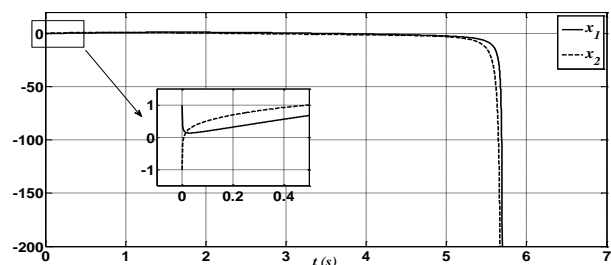
$$\begin{cases} x_1^{(q)}(t) = x_2(t) \\ x_2^{(q)}(t) = x_1(t) - 1.8x_2(t) - x_1^2(t) + 2\cos(t) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (46)$$

که در آن  $d(t) = 2\sin(t)$  اغتشاش داخلی سیستم است. سیستم مطلوب نیز با معادله دینامیکی زیر که با سیستم تحت کنترل کاملاً متفاوت و غیریکسان<sup>۲۱</sup> است، فرض می شود:

$$\begin{cases} y_{d1}^{(q)}(t) = y_{d2}(t) \\ y_{d2}^{(q)}(t) = y_{d1}(t) - 0.25y_{d2}(t) - y_{d1}^3(t) + 0.3\cos(t) + 0.1\sin(y_{d2}(t))\cos(y_{d1}(t)) + \cos(3t) \end{cases} \quad (47)$$

شرایط اولیه برای سیستم تحت کنترل و سیستم مطلوب عبارت

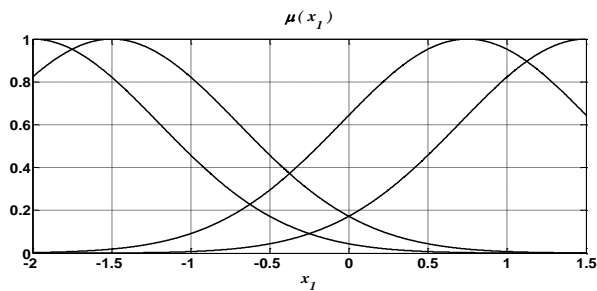
است از:  $X(0) = [1, -1]^T$  و  $Y_d(0) = [0, 0]^T$ . در شکل ۲ حالات سیستم بدون سیگنال کنترلی نشان داده شده است. طبق رابطه (۲۵) مقدار  $q=0.5$  و همچنین  $\gamma=10$ ،  $m_0=10$  و ضرایب معادله دینامیکی خطا  $K = [k_1, k_2]^T = [1, 1]^T$  در نظر گرفته شده است. با توجه به بردار  $K$ ، پس از تقریب کامل سیگنال کنترلی ایده آل توسط کنترل کننده تطبیقی، معادله دینامیکی خطا طبق رابطه (۲۲) به صورت  $e^{(2q)} + e^{(q)} + e = 0$  به دست می آید. مقادیر ویژه این معادله دینامیکی نسبت به  $s^{(q)}$  برابر با  $0.87 \pm 0.05j$  بوده و در نتیجه مطابق با قضیه ۱ سیستم پایدار می شود.



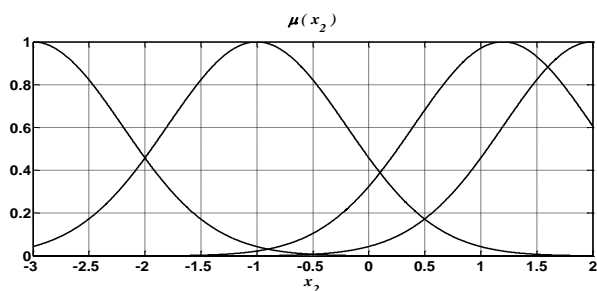
شکل ۲: حالات سیستم تحت کنترل شبیه سازی اول بدون سیگنال کنترلی

حالت اول: در این حالت فرض می شود که توابع تعلق مناسب انتخاب شوند. شکل ۳- (الف) توابع تعلق در نظر گرفته شده در بخش مقدم برای هر دو متغیر  $x_1$  و  $x_2$ ، شکل ۳- (ب و پ) خروجی

است که حتی سیستم فازی با توابع تعلق ناقص را نیز نمی‌توان حذف کرد و ترکیب کنترلی فازی و جبران‌ساز با هم نتیجه مطلوب را تولید خواهند کرد.

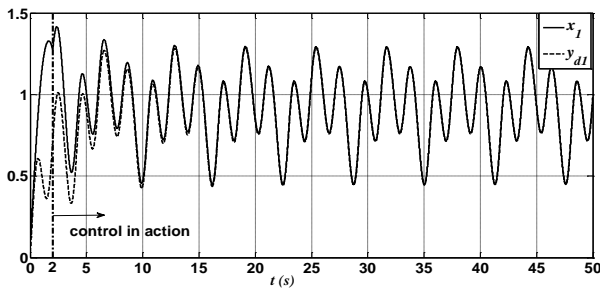


(الف)

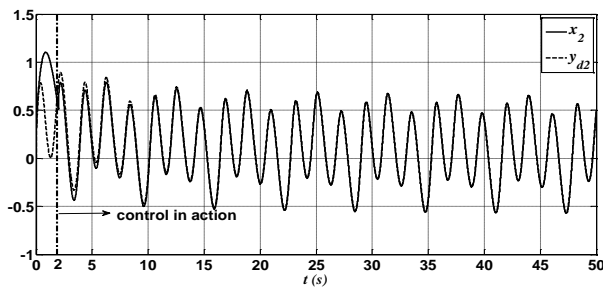


(ب)

شکل ۵: توابع تعلق نامناسب برای کنترل سیستم ناپایدار مرتبه کسری؛ الف- تابع تعلق مربوط به  $x_1$ ، ب- تابع تعلق مربوط به  $x_2$

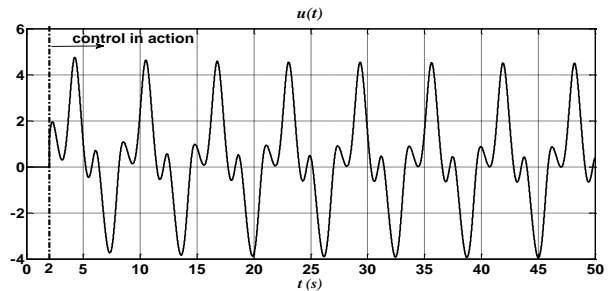


(الف)

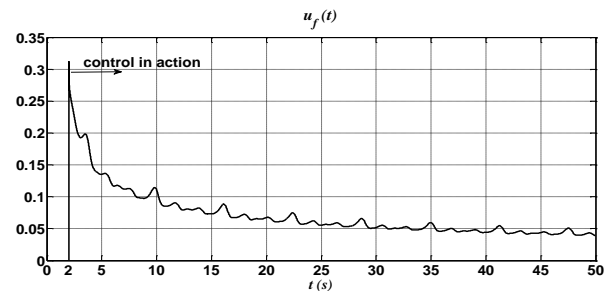


(ب)

شکل ۶: نتایج شبیه‌سازی کنترل سیستم ناپایدار با توابع تعلق نامناسب؛ الف و ب- خروجی‌های کنترل شده

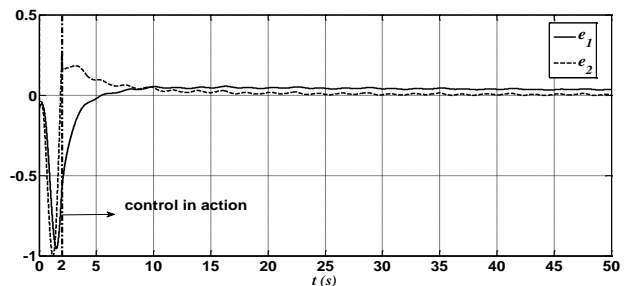


(ث)



(ج)

ادامه شکل ۳: ث- سیگنال کنترلی  $u(t)$ ، ج- سیگنال کنترلی فازی



شکل ۴: خطای حاصل از حذف کنترل کننده فازی

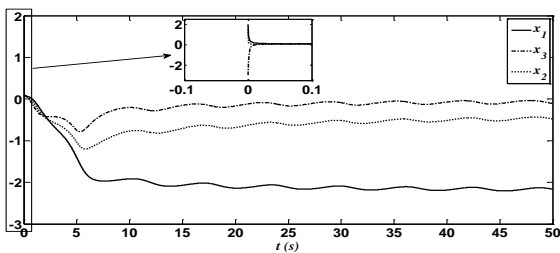
**حالت دوم:** در این حالت فرض می‌شود که توابع تعلق توسط فرد خیره انتخاب نشده و نواقصی در آن وجود داشته باشد. به‌عنوان مثال توابع تعلق نامناسب شکل ۵ در بخش مقدم کنترل کننده فازی به کار روند. در نتیجه سیستم فازی نمی‌تواند به‌عنوان تقریب‌گر جامع عمل کند و خطای خروجی آن قابل چشم‌پوشی نیست. ولی در روش پیشنهادی با استفاده از سیگنال کنترلی جبران‌ساز ضعف سیستم فازی برطرف می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی این وضعیت در شکل ۶ نشان داده شده است. به‌طوری که شکل ۶- (الف و ب) خروجی سیستم تحت کنترل و خروجی مطلوب به ازای سیگنال کنترلی با شروع از ثانیه ۲، شکل ۶- (پ) مقدار خطا، شکل ۶- (ت) سیگنال کنترلی  $u(t)$  و شکل ۶- (ث) سیگنال کنترلی فازی را نمایش می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهند که با اینکه بخش مقدم فازی مناسبی انتخاب نشده است باز هم سیستم به‌خوبی کنترل می‌شود و خطای خروجی به‌سمت صفر میل می‌کند. در کنار این موارد در شکل ۶- (ج) خطای خروجی به ازای حذف سیگنال کنترلی فازی رسم شده است. در اینجا نیز مشخص



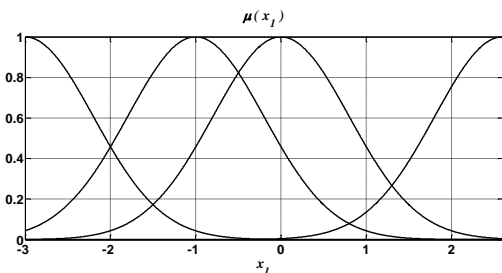
به طوری که در آن  $d(t) = -0.5 \sin(t)$  اغتشاش و  $\Delta f(t) = 2 \cos(t) x_3(t)$  نامعینی مدل است. شکل ۷ عملکرد این سیستم را به ازای  $u(t) = 0$  با شرایط اولیه  $x^T(0) = [2, 1.5, -3]$  و  $q = 0.33$  نشان می دهد.

اگر بردار ضرایب معادله دینامیکی خطا  $k = [1, 3, 1]^T$  در نظر گرفته شود. پس از تقریب کامل سیگنال کنترلی ایده آل توسط کنترل کننده تطبیقی، معادله خطا طبق رابطه (۲۲) به صورت  $e = e^{(\tau q)} + 3e^{(\tau q)} + e^{(\tau q)} = 0$  دینامیکی نسبت به  $s^{(q)}$  برابر با  $z \pm 1.63z - 0.32$  و  $0.36$  بوده و در نتیجه طبق قضیه ۱ سیستم پایدار است. با فرض آنکه از سیستم فازی با توابع تعلق نامطلوب (شکل ۸) استفاده شده و کنترل کننده از لحظه  $t = 2.5^s$  به بعد با  $\gamma = 1$  و  $m_{\ominus} = 20$  به سیستم اعمال شود، نتایج شبیه سازی مطابق شکل ۹ حاصل می شود؛ به طوری که شکل ۹-الف تا (پ) حالت های پایدار شده و شکل ۹-ت) سیگنال کنترلی  $u(t)$ ، مجموع سیگنال جبران ساز و خروجی کنترل کننده فازی و شکل ۹-ث) سیگنال کنترلی حاصل از سیستم فازی را نشان می دهد. این نتایج نیز نشان می دهند که خطا به صورت مطلوبی به صفر همگرا شده و تمامی حالت های سیستم پایدار شده اند.

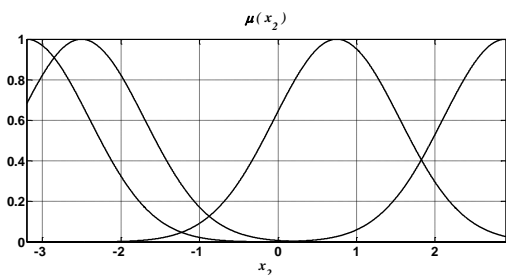


شکل ۷: وضعیت متغیرهای حالت سیستم آشوب مرتبه کسری آرنودو

بدون سیگنال کنترلی



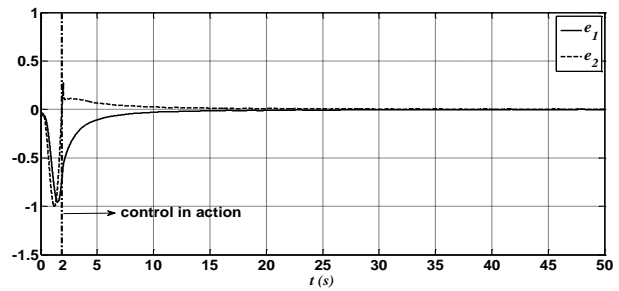
(الف)



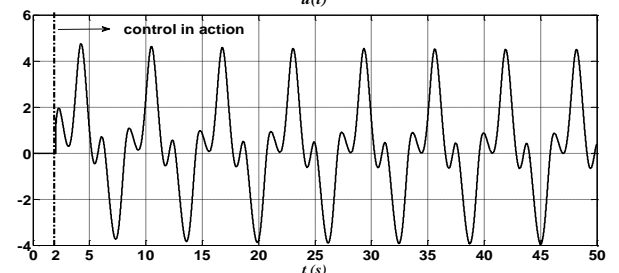
(ب)

شکل ۸: توابع تعلق نامناسب برای پایداری سیستم آرنودو؛ الف-

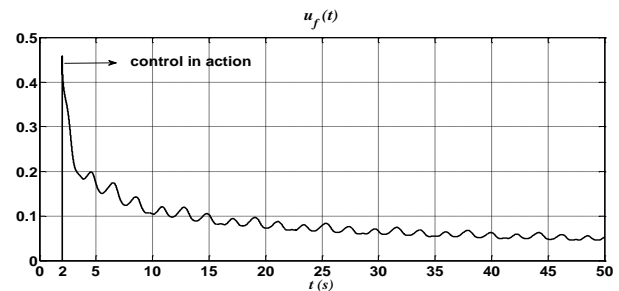
توابع تعلق  $x_1$ ، ب- تابع تعلق  $x_2$



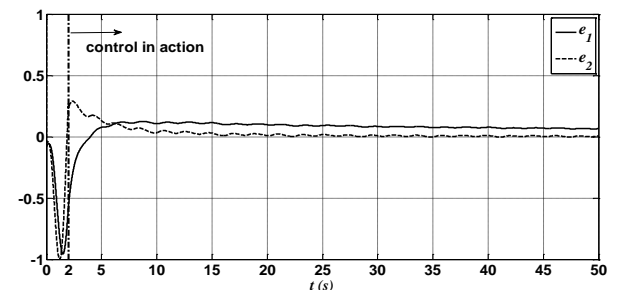
(پ)



(ت)



(ث)



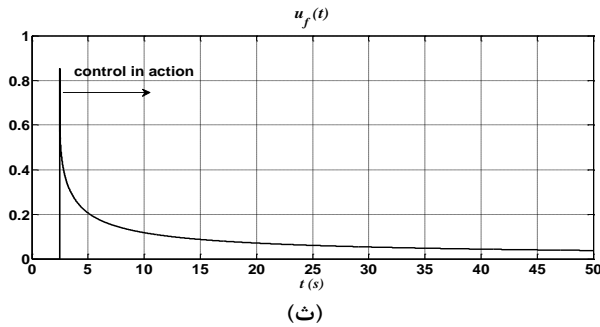
(ج)

ادامه شکل ۶: پ- سیگنال های خطا، ت- سیگنال کنترلی  $u(t)$ ، ث- سیگنال کنترلی فازی، ج- خطای حاصل از حذف کنترل کننده فازی

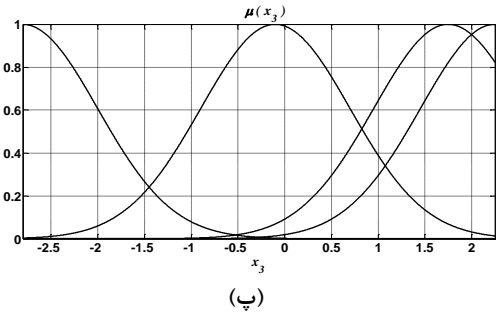
### ۶-۲- شبیه سازی دوم: پایداری سیستم غیرخطی

در این بخش پایداری سیستم آشوب مرتبه کسری آرنودو<sup>۲۲</sup> که دارای سه متغیر حالت است بررسی می شود [۱۲، ۴۰]. معادله ریاضی این سیستم عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1^{(q)}(t) = x_2(t) \\ x_2^{(q)}(t) = x_3(t) \\ x_3^{(q)}(t) = 5.5x_1(t) - 3.5x_2(t) - x_1^3(t) - x_3(t) + \Delta f(t) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (48)$$



ادامه شکل ۹: ت- سیگنال کنترلی فازی



ادامه شکل ۸: پ- تابع تعلق  $x_3$

### ۷- نتیجه گیری

با توجه به رشد و توسعه چشم‌گیر حسابان کسری و گسترش آن در علوم مهندسی، سیستم‌های متنوعی با معادلات مرتبه کسری غیرخطی معرفی می‌شوند. کنترل این گونه سیستم‌ها می‌تواند به‌عنوان چالشی جذاب برای مهندسين کنترل به حساب آید. از طرف دیگر ثابت شده است که سیستم‌های فازی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی به همراه نامعینی بسیار مناسب و کارآمد هستند.

به این ترتیب در این مقاله روش نوینی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری با استفاده از کنترل کننده فازی تطبیقی مستقیم ارائه شده است. قانون تطبیق مرتبه کسری برای به‌روزرسانی و آموزش پارامترهای آزاد کنترل کننده فازی استفاده شده و برای اولین بار روش تصویرسازی در آموزش مرتبه کسری پارامترهای آزاد معرفی گردیده است. با استفاده از روش تصویرسازی محدود ماندن پارامترهای آزاد سیستم فازی تضمین شده است. از آنجایی که احتمال دارد بخش مقدم سیستم فازی توسط فرد خیره انتخاب نشده و به‌خوبی مقادری نگردد، به همراه کنترل کننده فازی یک سیگنال کنترلی جبران‌ساز پیشنهاد شده است تا این عیب کنترل کننده فازی برطرف شود. با کمک این الگوریتم کنترلی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مرتبه کسری با اغتشاش و نامعینی به‌خوبی کنترل شده و خطای خروجی کاهش می‌یابد.

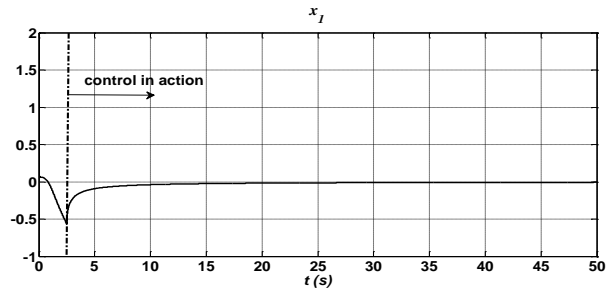
به دلیل آنکه ایده بدون نقصی بر روی کنترل هوشمند سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی ارائه نشده است، مقاله مشابهی برای مقایسه عملکرد روش پیشنهادی وجود نداشته و به همین دلیل تنها به اثبات ریاضی روابط و شبیه‌سازی‌های انجام‌شده بسنده شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام‌شده نیز عملکرد خوب و مناسب الگوریتم کنترل پیشنهادی را تأیید می‌کند.

### پیوست الف

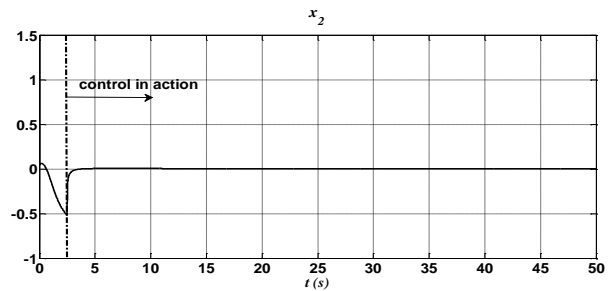
می‌توان تابع لیاپانوف خطا را طبق رابطه (۴۹) تعریف کرد؛ که در آن ماتریس P متقارن و مثبت معین است.

$$v_e = E^T(t)PE(t) \quad (49)$$

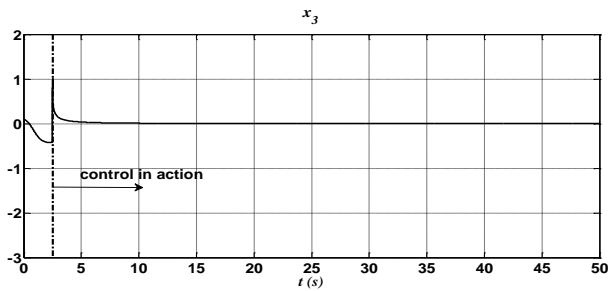
در نتیجه طبق لم ۳ نامساوی زیر برای تابع لیاپانوف خطا در نظر گرفته می‌شود:



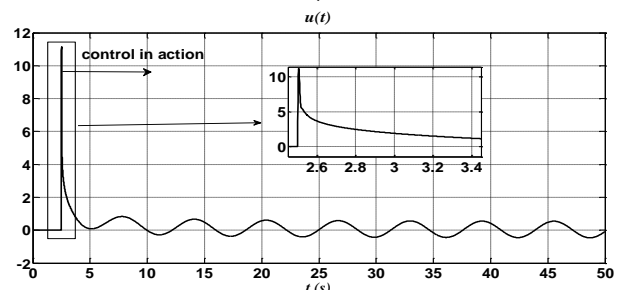
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۹: نتایج شبیه‌سازی پایدارسازی سیستم آرنودو با توابع تعلق نامناسب؛ الف، ب و پ- خروجی‌های کنترل شده، ت- سیگنال کنترلی

$$u(t)$$

در این صورت اگر بتوان ماتریس مثبت معین  $Q$  ای یافت که معادله  $\Lambda_c^T P + P \Lambda_c = -Q$  برقرار باشد، آنگاه با توجه به لم ۳ داریم:

$$v_e^{(q)} \leq -E^T(t)QE(t) \leq -\lambda_{\min Q} \|E\|^2 \quad (53)$$

در این صورت متغیر خطا ( $E$ ) در حالت سیگنال کنترلی صفر، طبق قضیه پایداری لیاپانوف مرتبه کسری (قضیه ۲)، پایدار مینگ-لفلر خواهد بود. بر این اساس طبق روابط (۸)، (۵۰) و (۵۳) خواهیم داشت:

$$\|E(t)\| \leq \left[ \frac{E^T(0)PE(0)}{\lambda_{\min P}} E_q \left( -\frac{\lambda_{\min Q}}{\lambda_{\max P}} t^q \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

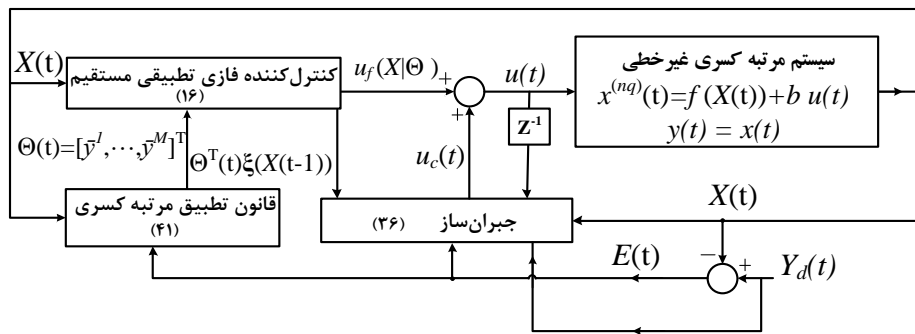
$$\lambda_{\min P} \|E\|^2 \leq v_e \leq \lambda_{\max P} \|E\|^2 \quad (50)$$

با توجه به لم ۲ مشتق مرتبه کسری از تابع لیاپانوف خطا به صورت زیر نوشته می شود:

$$v_e^{(q)} \leq E^{T(q)}(t)PE(t) + E^T(t)PE^{(q)}(t) \quad (51)$$

حال در وضعیت سیگنال کنترلی صفر (ورودی صفر) که معادله خطا برابر  $E^{(q)}(t) = \Lambda_c E(t)$  است، رابطه (۵۱) را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$v_e^{(q)} \leq E^T(t)(\Lambda_c^T P + P \Lambda_c)E(t) \quad (52)$$



شکل ۱۰: بلوک دیاگرام کنترل کننده پیشنهادی تطبیقی فازی مستقیم مرتبه کسری به همراه جبران ساز

regulator,” *ISA Transactions*, vol. 52, no. 6, pp. 807-815, 2013.

## مراجع

- [10] Y. He and R. Gong, “Application of fractional-order model reference adaptive control on industry boiler burning system,” in *2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, pp. 750-753, 2010.
- [11] Y. Wei, Z. Sun, Y. Hu and Y. Wang, “On fractional order composite model reference adaptive control,” *International Journal of Systems Science*, vol. 47, no. 11, pp. 1-11, 2015.
- [12] L. Jun-Guo, “Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Genesio-Tesi systems,” *Chinese Physics*, vol. 14, no. 8, pp. 1517-1521, 2005.
- [13] C. Li and G. Chen, “Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 341, no. 1, pp. 55-61, 2004.
- [14] J. G. Lu, “Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization,” *Physics Letters A*, vol. 354, no. 4, pp. 305-311, 2006.
- [15] Q. Yang and C. Zeng, “Chaos in fractional conjugate Lorenz system and its scaling attractors,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 10, pp. 4041-4051, 2010.
- [16] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud and J. A. Gallegos, “Lyapunov functions for fractional order systems,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 9, pp. 2951-2957, 2014.
- [17] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos and R. Castro-Linares, “Using general quadratic
- [1] R. Caponetto, *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*, World Scientific, vol. 72, 2010.
- [2] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: an Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic press, vol. 198, 1998.
- [3] J. D. Gabano and T. Poinot, “Fractional modelling and identification of thermal systems,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 3, pp. 531-541, 2011.
- [4] B. Vinagre and V. Feliu, “Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures,” in *Proc. 41st IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 1, no. 1, pp. 214-239, 2002.
- [5] R. L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Redding, 2006.
- [6] J. Sabatier, M. Aoun, A. Oustaloup, G. Grégoire, F. Ragot and P. Roy, “Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation,” *Signal processing*, vol. 86, no. 10, pp. 2645-2657, 2006.
- [7] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, 2000.
- [8] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Battle, *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [9] N. Aguila-Camacho and M. A. Duarte-Mermoud, “Fractional adaptive control for an automatic voltage

- [29] T. C. Lin, C. H. Kuo, T. Y. Lee and V. E. Balas, "Adaptive fuzzy  $H_\infty$  tracking design of SISO uncertain nonlinear fractional order time-delay systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, no. 4, pp. 1639-1650, 2012.
- [30] T. C. Lin and T. Y. Lee, "Chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time delay based on adaptive fuzzy sliding mode control," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 4, pp. 623-635, 2011.
- [31] M. P. Aghababa, "Comments on "Adaptive fuzzy  $H_\infty$  tracking design of SISO uncertain nonlinear fractional order time-delay systems"[Nonlinear Dyn. 69 (2012) 1639-1650]," *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, no. 4, pp. 2511-2513, 2012.
- [32] S. Tong, H. X. Li and W. Wei, "Comments on" Direct adaptive fuzzy-neural control with state observer and supervisory controller for unknown nonlinear dynamical systems," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 11, no. 5, pp. 703-705, 2003.
- [33] T. C. Lin, C. H. Kuo and V. E. Balas, "Uncertain fractional order chaotic systems tracking design via adaptive hybrid fuzzy sliding mode control," *International Journal of Computers, Communications & Control*, vol. 6, no. 3, pp. 418-427, 2011.
- [34] N. Ullah, S. Han and M. Khattak, "Adaptive fuzzy fractional-order sliding mode controller for a class of dynamical systems with uncertainty," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 38, no. 4, pp. 402-413, 2015.
- [35] N. Ullah, W. Shaoping, M. I. Khattak and M. Shafi, "Fractional order adaptive fuzzy sliding mode controller for a position servo system subjected to aerodynamic loading and nonlinearities," *Aerospace Science and Technology*, vol. 43, no. 1, pp. 381-387, 2015.
- [36] Y. Tang, N. Zhang and Y. Li, "Stable fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems," *Fuzzy sets and systems*, vol. 104, no. 2, pp. 279-288, 1999.
- [37] C. Li and W. Deng, "Remarks on fractional derivatives," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, no. 2, pp. 777-784, 2007.
- [38] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*, Courier Corporation, 2012.
- [39] I. Petras, *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [40] S. Shoja Majidabad, H. Toosian Shandiz and A. Hajizadeh, "Nonlinear sliding mode block control of fractional-order systems," in *Information and Knowledge Technology (IKT)*, 2014 6th Conference on, pp. 92-97, 2014.
- [18] Y. Li, Y. Chen and I. Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems," *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1965-1969, 2009.
- [19] Y. Li, Y. Chen and I. Podlubny, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1810-1821, 2010.
- [۲۰] سیدهادی حسینی، بابک نجار اعرابی، بهزاد مشیری و اشکان رحیمی کیان، «الگوریتم ترکیب فازی مدل‌های پیش‌بین جریان ترافیک در حضور داده‌های اغتشاشی»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۶، شماره ۱، صفحات ۱۲-۱۳۲، بهار ۱۳۹۵.
- [۲۱] محمد نبی‌پور، مرتضی رزاز، سید قدرت الله سیف‌السادات و سید سعید الله مرتضوی، «کنترل ولتاژ تزریقی DVR توسط کنترل کننده تطبیقی جدید دوگانه در جبران انواع خطاهای شبکه»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۶، شماره ۲، صفحات ۳۰۷-۳۲۱، تابستان ۱۳۹۵.
- [22] K. M. Passino, S. Yurkovich and M. Reinfrank, *Fuzzy Control*, Citeseer, vol. 42, 1998.
- [23] N. Golea, A. Golea and K. Benmahammed, "Stable indirect fuzzy adaptive control," *Fuzzy sets and Systems*, vol. 137, no. 3, pp. 353-366, 2003.
- [24] S. Labiod and T. M. Guerra, "Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, no. 10, pp. 1126-1137, 2007.
- [25] C. H. Wang, H. L. Liu and T. C. Lin, "Direct adaptive fuzzy-neural control with state observer and supervisory controller for unknown nonlinear dynamical systems," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 1, pp. 39-49, 2002.
- [26] L. X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems*, Prentice-Hall press, USA, 1999.
- [27] M. Ö. Efe, "Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm," *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 6, pp. 1561-1570, 2008.
- [28] T. C. Lin, T. Y. Lee, and V. E. Balas, "Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 44, no. 10, pp. 791-801, 2011.

<sup>5</sup> Command Robuste d'Ordre Non Entier (French)

<sup>6</sup> Proportional Integral Derivative (PID)

<sup>7</sup> General approximator

<sup>8</sup> Riemann-Liouville (RL)

<sup>9</sup> Caputo (C)

<sup>10</sup> Mittag-Leffler

<sup>11</sup> Mamdani's fuzzy inference

<sup>1</sup> Flexible structures

<sup>2</sup> Diffusion process

<sup>3</sup> Dielectric polarization

<sup>4</sup> Oustaloup

- <sup>12</sup> Singleton fuzzifier
- <sup>13</sup> Product inference
- <sup>14</sup> Central average defuzzifier
- <sup>15</sup> Regressor
- <sup>16</sup> Commensurate
- <sup>17</sup> Parameter drift
- <sup>18</sup> Projection algorithm
- <sup>19</sup> Bounded convex set
- <sup>20</sup> Fractional order projection algorithm
- <sup>21</sup> Non-identical
- <sup>22</sup> Arneodo