افزایش ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی افاین غیرخطی

مهدی یدی‌پور[۱]، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ فرزاد هاشم‌زاده[۲]، استادیار؛ مهدی برادران‌نیا[۳]، استادیار؛ محمدعلی بادامچی‌زاده[۴]، استاد

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - m.yadipour92@ms.tabrizu.ac.ir
۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - hashemzadeh@tabrizu.ac.ir
۳- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - mbaradaran@tabrizu.ac.ir
۴- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - mbadamchi@tabrizu.ac.ir

چکیده: در این مقاله روش جدیدی برای بزرگ کردن ناحیه جذب گروهی از سیستم‌های دینامیکی افاین غیرخطی بر پایه تئوری زوبوف ارائه شده است. کنترل‌کننده به‌دست‌آمده از این روش، این امکان را فراهم می‌کند که ناحیه جذب سیستم غیرخطی افاین را در هر راستای دلخواه از فضای حالت، منبسط کرد. حتی می‌توان توسط این کنترل‌کننده، ناحیه جذب را در یک راستا منبسط و در راستای دیگر منقبض کرد. همچنین، در این روش محدودیت‌های موجود در کارهای مشابه پیشین کاهش یافته و امکان استفاده بر روی گروه وسیع‌تری از سیستم‌های افاین غیرخطی فراهم شده است. محدودیت‌های ذکرشده بر اساس شرط محدود بودن اندازه سیگنال کنترل‌کننده، حاصل می‌شوند. روش مذکور بر روی سیستم واندرپل و یک سیستم درجه سه اعمال شده و نتایج شبیه‌سازی برای نشان دادن توانایی این روش، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ناحیه جذب، تئوری زوبوف، سیستم افاین غیرخطی.

Enlarging Domain of Attraction for Affine Nonlinear Systems

M. Yadipour[1], MSc Student; F. Hashemzadeh[2], Assistant Professor; M. Baradarannia[3], Assistant Professor; M. A. Badamchizadeh[4], Professor

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: m.yadipour92@ms.tabrizu.ac.ir
2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: hashemzadeh@tabrizu.ac.ir
3- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: mbaradaran@tabrizu.ac.ir
4- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: mbadamchi@tabrizu.ac.ir

Abstract: In this paper, a new method based on Zubov theorem is proposed to enlarge the domain of attraction for a class of affine nonlinear systems. The proposed controller provides the ability to stretch the domain of attraction of affine nonlinear system in any desired dimension of state space. Not only that but the controller makes it possible to stretch the domain of attraction along some directions and compress it along others. Also the proposed approach reduces some constraints of the previous works and is capable to be applied to the larger class of affine nonlinear dynamic system. These constraints are based on the fact that the controller value must be bounded. The Simulation results on the Van der pol system and a three-dimensional system, demonstrate the efficiency of the proposed method.

Keywords: Domain of attraction, Zubov theorem, affine nonlinear system.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۱۹
تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۵/۰۱/۱۸ و ۱۳۹۵/۰۳/۰۶
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۵/۱۶
نام نویسنده مسئول: مهدی برادران‌نیا
نشانی نویسنده مسئول: ایران - تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر.

۱- مقدمه

پایداری، یکی از موضوعات بسیار مهم در بحث کنترل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی می‌باشد. برای پایدار کردن یک سیستم دینامیکی به‌صورت مجانبی حول نقطه تعادل، حالت‌های اولیه سیستم باید درون ناحیه‌ای باشند که به آن، ناحیه جذب[۱] سیستم گفته می‌شود.

از نقطه‌نظرات بسیار از جمله بحث کنترل مقاوم، مسئله ردیابی مجانبی و مسئله آشفتگی، سیستمی مطلوب‌تر است که ناحیه جذب بزرگ‌تری داشته باشد. در این راستا تحقیقات بسیاری برای تخمین و گسترش ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی انجام شده است.

مطالعه و کنکاش در روش‌هایی که ناحیه جذب را تخمین می‌زنند و یا تئوری‌هایی که برای تعیین دقیق ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی غیرخطی وجود دارند؛ به ما کمک می‌کنند که روش‌هایی برای افزایش ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی ابداع کنیم.

در مرجع [۱] تئوری و مفاهیم اساسی در مورد سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، پایداری، نقطه تعادل، ناحیه جذب و رفتار سیستم‌های غیرخطی مورد بحث و مطالعه قرار گرفته‌اند.

روش‌های لیاپانوف در تحلیل سیستم‌های غیرخطی بسیار مفید بوده و منجر به ارائه قضایا و شرایطی می‌شود که تحت آن می‌توان ناحیه جذب را در موارد معین به‌طور دقیق مشخص کرد [۲]. به‌عنوان مثال می‌توان قضیه زوبوف[۲] را نام برد که با استفاده از آن، روشی برای افزایش ناحیه جذب گروه خاصی از سیستم‌های افاین[۳] دینامیکی پیشنهاد شده است. این روش، محدودیت‌هایی دارد و تحت برقراری شرایط معین قابل پیاده‌سازی می‌باشد [۳].

گاهی ممکن است قانون کنترلی به‌دست‌آمده، شامل نقطه‌های منفرد در فضای حالت باشد؛ یعنی ممکن است نقطه‌هایی وجود داشته باشند که در آن‌ها، سیگنال کنترلی نامحدود است [۴]. در این حالت، ناحیه جذب تنها زیرمجموعه‌ای از یک ناحیه احتمالی[۴] است و با استفاده از شیوه بازگشت به عقب[۵]، روشی برای بیشینه کردن ناحیه جذب پیشنهاد شده است.

سیستم‌هایی وجود دارند که معادله دیفرانسیل آن‌ها معمولی[۶] بوده و ماتریس فضای حالت سیستم خطی‌شده، قطری می‌باشد [۵]. با استفاده از یک تابع لیاپانوف بهینه تبدیل‌شده[۷]، مسئله یافتن ناحیه جذب تبدیل به مسئله یافتن ناحیه‌ای می‌شود که در آن، تابع لیاپانوف تبدیل‌شده، تحلیلی است. با بسط دادن تدریجی این تابع، ناحیه جذب به‌صورت تدریجی تخمین زده می‌شود.

در فرآیند طراحی سیستم‌های دینامیکی، گاهی لازم است که نقطه‌ای دلخواه، نقطه تعادل سیستم بوده و ناحیه جذب آن بیشینه باشد. برای این منظور، مسئله به‌شکل یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل شده و سپس حل می‌شود [۶].

همگرایی مسیرهای حالت سیستم به درون یک ناحیه معین در فضای حالت، موضوع مهم دیگری است که در مبحث سیستم‌های دینامیکی غیرخطی به آن توجه شده است. این مسئله، کاملاً بی‌شباهت به بحث‌های پیشین نیست. بر این اساس، الگوریتمی بر اساس استفاده از توابع شبه لیاپانوف برای تعیین ناحیه جذب به درون یک ناحیه مورد نظر در فضای حالت، برای سیستم‌های دینامیکی با معادله دیفرانسیل معمولی پیشنهاد شده است [۷].

سیستم‌های غیرخطی با تحریک کم، معمولاً چندین نقطه تعادل دارند. با استفاده از روش‌هایی مانند جابایی قطب‌ها و یا LQR بر روی مدل خطی‌سازی‌شده می‌توان سیستم را پایدار کرد؛ ولی معمولاً این روش‌ها منجر به ناحیه جذب کوچکی می‌شوند. روش پیشنهادشده [۸]، با استفاده از ورودی‌های ضربه‌ای[۸]، علاوه بر تأمین پایداری سیستم، ناحیه جذب را نیز افزایش داده است.

در زمینه‌های دیگر مانند سیستم‌های دینامیکی غیرخطی کنترل‌شده با MPC[۹]، ناحیه جذب دارای اهمیت بوده و روش‌هایی برای افزایش این ناحیه پیشنهاد شده‌اند [۹].

تغییر استراتژی قانون کنترل[۱۰] برای یک سیستم دینامیکی، ایده دیگری در این زمینه می‌باشد. این بدان معنی است که تحت شرایط معین از یک قانون کنترل و با تغییر شرایط از قانون کنترل دیگری استفاده شود. به‌عنوان مثال، می‌توان با استفاده از روش شبه خطی‌سازی، پایداری و ناحیه جذب اولیه‌ای برای سیستم فراهم کرد و سپس با استفاده از روش فیدبک بهره‌بالا، مسیرهای رفتار سیستم را وادار به همگرایی به درون ناحیه جذب حاصل از روش اول کرد. در مقایسه با حالتی که تنها از روش اول استفاده شده است؛ روش جدید، ناحیه جذب بزرگ‌تری فراهم می‌کند [۱۰].

استفاده از روش‌های محاسباتی مانند روش ترتیبی[۱۱] نتیجه‌های خوبی حاصل کرده است. در یک روش پیشنهادشده، با استفاده از روش محاسباتی و با قید ارضاء شرایط قضیه تعمیم‌یافته، تابع لیاپانوف به‌صورت تقریبی محاسبه شده است. با استفاده از این تابع، ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی خودگردان تخمین زده می‌شود [۱۱].

در یک روش پیشنهادی برای تخمین ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی چندجمله‌ای، نشان داده شده است که چگونه می‌توان از تئوری‌های Zeller–Ehlich برای محاسبه زیرمجموعه‌هایی از ناحیه جذب استفاده کرد. روش پیشنهادشده بر اساس استفاده از توابع لیاپانوف درجه دو است و می‌توان آن را بر روی سیستم‌های چندجمله‌ای چندمتغیره به کار برد [۱۲].

سیستم‌های دینامیکی بیولوژیکی به‌دلیل کاربرد آن‌ها در محیط زیست و سلامت انسان، اهمیت خاصی دارند و روش‌هایی برای تخمین ناحیه جذب این سیستم‌ها پیشنهاد شده‌اند [۱۳].

برای یافتن تخمینی درونی و خارجی از ناحیه جذب یک سیستم دینامیکی چندجمله‌ای، یک روش سه‌مرحله‌ای در [۱۴] پیشنهاد شده است که در آن، هر مرحله به‌صورت حل یک مسئله بهینه‌سازی محدب است. با توجه به اهمیت سیستم‌های دینامیکی که دارای تأخیر زمانی هستند؛ می‌توان به روش ارائه‌شده برای تخمین ناحیه جذب گروه خاصی از این سیستم‌ها اشاره کرد [۱۵]. در این کار، از توابع لیاپانوف-

کراسوفسکی استفاده شده است. روش پیشنهادشده بر روی سیستم‌هایی مانند مدل دینامیکی سرطان خون شبیه‌سازی و نتایج آن تأیید شده است.

اشباع شدن تحریک‌کننده، پدیده‌ای است که به ساختار درونی آن مربوط می‌شود. تأثیر این پدیده بر روی ناحیه جذب مورد تحقیق‌های فراوان در سال‌های اخیر قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه‌ای از نتایج، می‌توان به روشی اشاره کرد که برای سیستم‌هایی با عملگر دلتا و اشباع در تحریک‌کننده، پیشنهاد شده است [۱۶]. این روش، ناحیه جذب و همچنین سرعت همگرایی مسیرهای حالت را بیشینه می‌کند.

کنترل مد لغزشی یکی از روش‌های کنترل سیستم‌های غیرخطی است. از این روش می‌توان برای مواجهه با عدم قطعیت و نامعینی در سیستم استفاده کرد. در [۱۷] روشی برای تخمین ناحیه جذب سیستم کنترلی مد لغزشی برای گروهی از سیستم‌های با تحریک کم، ارائه شده است.

نتیجه همه این تحقیق‌ها، روش‌هایی هستند که هر کدام محدودیت‌های ویژه خود را دارند و مسئله افزایش ناحیه جذب، هنوز به‌صورت کلی حل نشده و این زمینه نیازمند تحقیق‌های بیش‌تری است.

کار انجام‌شده در این مقاله بر اساس تئوری زوبوف می‌باشد. به‌عبارت دیگر، برای سیستم دینامیکی، افاین غیرخطی کنترل‌کننده را طوری طراحی کرده‌ایم که شرایط قضیه زوبوف برآورده شوند.

در بخش ۲ مقاله، تئوری زوبوف توضیح داده شده و در بخش ۳ روش پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده ارائه شده است. در بخش ۴، روش مذکور بر روی سیستم‌های واندرپل[۱۲] معکوس و یک سیستم درجه ۳ اعمال شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی آن نشان داده شده است. درنهایت در بخش ۵، نتیجه‌گیری مقاله بیان شده است.

۲- تئوری زوبوف [۲]

در این تئوری، از تئوری لیاپانوف برای به‌دست آوردن یک سری شرایط جهت مشخص‌کردن ناحیه جذب استفاده شده است. اگر این شرایط برقرار باشند، ناحیه جذب به‌صورت دقیق تعیین می‌شود. در ادامه، به تشریح تئوری زوبوف می‌پردازیم.

فرض کنید تابع مثبت معین $v(\mathbf{x})$ و مجموعه G و تابع $f(\mathbf{x})$ در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} &G=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, 0<v(\mathbf{x})<1\right\} \\ &\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x}) \end{aligned} \qquad (۱)$$

همچنین، فرض کنید که تابع مثبت معینی مانند $h(\mathbf{x})$ وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که:

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \frac{\delta v}{\delta\mathbf{x}} f(\mathbf{x})=-h(\mathbf{x})(1-v(\mathbf{x})) \qquad (۲)$$

اگر شرایط (۱) و (۲) برقرار باشند؛ در این‌صورت، اگر G یک فضای بسته باشد؛ آن‌گاه به‌ازای هر $\mathbf{x}$ عضو مرز ناحیه G مقدار $v(\mathbf{x})=1$ خواهد بود و اگر G یک فضای بسته نباشد، رابطه (۳) برقرار است.

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} v(\mathbf{x})=1 \qquad (۳)$$

در نهایت، تئوری زوبوف ثابت می‌کند که اگر سیستمی در شرایط ذکرشده صدق کند؛ مجموعه G ناحیه جذب سیستم می‌باشد. بنابراین اگر شرایط اولیه سیستم، $\mathbf{x}_0$ عضو مجموعه G باشد؛ آن‌گاه تمام حالت‌های سیستم به‌صورت مجانبی به‌سمت نقطه تعادل $\mathbf{x}=0$ همگرا خواهند شد.

۳- روش طراحی کنترل‌کننده

در تمامی مقاله، منظور از ناحیه جذب، ناحیه جذب مربوط به نقطه $\mathbf{x}=0$ است. سیستم دینامیکی درنظرگرفته‌شده در این مقاله، حالت خاصی از سیستم‌های دینامیکی Affine است که به‌صورت (۴) فرض می‌شود.

$$\dot{\mathbf{x}}=\left[f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \ldots \quad f_n(\mathbf{x})\right]^T+\left[g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_k\right]^T u \qquad (۴)$$
$$\left(k=1,2,\ldots,n \ ; g_k\in\mathbb{R}\right)$$

که در آن، $f_1, f_2, \ldots, f_n$ توابع اسکالر بر حسب متغیر حالت سیستم $(\mathbf{x})$ هستند. u قانون کنترل و n درجه سیستم است.

بدین‌ترتیب، تحقیق بر روی شکل کلی‌تری از سیستم‌های دینامیکی انجام می‌شود؛ در حالی که در تحقیق مشابه پیشین [۳]، فرم محدودی از این سیستم‌ها در نظر گرفته شده است.

در این مقاله با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب و استفاده از قضیه زوبوف، کنترل‌کننده‌ای طراحی می‌شود که ناحیه جذب مربوط به یک نقطه تعادل دلخواه در سیستم‌های دینامیکی به فرم (۴) را افزایش می‌دهد. همچنین، کنترل‌کننده پیشنهادی می‌تواند شکل ناحیه جذب را تغییر دهد و محدودیت‌های مهم ایجادشده در تحقیق [۳] را حذف کند. درنهایت، کنترل‌کننده پیشنهادی بر روی کلیه سیستم‌ها به فرم (۴) قابل اجرا خواهد بود.

تابع لیاپانوف را به‌صورت (۵) انتخاب می‌کنیم.

$$v(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|=\left|\frac{x_1}{a_1}\right|+\left|\frac{x_2}{a_2}\right|+\cdots\left|\frac{x_n}{a_n}\right| \qquad (۵)$$
$$\left(a_i>0\right)$$

مشتق تابع $v(\mathbf{x})$ نسبت به زمان به‌صورت (۶) می‌باشد.

$$\dot{v}(\mathbf{x})=\frac{\delta v}{\delta\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}=\left[\frac{sign(x_1)}{a_1} \quad \frac{sign(x_2)}{a_2} \quad \cdots \quad \frac{sign(x_n)}{a_n}\right]. \qquad (۶)$$
$$\left(\left[f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad f_n(\mathbf{x})\right]^T+\left[g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_n\right]^T u\right)$$

رابطه (۶) را به‌صورت رابطه (۷) بازنویسی می‌کنیم.

$$\dot{v}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i}f_i(\mathbf{x})+u\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i}g_i \qquad (۷)$$

با برقراری شرایط قضیه زوبوف، قانون کنترل u را به‌صورت (۸) به‌دست می‌آوریم.

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = -h(\mathbf{x})(1-v(\mathbf{x})) \tag{۸}$$

با انتخاب $h(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ به رابطه (۹) می‌رسیم.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i} f_i(\mathbf{x}) + u\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i = -\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{a_i}\right| + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|\right)^2 \tag{۹}$$

درنهایت، قانون کنترل به‌صورت (۱۰) حاصل می‌گردد.

$$u = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i} f_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i} + \frac{-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{a_i}\right| + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i} \tag{۱۰}$$

این بدان معنی است که با اعمال u به‌دست‌آمده از معادله (۱۰) بر روی سیستم (۴)، سیستم حلقه‌بسته در شرایط قضیه زوبوف صدق می‌کند. بنابراین، ناحیه جذب مربوط به نقطه تعادل مبدأ در سیستم کنترل‌شده بنا بر قضیه زوبوف، مجموعه G مطابق رابطه (۱۱) است.

$$G = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \middle| 0 < v(\mathbf{x}) < 1\right\} \Rightarrow G = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{a_i}\right| < 1\right\} \tag{۱۱}$$

ناحیه جذب به‌دست‌آمده، یک فضای بسته n - بعدی است که تصویر آن در هر دو بعد به‌شکل مربع یا لوزی می‌باشد. این فضا را می‌توان با تنظیم a_i $(i=1,2,...,n)$ در جهت‌های مختلف و به‌میزان دلخواه تغییر داد.

بدیهی است که مقدار سیگنال کنترلی باید محدود باشد. برای این منظور، کافی است رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall x^n \in G \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i \neq 0 \tag{۱۲}$$

بدیهی است که برای هر سیستم دینامیکی به فرم (۴)، می‌توان a_i $(i=1,2,...,n)$ را طوری انتخاب کرد که شرط فوق همواره برقرار گردد.

نکته این‌که با انتخاب سیگنال کنترلی به‌صورت رابطه (۱۰)، در سیستم‌هایی که (۱۲) برقرار باشد؛ تابع لیاپانوف برای سیستم حلقه‌بسته به‌صورت پیوسته مشتق‌پذیر است.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش، روش مطرح‌شده در این مقاله بر روی سیستم‌های معکوس واندرپل و یک سیستم درجه ۳ استخراج‌شده از مرجع [۵]، پیاده‌سازی و نتایج آن ارائه می‌شود.

۴-۱- سیستم معکوس واندرپل

معادله دیفرانسیل سیستم معکوس واندرپل به‌صورت زیر است که ناحیه جذب آن برای $u=0$ در شکل ۱ آورده شده است.

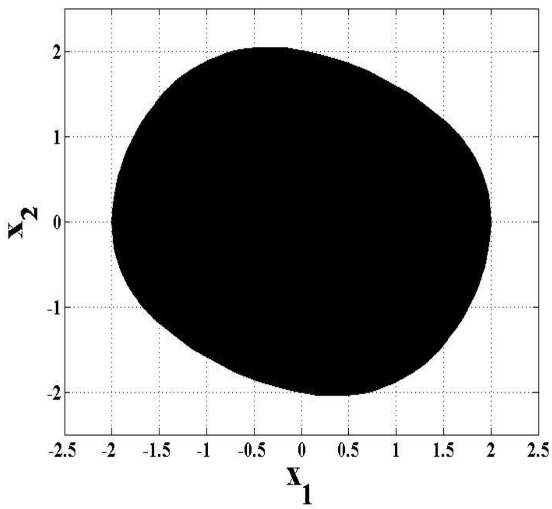
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + g_1 u\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 0.2x_2 + 0.2x_1^2 x_2 + g_2 u\end{aligned} \tag{۱۳}$$

قانون کنترل u به‌دست‌آمده با استفاده از روش پیشنهادی (رابطه (۱۰)) به‌صورت (۱۴) است و ناحیه جذب سیستم حلقه‌بسته برای مقادیر $g_1=3,\ g_2=1,\ a_1=4,\ a_2=4$ در شکل ۲ نشان‌داده شده است.

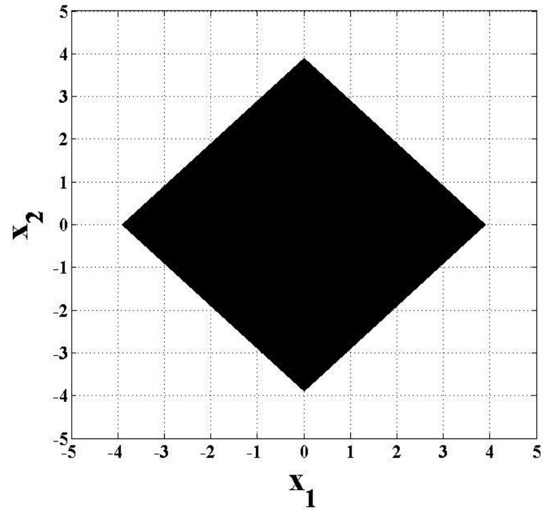
$$u = -\frac{\sum_{i=1}^{2}\frac{sign(x_i)}{a_i} f_i}{\sum_{i=1}^{2}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i} + \frac{-\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{x_i}{a_i}\right| + \left(\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|\right)^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i} \tag{۱۴}$$

که در آن:

$$f_1 = x_2;\ f_2 = -x_1 - 0.2x_2 + 0.2x_1^2 x_2;\ g_i \in \mathbb{R}; (i=1,2)$$

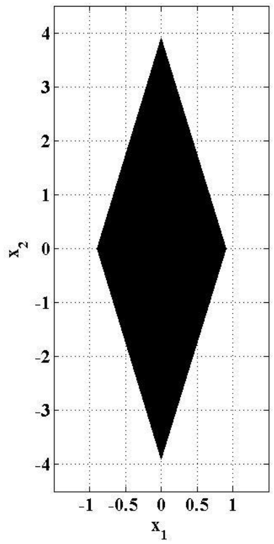


شکل ۱: ناحیه جذب سیستم معکوس واندرپل برای $u=0$



شکل ۲: ناحیه جذب سیستم حلقه بسته معکوس واندرپل برای $g_1=3,\ g_2=1,\ a_1=4,\ a_2=4$

همان‌طور که ذکر شد؛ می‌توان با تغییر مقادیر a_i $(i=1,2)$ در رابطه (۱۴) شکل ناحیه جذب را تغییر داد. به‌عنوان مثال، ناحیه جذب سیستم حلقه‌بسته برای مقادیر $g_1=3,\quad g_2=1,\quad a_1=1,\quad a_2=4$ در شکل ۳ آورده شده است.

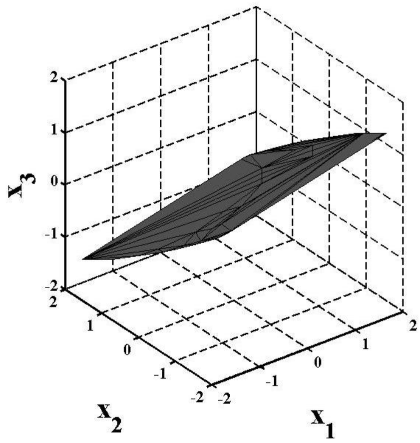


شکل ۳: ناحیه جذب سیستم حلقه بسته معکوس واندرپل برای
$g_1=3,\quad g_2=1,\quad a_1=1,\quad a_2=4$

۴-۲- سیستم درجه ۳ استفاده‌شده از مرجع [۵]

معادله دیفرانسیل سیستم ذکرشده مطابق رابطه (۱۵) است که ناحیه جذب سیستم برای $u=0$ در شکل ۴ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + g_1 u\\ \dot{x}_2 &= x_3 + g_2 u\\ \dot{x}_3 &= -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + g_3 u\end{aligned} \qquad (۱۵)$$



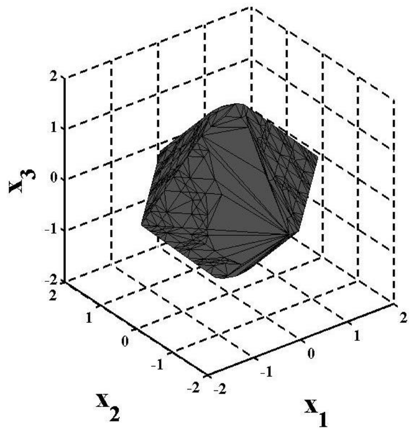
شکل ۴: ناحیه جذب سیستم سه‌بعدی (۱۵) با $u=0$

قانون کنترل u حاصل از روش پیشنهادی به‌صورت (۱۶) است و ناحیه جذب برای $g_1=4,\quad g_2=2,\quad g_3=1,\quad a_1=2,\quad a_2=2,\quad a_3=2$ در شکل ۵ آورده شده است.

$$u = -\frac{\sum_{i=1}^{3}\frac{sign(x_i)}{a_i} f_i}{\sum_{i=1}^{3}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i} + \frac{-\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{x_i}{a_i}\right| + \left(\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{x_i}{a_i}\right|\right)^2}{\sum_{i=1}^{3}\frac{sign(x_i)}{a_i} g_i} \qquad (۱۶)$$

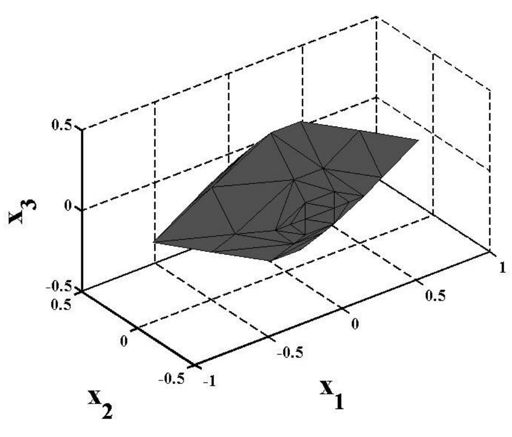
که در آن:

$$f_1 = x_2;\ f_2 = x_3;\ f_3 = -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$



شکل ۵: ناحیه جذب سیستم حلقه بسته سه‌بعدی (۱۵) برای
$g_1=4,\quad g_2=2,\quad g_3=1,\quad a_1=2,\quad a_2=2,\quad a_3=2$

با تغییر مقادیر a_i $(i=1,2,3)$ می‌توان شکل ناحیه جذب را تغییر داد. به‌عنوان نمونه، ناحیه جذب سیستم حلقه‌بسته برای مقادیر $g_1=1,\quad g_2=0,\quad g_3=0,\quad a_1=1,\quad a_2=0.5,\quad a_3=0.5$، در شکل ۶ آورده شده است.



شکل ۶: ناحیه جذب سیستم حلقه بسته سه‌بعدی (۱۵) برای
$g_1=1,\quad g_2=0,\quad g_3=0,\quad a_1=1,\quad a_2=0.5,\quad a_3=0.5$

۵- نتیجه‌گیری

تئوری زوبوف در زمینه ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی، الهام‌بخش یافتن روش‌هایی برای افزایش و تغییر شکل ناحیه جذب سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است. در این مقاله، با استفاده از تئوری مذکور،

روشی برای بزرگ کردن ناحیه جذب گروه گسترده‌ای از سیستم‌های دینامیکی پیشنهاد شده است. علاوه بر ارائه روشی برای افزایش ناحیه جذب، تلاش شد تا روش ارائه‌شده شرط محدودکننده‌ای نداشته باشد و یا حداقل، این شرط‌ها به کم‌ترین تعداد ممکن کاهش یابد. همچنین، روش پیشنهادشده، این امکان را فراهم می‌کند که شکل ناحیه جذب را در راستاهای دلخواه تغییر داد. در شبیه‌سازی‌های انجام‌شده بر روی سیستم‌های معکوس واندرپل و یک سیستم درجه ۳، کارآمدی و نتایج روش پیشنهادی مشاهده می‌شود.

مراجع

[1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002.

[2] V. I. Zubov, *Methods of A. M. Lyapunov and Their Application*, P. Noordhoff, Groningrn, 1964.

[3] F. Hashemzadeh and M. J. Yazdanpanah, "Semi-global enlargement of domain of attraction for a class of affine nonlinear systems," *In Computer Aided Control System Design, IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 2257-2262, 2006.

[4] Z. H. Li and M. Krstić, "Maximizing regions of attraction via backstepping and CLFs with singularities," *Systems & Control Letters*, vol. 30, pp. 195-207, 1997.

[5] E. Kaslik, A. M. Balint and S. Balint, "Gradual approximation of the domain of attraction by gradual extension of the "embryo" of the transformed optimal Lyapunov function," *Nonlinear Studies*, vol. 10, no. 1, pp. 67-78, 2003.

[6] L. G. Matallana, A. M. Blanco and J. A. Bandoni, "Nonlinear dynamic systems design based on the optimization of the domain of attraction," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 53, pp. 731-745, 2011.

[7] S. Ratschan and Z. She, "Providing a basin of attraction to a target region by computation of lyapunov-like functions," *International Conference on Computational Cybernetics*, pp. 1-5, 2006.

[8] R. Jafari and R. Mukherjee, "Enlarging the region of attraction for underactuated systems using impulsive inputs," *American Control Conference (ACC)*, pp. 5613-5618, 2013.

[9] D. Limón, T. Alamo and E. F. Camacho, "Enlarging the domain of attraction of MPC controllers," *Automatica*, vol. 41, pp. 629-635, 2005.

[10] D. Davidson and S. Bortoff, "Enlarge your region of attraction using high-gain feedback," *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 634-639, 1994.

[11] M. Rezaiee Pajand and B. Moghaddasie, "Estimating the region of attraction via collocation for autonomous nonlinear systems," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 41, 2012.

[12] B. Tibken and O. Hachicho, "Estimation of the domain of attraction for polynomial systems using multidimensional grids," *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3870-3874, 2000.

[13] M. L. Matthews and C. Williams, "Region of attraction estimation of biological continuous Boolean models," *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 1700-1705, 2012.

[14] M. Korda, D. Henrion and C. N. Jones, "Controller design and region of attraction estimation for nonlinear dynamical systems," *Proc. IFAC Symp. Nonlinear Control Systems*, Toulouse, France, 2103.

[15] R. Villafuerte and S. Mondié, "Estimate of the region of attraction for a class of nonlinear time delay systems: a leukemia post-transplantation dynamics example," *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 633-638, 2007.

[16] H. Yang, L. Zhang, P. Shi and C. Hua, "Enlarging the domain of attraction and maximising convergence rate for delta operator systems with actuator saturation," *International Journal of Control*, vol. 88, pp. 2030-2043, 2015.

[17] S. G. Nersesov, H. Ashrafiuon and P. Ghorbanian, "On estimation of the domain of attraction for sliding mode control of underactuated nonlinear systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, pp. 811-824, 2014.

زیرنویس‌ها

[1] Domain of Attraction
[2] Zubov
[3] Affine
[4] Feasibility Region
[5] Back-Stepping
[6] Ordinary
[7] Optimal Transformed Lyapunov Function
[8] Impulsive Inputs
[9] Model Predictive Control
[10] Switching
[11] Collocation Method
[12] Van der Pol