

طراحی کنترل حالت لغزشی دینامیکی برای سیستم‌های آشوبی با استفاده از رُویتگر حالت لغزشی

علی کرمی ملائی^۱، استادیار؛ احسان رجبی^۲، دانشجوی کارشناسی ارشد

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه حکیم سبزواری - سبزوار - ایران - a.karami@hsu.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و رباتیک - دانشگاه صنعتی شاهرود - شاهرود - ایران - e.rajabi@shahroodut.ac.ir

چکیده: در این مقاله روشی جدید برای کنترل حالت لغزشی دینامیکی سیستم‌های غیرخطی با استفاده از رُویتگر حالت لغزشی پیشنهاد شده است. در کنترل حالت لغزشی دینامیکی با قرار دادن انتگرال‌گیر (یا فیلتر پایین‌گذر) قبل از سیگنال ورودی کنترل، لرزش حذف می‌شود. با این حال، در کنترل حالت لغزشی دینامیکی مرتبه سیستم افزوده (سیستم با انتگرال‌گیر) یک واحد از مرتبه سیستم اصلی بیشتر است (در صورت استفاده از انتگرال‌گیر)، بنابراین برای پایدار سازی آن، مدل سیستم باید کامل مشخص باشد. برای حل این مشکل، با استفاده از رُویتگر حالت لغزشی پیشنهادی، مدلی برای سیستم غیرخطی نامعین به‌دست آورده و سپس سیگنال کنترل ورودی بدون لرزش سیستم را براساس این رُویتگر، محاسبه می‌نماییم. همگرایی کنترل‌کننده و رُویتگر پیشنهادی، با قضیه لیاپانوف اثبات شده و به علاوه از کران مدل سیستم استفاده نمی‌شود که در کاربردهای عملی اهمیت دارد. برای تایید کارایی این روش، از سیستم آشوبی دافینگ هلمز به‌همراه مقایسه روش پیشنهادی با کنترل حالت لغزشی رایج استفاده می‌کنیم. در ارایه نتایج و برای این‌که مقایسه به‌صورت عادلانه باشد، در هر دو روش از یک رُویتگر (رُویتگر لغزشی پیشنهادی) استفاده می‌کنیم. با مطالعه و مقایسه معادلات بیان‌شده، تفاوت دو روش مشاهده شده و اگر چه کنترل حالت لغزشی رایج بسیار ساده است، ولی خواننده می‌تواند سادگی فهم و طراحی کنترل حالت لغزشی دینامیکی را نیز به‌وضوح مشاهده نماید. همچنین در نتایج حاصل و در شبیه‌سازی‌ها، دیده می‌شود که در کنترل حالت لغزشی رایج لرزش وجود دارد ولی در کنترل حالت لغزشی دینامیکی لرزش کامل حذف می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کنترل حالت لغزشی دینامیکی، رُویتگر حالت لغزشی، سیستم غیرخطی، مدل آشوبی دافینگ هلمز.

Dynamic Sliding Mode Control Design for Nonlinear Systems Using Sliding Mode Observer

A. Karami-Mollaei¹, Assistant Professor; E. Rajabi², MSc Student

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran, Email: a.karami@hsu.ac.ir

2- Faculty of Electrical and Robotic Engineering, Sharood University of Technology, Shahrood, Iran, Email: e.rajabi@shahroodut.ac.ir

Abstract: In this paper, dynamic sliding mode control (DSMC) of nonlinear systems using sliding mode observer is proposed. In DSMC the chattering is removed due to the integrator (or a low pass filter) which is placed before the input control signal of the plant. However, in DSMC the augmented system (system plus the integrator) is one dimension bigger than the actual system (if the integrator is used) and then to stabilize the system, the plant model should be completely known. To solve this problem, we suggest a sliding mode observer to identify and to obtain a model for the uncertain nonlinear system and then, chattering free control signal is calculated to have desired properties. Stability of the proposed observer and controller is based on Lyapunov theorem and moreover the upper bound of the system dynamic is not used which is important in practical applications. To verify the proposed approach, Duffing-Holmes chaotic system with comparison to usual sliding mode control is used. To have a rightful comparison, we use from the same observer (the proposed sliding mode observer) in two methods. With comparison of the equations, we can see the simplicity of the usual SMC while one can also see the simple concepts of DSMC. Moreover, from equations and simulations, it is clear that in usual SMC chattering is available, while in DSMC chattering is removed completely.

Keywords: Dynamic sliding mode control, sliding mode observer, nonlinear system, Duffing-Holmes chaotic system.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۰۷/۲۷

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۲۴ و ۱۳۹۵/۰۲/۲۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۱۳

نام نویسنده مسئول: علی کرمی ملائی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - سبزوار - توحیدشهر - دانشگاه حکیم سبزواری - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر.

۱- مقدمه

کنترل سیستم‌های غیرخطی همچنان یکی از بحث‌های چالش برانگیز به‌شمار می‌رود و در این مورد پیشنهادات و مطالعات فراوانی انجام گرفته است [۱]. با این وجود اکثر آن‌ها فقط برای کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی به‌کار گرفته می‌شوند و یا دارای محدودیت‌هایی می‌باشند. به‌عنوان مثال، خطی‌سازی فیدبک فقط برای یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی است که باید شرایط خاصی را داشته باشد و به شکل همراه^۱ تبدیل شود [۱] و یا برای مثال لرزش^۲ مهم‌ترین مشکل کنترل حالت لغزشی است [۲-۳]. از ویژگی‌های کنترل حالت لغزشی، تغییرناپذیری^۳ بودن آن است که ابزاری قدرتمند در برابر عدم قطعیت‌ها، اغتشاش‌ها و نویزها است که همیشه مشکلاتی در تحقق^۴ طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های واقعی به‌وجود می‌آورد [۴]. توجه کنید که تغییرناپذیری قوی‌تر از مقاوم بودن است [۳-۵]. بزرگ‌ترین ضعف کنترل حالت لغزشی لرزش می‌باشد، نوسانات فرکانس بالا (اما محدود) با دامنه کم که در مدارات الکتریکی تلفات گرمایی تولید می‌کند و باعث از بین رفتن قطعات مکانیکی می‌شود [۳-۴]. چهار روش برای حذف و یا کاهش لرزش پیشنهاد شده است: لایه مرزی^۵ [۲]، لایه مرزی تطبیقی^۶ [۶]، مرتبه بالا^۷ [۷-۱۰] و دینامیکی^۸ [۴-۱۲]. در روش‌های لایه مرزی و لایه مرزی تطبیقی تغییرناپذیری سیستم از بین می‌رود. در روش مرتبه بالا لرزش با انتقال کلیدزنی به مشتقات بالاتر سطح لغزشی حذف می‌شود. روش‌های زیادی برای پیاده‌سازی کنترل حالت لغزشی مرتبه دو و یا مرتبه‌های بالاتر پیشنهاد شده است [۱۰-۱۷]. مشکل این روش نیاز به دانستن مشتقات مدل سیستم است که به‌عنوان مثال در حالت مرتبه دو مشتق مدل سیستم باید تخمین زده شود. در روش دینامیکی، یک انتگرال‌گیر (به‌عنوان یک فیلتر پایین‌گذر) قبل از سیستم قرار داده می‌شود تا نوسانات فرکانس بالا و لرزش ناشی از تابع علامت حذف شده و در ورودی سیستم افزوده (سیستم به‌همراه انتگرال‌گیر) ظاهر نشود [۳-۱۱]. اگرچه به‌دلیل وجود انتگرال‌گیر، مرتبه سیستم افزوده یک واحد بیشتر از مرتبه سیستم اصلی است و بنابراین برای اعمال کنترل حالت لغزشی به سیستم افزوده و تعریف سطح لغزشی، دینامیک و مدل سیستم باید مشخص و معلوم باشد [۴]. درنهایت در روش دینامیکی به مدل سیستم نیاز است اما در روش مرتبه بالا به مشتق مدل سیستم، که بیانگر ارجحیت روش دینامیکی نسبت به روش مرتبه بالا است. در کنترل حالت لغزشی دینامیکی یک انتگرال‌گیر (یا یک فیلتر پایین‌گذر) قبل از سیستم قرار می‌گیرد، که به‌صورت یک فیلتر پایین‌گذر رفتار کرده و موجب حذف لرزش می‌شود [۳-۱۱]. به‌طور کلی، طراحی کنترل حالت لغزشی دینامیکی چالش برانگیز است چون در آن بُعد سطح لغزش، بیشتر از روش‌های دیگر است، بنابراین طراحی این سطح و محاسبه آن مشکل خواهد بود.

سیستم، یکی از مهم‌ترین موضوعات است [۱۳]. در چند سال اخیر، این زمینه مطالعه، مورد توجه و تمرکز محققان قرار گرفته است. هدف از طراحی رُویتگرها، به‌دست آوردن یا تخمین حالت‌های سیستم است که قابل اندازه‌گیری نیستند و برای این طراحی، از ورودی‌های معلوم سیستم و خروجی‌های اندازه‌گیری شده‌ی آن استفاده می‌شود. اختلاف خروجی رُویتگر و خروجی سیستم اصلی به‌عنوان بخش اصلاح‌کننده به رُویتگر فیدبک می‌شود [۱۴-۱۶]. ضعف بزرگ این رُویتگرها نیاز به کران بالای عدم قطعیت‌ها و یا مدل سیستم است که در کاربردهای عملی این مقادیر در دسترس نیستند. رُویتگر حالت لغزشی به‌طور گسترده‌ای توسط محققین برای تخمین حالت‌های غیرقابل اندازه‌گیری سیستم استفاده شده است. مزیت عمده رُویتگرهای حالت لغزشی طراحی ساده و مقاوم بودن^۹ در مقابل عدم قطعیت است [۱۷]. به‌عنوان مثال در [۱۸] این رُویتگر برای تخمین عدم قطعیت در سیستم‌های مکانیکی استفاده شده است. در موارد خاصی که ممکن است طراحی کنترل‌کننده غیرممکن باشد این رُویتگر می‌تواند همه متغیرهای حالت سیستم را تخمین بزند [۱۹]. همچنین در موتور القایی شار روتور به‌طور معمول قابل اندازه‌گیری نبوده درحالی که با استفاده از این رُویتگر می‌توان شار را تخمین زد [۲۰]. ایراد اصلی این رُویتگرها نیز نیاز به کران بالای مدل سیستم و یا عدم قطعیت‌ها است.

۲- فرمول‌بندی مسئله

سیستم غیرخطی تک‌ورودی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x, t) + r \end{aligned} \quad (1)$$

که $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ بردار متغیرهای حالت قابل‌دسترس سیستم بوده و r سیگنال ورودی کنترل می‌باشد، به‌علاوه تابع $f(x)$ نامعین

است. ابتدا فیدبک حالتی به‌صورت $r = \sum_{i=1}^n a_i x_i + u$ به سیستم اعمال

شناسایی سیستم در مشخص کردن مدل دینامیکی برای یک سیستم نامعلوم و همچنین در نظارت و کنترل متغیرهای حالت

اکنون (۲) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + (u + f) \end{aligned} \quad (6)$$

به طوری که:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$A_{21}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, A_{22} = [a_n]$$

که در معادلات بالا $y_1 = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}]^T$ و $y_2 = [x_n]$ است. برای سیستم (۶) رؤیتگری به صورت زیر پیشنهاد می کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_1 &= A_{11}\hat{y}_1 + A_{12}\hat{y}_2 - A_{12}e_2 + Pe_1 \\ \dot{\hat{y}}_2 &= A_{21}\hat{y}_1 + A_{22}\hat{y}_2 + u + v \end{aligned} \quad (8)$$

که $A_{22} = [a_n]$ عددی منفی بوده ($A_{22} = [a_n] < 0$)، $e_1 = \hat{y}_1 - y_1$ ، خطای تخمین حالت دوم می باشند. اکنون معادله دینامیک خطا به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= A_{11}e_1 \\ \dot{e}_2 &= A_{21}e_1 + A_{22}e_2 + v - f \end{aligned} \quad (9)$$

که $A_{11} = A_1 + P$ بوده و ماتریس P که هم بُعد A_1 می باشد طوری انتخاب می شود که A_{11} هرwitz باشد ($A_{11} < 0$). یعنی برای هر ماتریس مثبت معین و متقارن دل خواه Q ($Q = Q^T > 0$)، یک ماتریس مثبت معین و متقارن یکتای P_1 وجود داشته باشد که در معادله لیاپانوف زیر صدق نماید ($P_1 = P_1^T > 0$) و $P_1 \in R^{(n-1) \times (n-1)}$:

$$P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 = -Q \quad (10)$$

قضیه ۱: اگر ورودی ناپیوسته v در رؤیتگر (۸) به صورت زیر انتخاب شود، آن گاه خطای تخمین رؤیتگر لغزشی به صفر همگرا می شود.

$$v = \rho \operatorname{sign}(e_2) = \begin{cases} +\rho & : e_2 > 0 \\ 0 & : e_2 = 0 \\ -\rho & : e_2 < 0 \end{cases} \quad (11)$$

می کنیم که u ورودی جدید سیستم بوده و در نتیجه این معادله را به صورت زیر می توان بیان نمود:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bf(x, t) \quad (2)$$

و:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

که a_i ها مقادیر ثابت دلخواه هستند. هدف، استفاده از کنترل حالت لغزشی دینامیکی برای محاسبه یک u صاف و مناسب است که $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$ و $\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n$ به صفر همگرا شوند.

دلیل استفاده از کنترل حالت لغزشی دینامیکی برای سیستم حلقه بسته، تغییرناپذیری و عملکرد قابل قبول و بدون لرزش آن است. توجه کنید که تغییرناپذیری یک ویژگی ذاتی کنترل حالت لغزشی است و خاصیتی قوی تر از مقاوم بودن می باشد. مقاوم بودن یعنی رسیدن به نتیجه مطلوب در بدترین شرایط و تغییرناپذیری یعنی حصول نتیجه مطلوب بدون این که سیستم تحت تأثیر نویز، اغتشاش و نامعینی قرار گیرد. سیستم مقاوم ممکن است با اثرپذیری از نویز، اغتشاش و نامعینی عملکرد مناسبی نداشته باشد در حالی که تغییرناپذیری یعنی مقاوم بودن به همراه عملکرد مطلوب. در کنترل حالت لغزشی دینامیکی نوسانات به وجود آمده، به دلیل وجود یک انتگرال گیر قبل از ورودی کنترل سیستم فیلتر می شوند و لرزش از بین خواهد رفت و در نتیجه یک سیگنال u صاف خواهیم داشت. برای رسیدن به این هدف، یک سطح لغزش مناسب به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} s &= \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ \lambda &= [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n] \end{aligned} \quad (4)$$

تذکره ۱: توجه کنید که $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$ و $\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n$ به صفر همگرا می شوند اگر s صفر شده و ضرایب $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ به صورتی باشند که $\lambda_{n+1} s^n + \lambda_n s^{n-1} + \dots + \lambda_2 s + \lambda_1 = 0$ هرwitz^{۱۱} باشد.

اما، برای محاسبه سطح (۴) یک مشکل وجود دارد. متغیر x_{n+1} در دسترس نمی باشد زیرا تابع f نامعین است. برای حل این مشکل از رؤیتگر لغزشی پیشنهاد شده در بخش بعد برای تخمین مدل f استفاده می کنیم.

۳- تخمین مدل سیستم با استفاده از رؤیتگر حالت لغزشی
فرض کنید تابع f کران دار باشد یعنی:

$$|f(x, t)| \leq \rho \quad (5)$$

۴- طراحی کنترل کننده

در این قسمت به منظور مقایسه، در قسمت اول کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی پیشنهادی ارائه شده و سپس در قسمت دوم طراحی کنترل حالت لغزشی معمولی بیان می‌شود. برای این که مقایسه به صورت کامل بیان و ارایه شود، در هر دو روش از رُویتگر (۸) استفاده می‌کنیم. با مطالعه و مقایسه معادلات بیان شده در این قسمت تفاوت دو روش مشاهده شده و اگرچه کنترل حالت لغزشی رایج و معمولی بسیار ساده بوده ولی خواننده می‌تواند سادگی فهم و طراحی کنترل حالت لغزشی دینامیکی را نیز به وضوح مشاهده نماید. دقت نماید که در هر دو روش از تابع علامت^{۱۲} استفاده شده است.

۴-۱- طراحی کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی

از معادلات (۴) و (۸) داریم:

$$s = \bar{\lambda} \hat{y}_1 + \lambda_n \hat{y}_2 + \lambda_{n+1} \dot{\hat{y}}_2 \quad (18)$$

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}]$$

اکنون مشتق این سطح را با استفاده از معادلات رُویتگر (۸) محاسبه می‌نماییم.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \bar{\lambda} \dot{\hat{y}}_1 + \lambda_n \dot{\hat{y}}_2 + \lambda_{n+1} \ddot{\hat{y}}_2 = \\ &+ \bar{\lambda} (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1) \\ &+ \lambda_n (A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v) \\ &+ \lambda_{n+1} (A_{21} \dot{\hat{y}}_1 + A_{22} \dot{\hat{y}}_2 + \dot{u} + \dot{v}) \\ &= \bar{\lambda} (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1) + \\ &+ \lambda_n (A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v) \\ &+ \lambda_{n+1} A_{21} (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1) \\ &+ \lambda_{n+1} A_{22} (A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v) \\ &+ (\lambda_{n+1} \dot{u} + \lambda_{n+1} \dot{v}) \\ &= (\bar{\lambda} + \lambda_{n+1} A_{21}) (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1) \\ &+ (\lambda_n + \lambda_{n+1} A_{22}) (A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v) \\ &+ (\lambda_{n+1} \dot{u} + \lambda_{n+1} \dot{v}) \end{aligned} \quad (19)$$

حال با توجه به معادله (۱۰):

$$\dot{v} = \begin{cases} +1 & : e_2 > 0 \\ 0 & : e_2 = 0 \\ -1 & : e_2 < 0 \end{cases} \quad (20)$$

بعلاوه برای این که \dot{s} به علامت e_2 وابسته نبوده و معادلات بعدی ساده تر باشند، \dot{v} نیز به عنوان نامعینی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با انتخاب $D = \lambda_{n+1} \dot{v}$ به عنوان نامعینی داریم:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= (\bar{\lambda} + \lambda_{n+1} A_{21}) (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1) \\ &+ (\lambda_n + \lambda_{n+1} A_{22}) (A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v) \\ &+ (\lambda_{n+1} \dot{u} + D) \end{aligned} \quad (21)$$

اثبات: تابع $V(e_1, e_2) = e_1^T P e_1 + e_2^2$ را به عنوان تابع لیاپانوف پیشنهاد می‌دهیم، مشتق زمانی این تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_1^T Q e_1 + 2e_2 A_{21} e_1 + 2A_{22} e_2^2 + 2e_2 v - 2e_2 f \\ &= -e_1^T Q e_1 + 2e_2 A_{21} e_1 + 2A_{22} e_2^2 \\ &\quad + 2e_2 \rho \text{sign}(e_2) - 2e_2 f \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -e_1^T Q e_1 + 2e_2 A_{21} e_1 + 2A_{22} e_2^2 + 2\rho |e_2| - 2|e_2| |f| \\ &\leq -e_1^T Q e_1 + 2e_2 A_{21} e_1 + 2A_{22} e_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

در رابطه بالا قرار می‌دهیم $Q = A_{21}^T Q_2^{-1} A_{21} + Q_1$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -e_1^T Q_1 e_1 - e_1^T A_{21}^T Q_2^{-1} A_{21} e_1 \\ &\quad + 2e_2 A_{21} e_1 + 2A_{22} e_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

که Q_1 ماتریسی مثبت معین و متقارن دلخواه است یعنی $Q_1 = Q_1^T > 0$ از طرفی:

$$\begin{aligned} &(e_2 - Q_2^{-1} A_{21} e_1)^T Q_2 (e_2 - Q_2^{-1} A_{21} e_1) \\ &= e_2^T Q_2 e_2 - e_1^T A_{21}^T Q_2^{-1} A_{21} e_1 \\ &\quad + e_1^T A_{21}^T Q_2^{-1} A_{21} e_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$= e_2^T Q_2 e_2 - 2e_2 A_{21} e_1 + e_1^T A_{21}^T Q_2^{-1} A_{21} e_1$$

با تعریف $\tilde{e} = (e_2 - Q_2^{-1} A_{21} e_1)$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}^T Q_2 \tilde{e} + Q_2 e_2^2 - 2e_2 A_{21} e_1 \\ &\quad + 2e_2 A_{21} e_1 + 2A_{22} e_2^2 \\ &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}^T Q_2 \tilde{e} + Q_2 e_2^2 + 2A_{22} e_2^2 \end{aligned} \quad (16)$$

با انتخاب $Q_2 = -2A_{22} > 0$ داریم:

$$\dot{V} \leq -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}^T Q_2 \tilde{e} \leq 0 \quad (17)$$

این رابطه نشان می‌دهد که (e_1, e_2) به صفر میل می‌کند یعنی $(e_1, e_2) \rightarrow 0$. به عبارت دیگر رُویتگر لغزشی پیشنهاد شده پایدار بوده و خطای آن به صفر همگرا می‌شود.

تذکر ۲: اگر در رابطه $Q = A_{21}^T Q_2^{-1} A_{21} + Q_1$ مقدار $Q_2 = -2A_{22}$ را قرار دهیم خواهیم داشت $Q = -0.5A_{21}^T A_{22}^{-1} A_{21} + Q_1$ و یا $Q_1 = Q + 0.5A_{21}^T A_{22}^{-1} A_{21}$ و بنابراین چون $A_{21}^T A_{21}$ مثبت معین بوده و $A_{22} = [a_n]$ عددی منفی است، با توجه به معادله (۱۱) درایه های ماتریس دلخواه مثبت معین Q را باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب نمود تا Q_1 نیز مثبت معین باشد. به علاوه چون $A_{21}^T A_{21}$ و Q متقارن هستند، Q_1 نیز متقارن خواهد بود.

که $k_1 = \varepsilon$ و $k_2 > 0$ است به طوری که ε یک عدد مثبت است. اثبات: تابع لیاپانوف $V = 0.5s^2$ را در نظر بگیرید و سپس، $\dot{V} = s\dot{s}$ و با جای گذاری u از معادله (۲۷) در (۲۶) داریم:

$$\dot{s} = -k_1 \text{sign}(s) - k_2 s \quad (28)$$

از این رو:

$$\dot{V} = -k_1 |s| - k_2 s^2 \leq -k_1 |s| = -\varepsilon |s| \quad (29)$$

فرض کنید t_f زمان محدود رسیدن به سطح لغزشی باشد یعنی $s(t_f) = 0$ ، به راحتی می توان نشان داد که $t_f \leq |s(0)|/\varepsilon$.

۵- شبیه سازی

مدل سیستم غیرخطی آشوبی دافینگ هلمز^{۱۳} زیر را در نظر بگیرید [۱۷]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x, t) + r \\ f(x, t) &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^3 + b_4 \cos(1.2t) \\ x &= [x_1, x_2]^T \end{aligned} \quad (30)$$

که b_2 نسبت میرایی^{۱۴}، $b_1 x_1 + b_3 x_1^3$ عبارت قابلیت بازیافت^{۱۵}، $b_4 \cos(1.2t)$ عبارت تناوب نیرو^{۱۶} و u سیگنال کنترل ورودی می باشد [۲۱]. پارامترهای سیستم آشوبی در معادله (۳۰) $b_1 = 1$ ، $b_2 = -0.2$ و $b_3 = -1$ و $b_4 = 0.32$ و $x(0) = [1, 2]^T$ انتخاب می شوند تا سیستم رفتار آشوبی داشته باشد. چون در یک سیستم آشوبی حالت های سیستم کران دار بوده و بی نهایت نمی شوند معادله (۵) نیز صادق است، این موضوع در شکل ۱ نشان داده شده است. آشوبی بودن رفتار سیستم و کران داری تابع $f(x, t)$ در این شکل دیده می شود به طوری که $|f(x, t)| \leq 6$. هر دو شبیه سازی با استفاده از نرم افزار متلب^{۱۷} و با زمان نمونه برداری ۰.۰۰۱ ثانیه انجام شده اند و در هر دو پارامترهای رؤیتگر به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$P = -1, \rho = 6 \quad (31)$$

و به علاوه:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -20 \end{bmatrix} \quad (32)$$

مثال ۱ (کنترل حالت لغزشی دینامیکی): پارامترهای کنترل کننده به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$\lambda = [0.7, 0.3, 0.1], \varepsilon = 0.2, k_2 = 5 \quad (33)$$

به علاوه شرایط اولیه رؤیتگر صفر منظور شده است و همچنین $u(0) = 0$. نتایج شبیه سازی در شکل های ۲ تا ۵ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۲ دیده می شود حالت های سیستم به صفر همگرا می شوند و حالت های رؤیتگر، حالت های سیستم را تعقیب

قضیه ۲: ورودی زیر سطح لغزشی را صفر کرده و در نتیجه با توجه به تذکر ۱، حالت های سیستم به صفر همگرا می شوند.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{(\bar{\lambda} + \lambda_{n+1} A_{21})(A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1)}{\lambda_{n+1}} \\ &\quad - \frac{(\lambda_n + \lambda_{n+1} A_{22})(A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v)}{\lambda_{n+1}} \\ &\quad - \frac{k_1 \text{sign}(s) + k_2 s}{\lambda_{n+1}} \end{aligned} \quad (22)$$

که $|D| = \lambda_{n+1}$ ، $k_1 = |D| + \varepsilon = \lambda_{n+1} + \varepsilon$ و $k_2 > 0$ است به طوری که ε یک عدد مثبت است.

اثبات: تابع لیاپانوف $V = 0.5s^2$ را در نظر بگیرید و سپس، $\dot{V} = s\dot{s}$ و با جای گذاری \dot{u} از معادله (۲۲) در (۲۱) داریم:

$$\dot{s} = -k_1 \text{sign}(s) - k_2 s + D \quad (23)$$

از این رو:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 |s| - k_2 s^2 + Ds \leq -k_1 |s| + |D| |s| \\ &= (-k_1 + \lambda_{n+1}) |s| = -\varepsilon |s| \end{aligned} \quad (24)$$

فرض کنید t_f زمان محدود رسیدن به سطح لغزشی باشد یعنی $s(t_f) = 0$ ، به راحتی می توان نشان داد که $t_f \leq |s(0)|/\varepsilon$.

تذکر ۳: برای کاهش k_1 می توان λ_{n+1} را به اندازه کافی کوچک انتخاب نمود.

تذکر ۴: با کاهش λ_{n+1} ممکن است سرعت همگرایی نیز کاهش یابد که با ضرایب دیگر سطح از قبیل $\bar{\lambda}$ و λ_n می توان سرعت همگرایی را جبران نمود.

۴-۲- طراحی کنترل کننده حالت لغزشی رایج

در این حالت سطح لغزشی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} s &= \bar{\lambda} \hat{y}_1 + \lambda_n \hat{y}_2 \\ \bar{\lambda} &= [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}] \end{aligned} \quad (25)$$

که با استفاده از معادله (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \bar{\lambda} \dot{\hat{y}}_1 + \lambda_n \dot{\hat{y}}_2 \\ &= \bar{\lambda} (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1) \\ &\quad + \lambda_n (A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + u + v) \end{aligned} \quad (26)$$

قضیه ۳: ورودی زیر سطح لغزشی (۲۵) را صفر کرده و در نتیجه حالت های سیستم به صفر همگرا می شوند.

$$\begin{aligned} u &= -(A_{21} \hat{y}_1 + A_{22} \hat{y}_2 + v) - \\ &\quad \frac{\bar{\lambda} (A_{11} \hat{y}_1 + A_{12} \hat{y}_2 - A_{12} e_2 + P e_1)}{\lambda_n} - \frac{k_1 \text{sign}(s) + k_2 s}{\lambda_n} \end{aligned} \quad (27)$$

دیده می‌شود و واضح است که رفتار سیستم حلقه بسته دیگر آشوبی نیست و حالت‌های سیستم به صفر همگرا می‌شوند. از مقایسه نتایج این دو شبیه‌سازی که در هر دو از یک روتینگر استفاده شده و پارامترهای شبیه‌سازی در هر دو یکسان بوده‌اند، برتری روش دینامیکی پیشنهاد شده و توانایی آن در حذف لرزش به‌وضوح مشاهده می‌شود. این موضوع را می‌توان از مقایسه شکل‌های ۴ و ۸ به‌وضوح مشاهده نمود. دقت نمایید که در بقیه موارد رفتار دو کنترل‌کننده بسیار شبیه و نزدیک هم است.

۶- نتیجه‌گیری

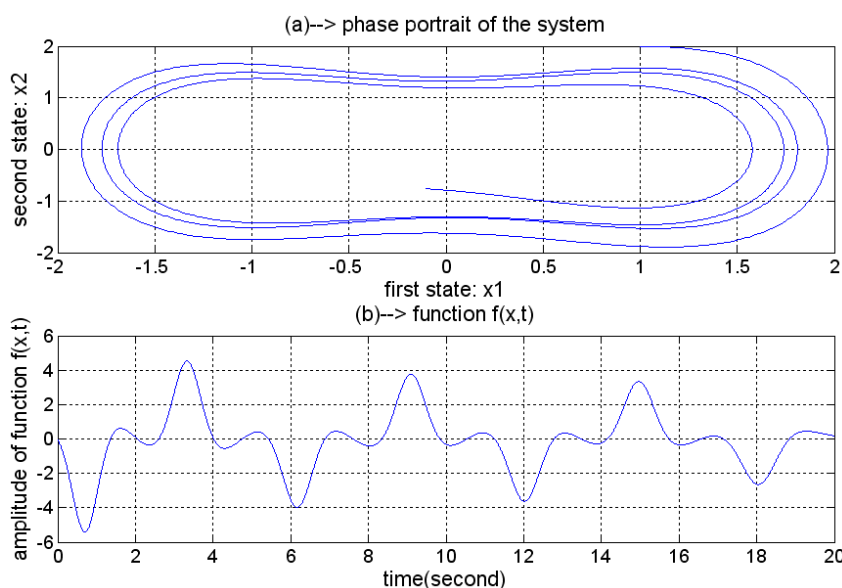
در این مقاله، روشی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی بر اساس کنترل حالت لغزشی دینامیکی مطرح شده و برای کنترل سیستم آشوبی دافینگ هلمز به‌کار گرفته شد. با استفاده از کنترل حالت لغزشی دینامیکی، لرزش حذف می‌شود. برای حل مشکل کنترل حالت لغزشی دینامیکی از روتینگر پیشنهادی حالت لغزشی استفاده شده است. یکی از مزایای روتینگر پیشنهادی این است که در آن، مدل سیستم نامعین فرض می‌شود و در ضمن، این روش همه ویژگی‌های کنترل حالت لغزشی مثل تغییرناپذیری و سادگی در طراحی را دارد. به‌علاوه از کران نامعینی استفاده نمی‌شود که در کاربردهای عملی مهم است. نتایج شبیه‌سازی و مقایسه انجام شده کارایی این روش را نشان می‌دهد.

می‌نمایند. لازم به یادآوری است که کنترل‌کننده براساس حالت‌های روتینگر طراحی شده است. شکل ۳ خطای تعقیب را نشان می‌دهد که بسیار نزدیک به صفر است. در شکل ۴ سیگنال ورودی سیستم نشان داده شده است که بدون نوسان و صاف است. توجه نمایید که نوسانات و دامنه بزرگ مشتق سیگنال ورودی اهمیتی ندارد زیرا این سیگنال قبل از انتگرال‌گیر بوده و به سیستم اعمال نمی‌شود. سطح لغزشی نیز در شکل ۵ نشان داده شده که صفر شده است. در همین شکل منحنی حالت اول برحسب حالت دوم دیده می‌شود و واضح است که رفتار سیستم حلقه بسته دیگر آشوبی نیست و حالت‌های سیستم به صفر همگرا می‌شوند.

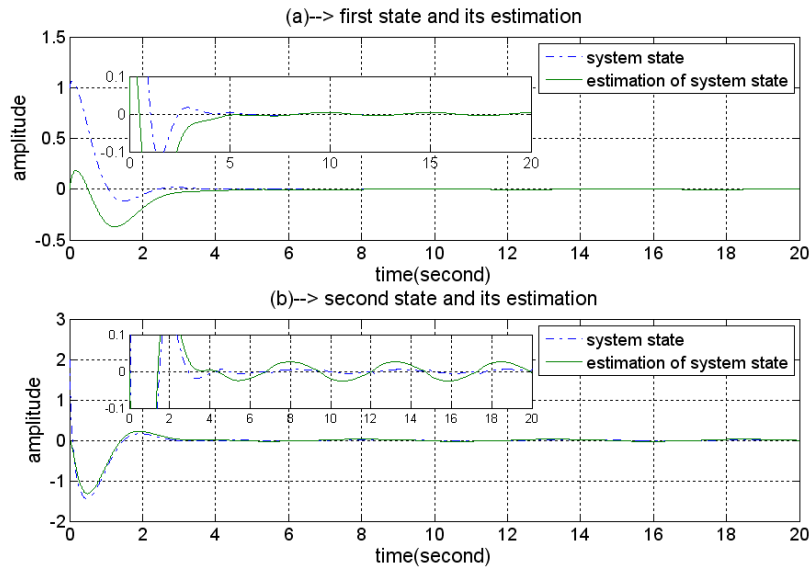
مثال ۲ (کنترل حالت لغزشی رایج): به‌منظور ارائه یک مقایسه صحیح پارامترهای کنترل‌کننده مانند مثال قبل و به‌صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\lambda = [0.7, 0.3], \varepsilon = 0.2, k_2 = 5 \quad (34)$$

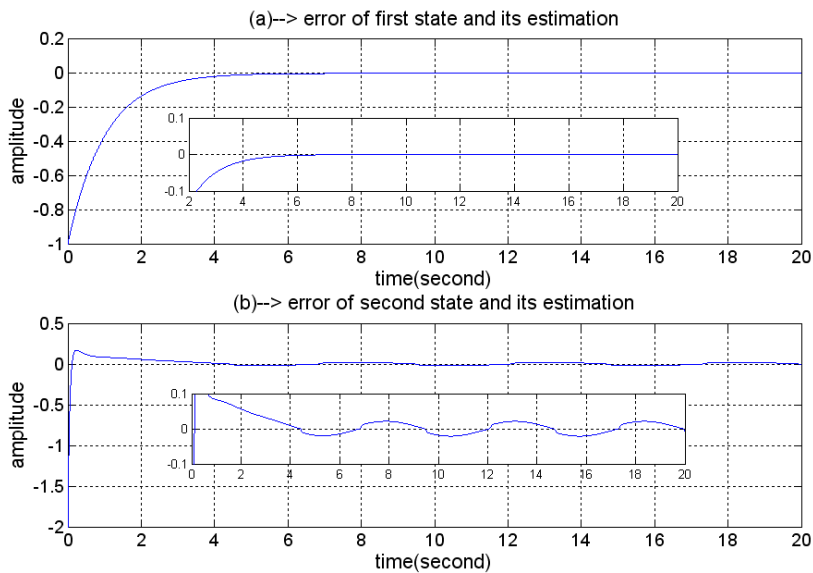
به‌علاوه شرایط اولیه روتینگر صفر منظور شده است. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۶ تا ۹ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود حالت‌های سیستم به صفر همگرا می‌شوند و حالت‌های روتینگر، حالت‌های سیستم را تعقیب می‌نمایند. شکل ۷ خطای تعقیب را نشان می‌دهد که باز هم بسیار نزدیک به صفر است. در شکل ۸ سیگنال ورودی سیستم نشان داده شده است که دارای لرزش بوده و به سیستم اعمال می‌شود. سطح لغزشی در شکل ۹ نشان داده شده که صفر شده است. در همین شکل منحنی حالت اول برحسب حالت دوم



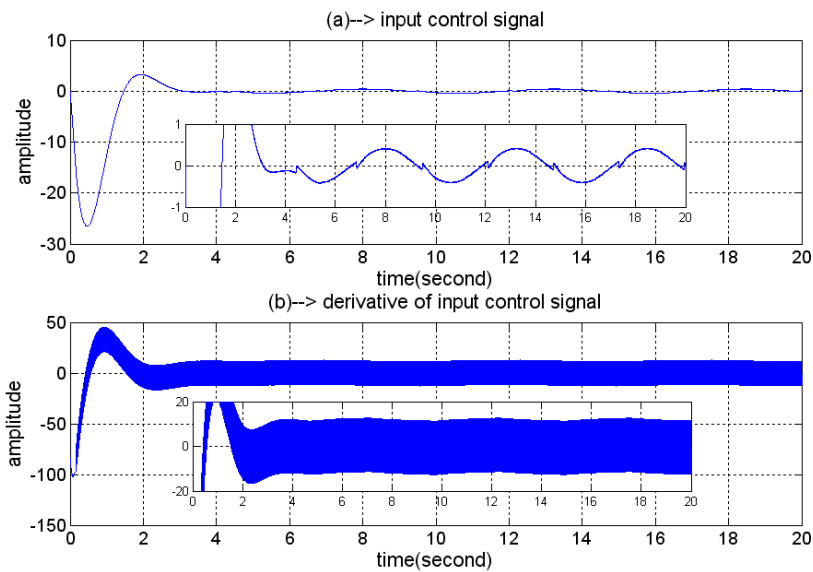
شکل ۱: رفتار آشوبی سیستم و کران‌داری تابع $f(x,t)$



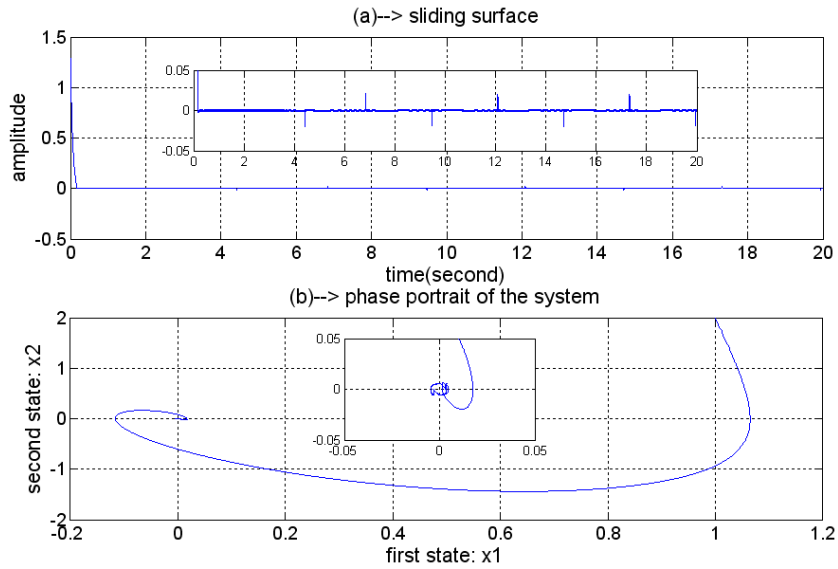
شکل ۲: همگرایی حالت‌های سیستم به صفر در مثال ۱ (کنترل حالت لغزشی دینامیکی)



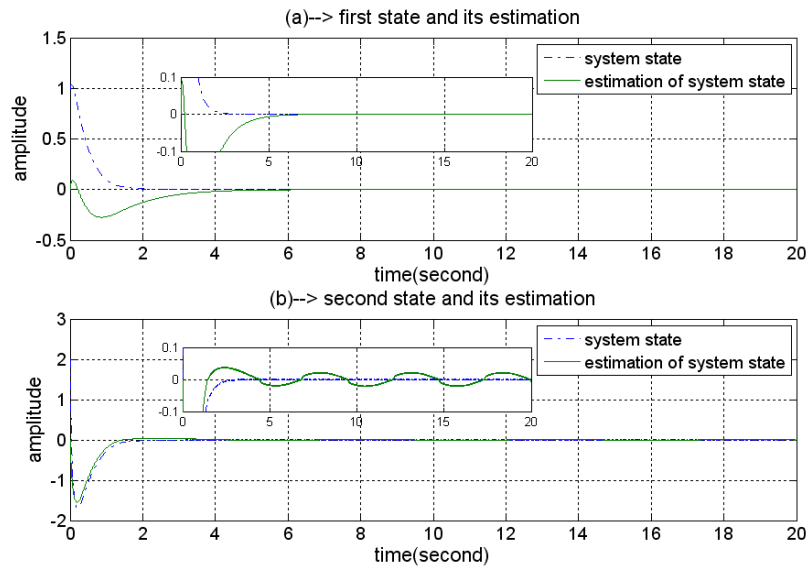
شکل ۳: خطای همگرایی حالت‌های رُیتگر و سیستم در مثال ۱ (کنترل حالت لغزشی دینامیکی)



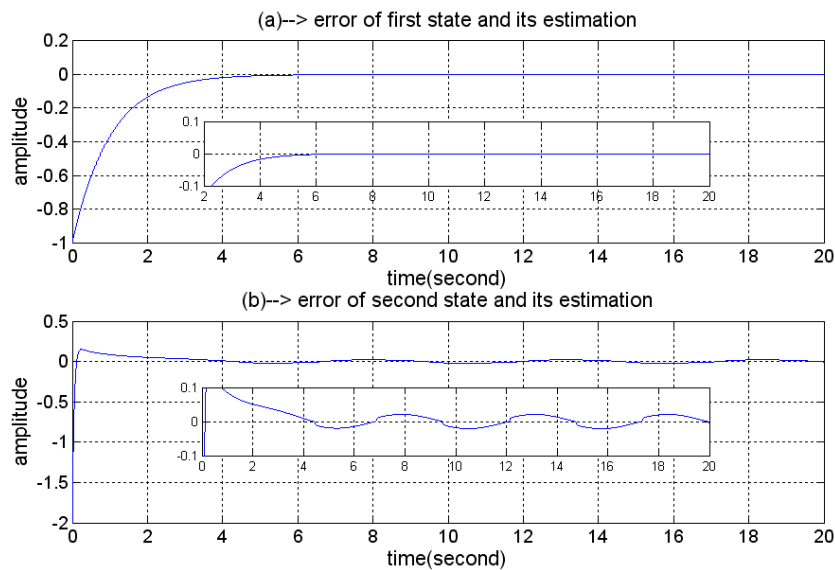
شکل ۴: سیگنال ورودی سیستم و مشتق آن در مثال ۱ (کنترل حالت لغزشی دینامیکی)



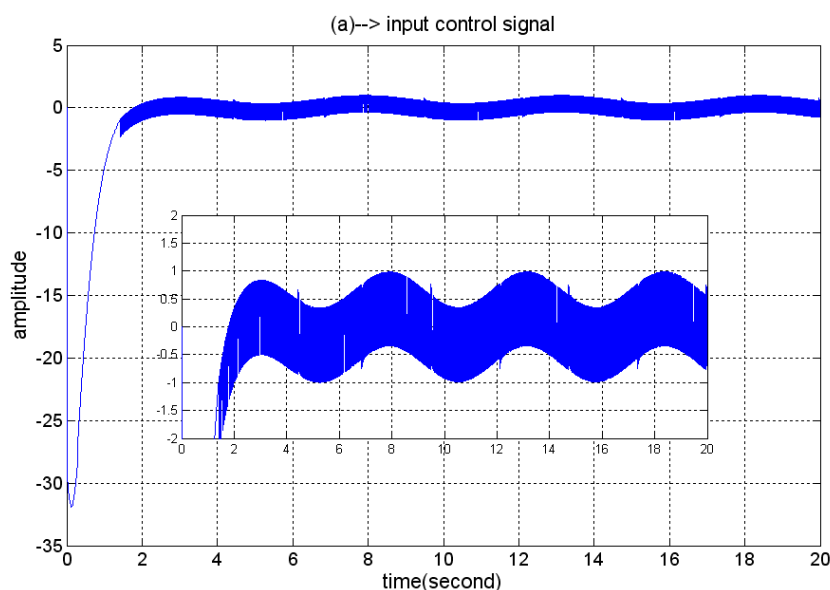
شکل ۵: سطح لغزشی و رفتار غیر آشوبی سیستم در مثال ۱ (کنترل حالت لغزشی دینامیکی)



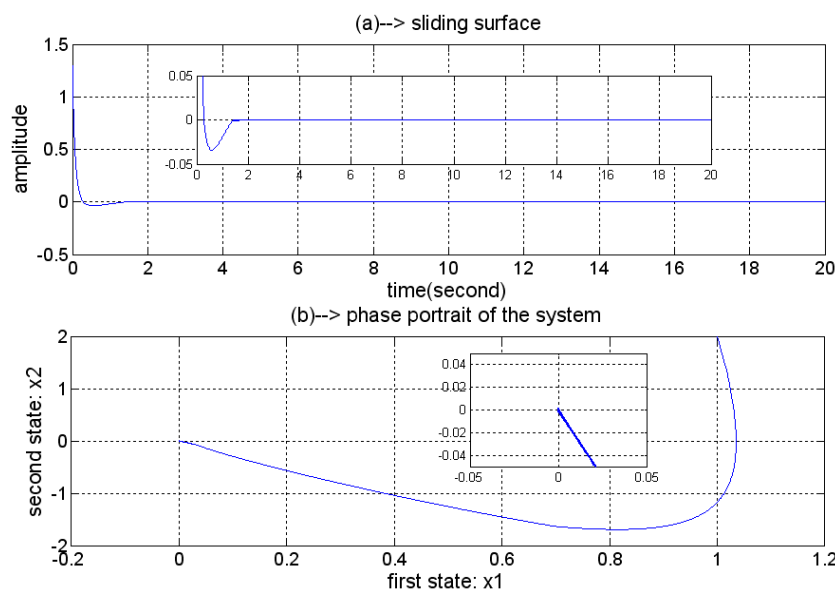
شکل ۶: همگرایی حالت‌های سیستم به صفر در مثال ۲ (کنترل حالت لغزشی رایج)



شکل ۷: خطای همگرایی حالت‌های رؤیتگر و سیستم در مثال ۲ (کنترل حالت لغزشی رایج)



شکل ۸: سیگنال ورودی سیستم و مشتق آن در مثال ۲ (کنترل حالت لغزشی رایج)



شکل ۹: سطح لغزشی و رفتار غیرآشوبی سیستم در مثال ۲ (کنترل حالت لغزشی رایج)

مراجع

- [1] J. J. E. Slotine, and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [2] H. Lee, and V. I. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems," *Elsevier, Annual Review in Control*, vol. 31, pp. 179-188, 2007.
- [3] سارا صابریان بروجنی و غلامرضا عرب مارکده، «کنترل سرعت و شار موتور سنکرون رلوکتانسی با استفاده از کنترل لغزشی مرتبه دوم به روش فوق پیچشی و قانون توصیفی تغییرات»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۵، شماره ۲، صفحات ۷۲-۹۷، ۱۳۹۴.
- [4] A. Karami-Mollaei, N. Pariz, and H. M. Shanechi, "Position control of servomotors using neural dynamic sliding mode," *Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineering), Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 133, no. 6, pp. 141-150, 2011.
- [5] W. Perruquetti, and J. Pierre-Barbot, *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, 2002.
- [6] M. S. Chen, Y. R. Hwang, and M. Tomizuka, "A state-dependent boundary layer design for sliding mode control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 47, no. 10, pp. 1677-1681, 2000.
- [7] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *Wiley, International Journal of Control*, vol. 58, pp. 1247-1263, 1993.
- [8] A. Levant, "Homogeneity approach to high order sliding mode design," *Elsevier, Automatica*, vol. 41, pp. 823-830, 2005.
- [9] A. Levant, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control," *Wiley, International Journal of Control*, vol. 76, pp. 924-941, 2003.

- [16] Y. Y. Xia, Z. Zhu, and M. Fu, "Back-stepping sliding mode control for missile systems based on an extended state observer," *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, no. 1, pp. 93-102, 2011.
- [17] Q. R. Butt, A. I. Bhatti, M. R. Mufti, M. A. Rizvi, and I. Awan, "Modeling and online parameter estimation of intake manifold in gasoline engines using sliding mode observer," *Elsevier, Simulation Modeling Practice and Theory*, vol. 32, pp. 138-154, 2013.
- [18] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "Second-order sliding-mode observer for mechanical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1785-1789, 2005.
- [19] Y. Xiong, and M. Saif, "Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 2012-2017, 2001.
- [20] A. Benchaib, A. Rachid, E. Audrezet, and M. Tadjine, "Real-time sliding-mode observer and control of an induction motor," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 46, no. 1, pp. 128-138, 1999.
- [21] M. K. Sifakis, and S. J. Elliott, "Adaptive tracking control of Duffing-Holmes chaotic systems with uncertainty," *The 5th International Conference on Computer Science and Education*, Hefei, China, pp. 1193-1197, 2010.
- [10] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering avoidance by second-order sliding mode control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 241-246, 1998.
- [11] M. Chen, C. Chen, and F. Yang, "An LTR-observer-based dynamic sliding mode control for chattering reduction," *Elsevier, Automatica*, vol. 43, no. 6, pp. 1111-1116, 2007.
- [۱۲] علی کرمی ملانی، «طراحی کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی برای سیستم تعلیق فعال»، مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تربیت مدرس، جلد ۱۶، شماره ۲، صفحات ۵۱-۵۸، ۱۳۹۵.
- [13] W. Ren, and P. R. Kumar, "Stochastic adaptive prediction and model reference control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 2047-2060, 1994.
- [14] S. Solvar, V. Le, M. Ghanes, J. P. Barbot, and G. Santomenna, "Sensor less second order sliding mode observer for induction motor," *IEEE International Conference In Control Applications (CCA)*, pp. 1933-1938, 2010.
- [15] Y. T. Liu, T. T. Kung, K. M. Chang, and S. Y. Chen, "Observer-based adaptive sliding mode control for pneumatic servo system," *Elsevier, Precision Engineering*, vol. 37, pp. 522-530, 2013.

زیرنویس‌ها

1. Companion
2. Chattering
3. Invariance
4. Implementation
5. Boundary Layer
6. Adaptive Boundary Layer
7. Higher Order SMC or HOSMC
8. Dynamic SMC or DSMC
9. Robustness
10. Performance
11. Hurwitz
12. Sign Function
13. Duffing-Holmes
14. Damping Ratio
15. Recoverability Term
16. Force Period
17. MATLAB