

ردیابی مقید مبتنی بر کنترل کننده پیش بین با هزینه محاسباتی کم: رویکرد برنامه ریزی پارامتری

فرهاد بیات^۱، استادیار، صالح مبین^۲، استادیار

۱- دانشکده مهندسی - دانشگاه زنجان - زنجان - ایران - bayat.farhad@znu.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی - دانشگاه زنجان - زنجان - ایران - mobayen@znu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، مسئله ردیابی خروجی در سیستم های خطی مقید با دینامیک سریع مورد توجه قرار گرفته است. فرض شده است که سیستم مورد نظر دارای محدودیت هایی بر روی بردار حالت و بردار ورودی کنترلی بوده و سیگنال مرجع دارای ماهیت تکه ای ثابت است. بر این اساس، یک کنترل کننده ساده مبتنی بر تحلیل عملکردی سیستم حلقه بسته به منظور ردیابی سیگنال مرجع در حضور این محدودیت ها ارائه شده است. سپس، امکان پذیری و پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته برای روش پیشنهادی نشان داده شده است. همچنین با تطبیق روش پیشنهادی و فرمول بندی مسئله در قالب مسئله کنترل پیش بین، پاسخ بهینه مربوط به پارامترهای طراحی با استفاده از ابزار برنامه ریزی چند پارامتری به صورت صریح استخراج شده است. بر اساس تحلیل های ارائه شده و نتایج به دست آمده مشاهده می شود که روش پیشنهادی به ویژه در کاربردهایی که سیگنال مرجع ثابت و از قبل مشخص است، به صورت کارآمدی قابل اعمال است. با این وجود، برای کاربردهای دیگر که سیگنال مرجع از قبل معلوم و ثابت نیست نیز راهکار مشخصی ارائه و امکان پذیری قانون کنترل تحت شرایط ساده ای تضمین شده است.

واژه های کلیدی: مسئله ردیابی خروجی، کنترل پیش بین مقید، برنامه ریزی پارامتری.

Low-Complexity Constrained Model Predictive Tracking Control: Parametric Programming Approach

F. Bayat, Assistant Professor¹, S. Mobayen, Assistant Professor²

1- Faculty of Engineering Department, University of Zanjan, Zanjan, Iran, Email: bayat.farhad@znu.ac.ir

2- Faculty of Engineering Department, University of Zanjan, Zanjan, Iran, Email: mobayen@znu.ac.ir

Abstract: In this paper, the constrained output tracking problem for linear systems with fast dynamics is addressed. It is assumed that the system is subject to input/state constraints and the reference signal is piecewise constant. Based upon the closed-loop control behavior, a simple controller is designed and it is shown that the proposed architecture guarantees the feasibility and asymptotic stability of the closed-loop system. Adapting and formulating the proposed controller as a model predictive control problem, an explicit optimal solution is obtained for the proposed controller. It is shown that the proposed approach can be effectively applied when the reference signal takes only some finite predefined values. However, non-predefined references are also handled and it is guaranteed to be feasible under some mild assumptions.

Keywords: Output tracking problem, constrained model predictive control, parametric programming.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۴/۷/۱۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۹۴/۱۰/۱۰ و ۹۴/۱۱/۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۴/۱۲/۱۱

نام نویسنده مسئول: فرهاد بیات

نشانی نویسنده مسئول: ایران - زنجان - کیلومتر ۵ جاده قدیم تبریز - دانشگاه زنجان - دانشکده مهندسی برق.

۱- مقدمه

مسئله ردیابی خروجی در کنترل دارای کاربردهای بسیار گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف است که از آن جمله می‌توان سیستم‌های سرو، رباتیک، سامانه‌های فضایی و پرنده و نیز صنایع پالایشگاهی را نام برد. به‌واسطه اهمیت موضوع و وسعت کاربرد آن، تحقیقات و سنجی در این زمینه به انجام رسیده است. مسئله ردیابی برای سیستم‌های خطی از دیدگاه‌های مختلفی مورد بررسی جامع قرار گرفته و تئوری‌های مربوط به آن به‌صورت مناسبی توسعه یافته‌اند. به‌عنوان مثال روش کنترل مقاوم در [۱] ارائه شده است. در [۲]، این مسئله با بهره‌گیری از رویکرد LQG همراه با روش بازبایی حلقه (LTR) مورد بررسی قرار گرفته است. روش کنترل تطبیقی در [۳] برای حل مسئله ردیابی خروجی پیشنهاد شده است. در مراجع [۴، ۵]، از روش‌های کنترل هوشمند برای حل مسئله استفاده شده است. در [۶] از روش کنترل پیش‌بین برای حل مسئله ردیابی غیرمقید بهره گرفته شده است. با وجود تحقیقات گسترده در این زمینه، نتایج و گزارش‌های اندکی در زمینه مسئله ردیابی خروجی با در نظر گرفتن محدودیت‌های سیستم در روال طراحی برای دستیابی به یک کنترل کننده پایدار ساز در دسترس است [۷-۱۰]. از جمله نخستین کارهای ارائه شده در این زمینه روشی به نام تنظیم کننده فرمان است [۱۱]. در این روش به‌منظور تضمین همگرایی خروجی سیستم به سیگنال مرجع و نیز تضمین محدودیت‌ها از یک فیلتر غیرخطی استفاده شده است. در مرجع [۱۲]، از یک روش درون‌بایی برای کنترل سیستم مقید استفاده شده است. با معرفی مفهوم حالت ماندگار و ورودی ماندگار مصنوعی و بهره‌گیری از آن به‌عنوان متغیرهای تصمیم‌گیری، راه‌حلی برای مسئله ردیابی خروجی به ازای سیگنال‌های مرجع تکه‌ای ثابت در [۷] ارائه شده است. همچنین عملکرد حلقه بسته روش ارائه شده در [۷] در مقاله دیگری مورد بررسی قرار گرفته است [۸]. روش‌های ردیابی غیرخطی مبتنی بر تئوری لیاپانوف با کاربرد در ربات‌های متحرک در [۱۳] ارائه شده است.

تضمین برآورده شدن قیدها و محدودیت‌ها در یک سیستم کنترل حلقه بسته از اهمیت بالایی در کاربرد‌های واقعی برخوردار است، به‌طوری که نقض برخی از محدودیت‌ها (مثلاً محدودیت فشار یا دما در یک نیروگاه اتمی را تصور کنید!) می‌تواند خسارات جبران‌ناپذیری را به همراه داشته باشد. بنابراین، در مقاله حاضر از روش کنترل پیش‌بین به‌واسطه توانایی آن در لحاظ کردن قیدها و محدودیت‌های سیستم در روال طراحی و امکان دستیابی به کنترل کننده‌ای با تضمین امکان‌پذیری و پایدارسازی حلقه بسته، بهره خواهیم برد. البته روش کنترل پیش‌بین نیز دارای محدودیت‌هایی است که به مهم‌ترین محدودیت‌های این روش در دو بخش می‌توان اشاره نمود [۱۴]. محدودیت اول مربوط به هزینه محاسباتی بالای این روش حتی در مورد سیستم‌های خطی است و دلیل آن لزوم حل یک مسئله بهینه‌سازی مقید در هر لحظه نمونه‌برداری است. محدودیت دوم مربوط است به مسئله مقاوم بودن سیستم حلقه بسته در شرایط وجود اغتشاش و عدم

قطعیت مدل در سیستم. در این مقاله، محدودیت اول (یعنی پیچیدگی محاسباتی) مورد نظر قرار گرفته و راهکاری برای تعدیل آن ارائه می‌شود (برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص محدودیت دوم و راهکارهای برخورد با آن به مراجع [۲۰-۱۵] مراجعه شود). لازم به ذکر است که عمده‌ی تحقیقات موجود در خصوص مسئله کاهش پیچیدگی کنترل پیش‌بین، به ارائه روش‌های بهینه‌سازی عددی سریع می‌پردازند (مرجع [۲۱] را ببینید). برخلاف روش‌های عددی، در [۲۲-۲۴] رویکرد متفاوتی با بهره‌گیری از ابزار برنامه‌ریزی چندپارامتری ارائه شده است که تحت عنوان کنترل پیش‌بین صریح (eMPC) شناخته می‌شود. با این روش، امکان بهره‌گیری از ایده کنترل پیش‌بین برای سیستم‌هایی با دینامیک سریع فراهم خواهد شد [۲۷-۲۵]. در این مقاله با بهره‌گیری از نتایج مراجع مذکور و تطبیق ساختار کنترلی پیشنهادی به مسئله قابل حل توسط ابزار برنامه‌ریزی چندپارامتری، روشی برای حل بهینه مسئله مورد نظر ارائه می‌شود. بر این اساس، نوآوری‌های قابل ذکر در مقاله حاضر را می‌توان بدین صورت خلاصه نمود. نخست، یک ساختار ترکیبی برای دستیابی به سه هدف مهم یعنی پایدارسازی، ردیابی و امکان‌پذیری (تضمین قیدها) پیشنهاد شده است. سپس با فرمول‌بندی و تطبیق مسئله مورد نظر به ساختاری که قابل حل توسط ابزار برنامه‌ریزی چندپارامتری باشد، پاسخ بهینه با تکیه به نتایج ارائه شده در [۲۲] به‌صورت صریح حاصل شده است. اهمیت دستیابی به پاسخ بهینه صریح علاوه بر آنکه لزوم حل مسئله بهینه‌سازی در هر لحظه نمونه‌برداری را از بین خواهد برد، آن است که امکان تحلیل رفتار سیستم حلقه بسته در حضور محدودیت‌ها و دستیابی به درک عمیق‌تری از عملکرد سیستم در ردیابی سیگنال مرجع را فراهم می‌کند.

سازمان‌دهی مقاله بدین صورت است که در بخش ۲ مسئله ردیابی مقید بیان و فرمول‌بندی شده است. حل مسئله مورد نظر با تکیه بر روش کنترل پیش‌بین و ارائه نتایج اساسی مقاله در بخش ۳ آمده است. در ادامه، نتایج شبیه‌سازی در بخش ۴ ارائه شده‌اند.

۲- فرمول‌بندی مسئله ردیابی مقید

یک سیستم زمان گسسته LTI و مقید شامل محدودیت‌های بردار حالت و بردار ورودی را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1)$$

$$x(k) \in X \subset R^n, \quad u(k) \in U \subset R^m \quad (2)$$

که در آن $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^m$ و $y(k) \in R^m$ به ترتیب معرف بردارهای حالت، ورودی و خروجی سیستم می‌باشند. X و U مجموعه‌های چندوجهی فشرده شامل مبدأ مختصات می‌باشند.

فرض ۱: در ادامه فرض می‌شود زوج مرتب (A, B) کنترل‌پذیر بوده و ردیف‌های ماتریس C مستقل خطی می‌باشند، یا به‌صورت معادل [۱۲]:

$$\text{rank} \left(\Pi = \begin{bmatrix} I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + m$$

$$\begin{aligned} u(k+1) &= -K_1 x(k+1) + K_2 S(k+1) + u_c(k+1) \\ &= (K_1 - K_1 A - K_2 C A) x(k) + K_2 r(k+1) + \\ &\quad (I_m - K_1 B - K_2 C B) u(k) + \Delta u_c(k+1) \end{aligned} \quad (5)$$

در آن $K_2 S(k) = u(k)$ و $K_2 S(k+1) = K_2 S(k) + K_2 e(k+1)$ و $K_1 x(k) - u_c(k)$ می‌باشند. سپس، با ترکیب روابط (۱) و (۵) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ K_2 \end{bmatrix} r(k+1) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \Delta u_c(k+1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$y(k) = [C \ 0_{m \times 1}] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$ که $\Gamma_2 = I_m - K_1 B - K_2 C B$ و $\Gamma_1 = K_1 - K_1 A - K_2 C A$ می‌باشند. اگر پارامترهای کنترلی به فرم مناسبی طراحی شده باشند به نحوی که سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی باشد، آنگاه متغیرهای $x(k)$ ، $u(k)$ و $S(k)$ به ترتیب به مقادیر نهایی خود، یعنی x_∞ ، u_∞ و S_∞ همگرا خواهند شد. با در نظر گرفتن سیگنال مرجع مشخصی به فرم $r(k) = r$ ، معادلات حالت نهایی (۶) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ K_2 r + \Delta u_c(\infty) \end{bmatrix} \quad (7)$$

تعریف ۱. (مجموعه امکان پذیر X_f) (۲۸)

مجموعه امکان پذیر $X_f \subseteq R^n$ ، مجموعه ای است متشکل از کلیه حالت های $x(k) \in R^n$ که به ازای آن مسئله مقید توصیف شده توسط روابط (۱) و (۲) امکان پذیر است. به عبارت دیگر:

$$X_f = \{x \in R^n \mid \exists u(x(k)) \in U, x(k) \in X\} \quad (8)$$

تعریف ۲: (بزرگ ترین مجموعه LQR تغییرناپذیر Ω_∞) (۲۸)

در سیستم LTI توصیف شده توسط (۱) و به ازای قانون کنترل LQR به فرم $u(k) = -Kx(k)$ ، بزرگ ترین مجموعه LQR تغییرناپذیر $\Omega_\infty \subseteq R^n$ مجموعه ای است شامل تمام حالت هایی که به ازای آن قیدهای تعریف شده در (۲) برای تمام زمان ها برآورده می‌شوند:

$$\Omega_\infty = \left\{ x_0 \in R^n \mid \begin{aligned} &x(k) \in X, u(k) \in U, \\ &(A - BK)x(k) \in X, \forall k \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

تذکر ۱: در صورتی که سیستم مورد نظر غیر مقید باشد و زوج مرتب (A, B) کنترل پذیر باشد، در این صورت خواهیم داشت $u_c(k) = 0, \forall k = 1, 2, \dots$ و در نتیجه همواره امکان طراحی پارامترهای K_1 و K_2 برای دستیابی به اهداف مطلوب وجود خواهد داشت (مثلاً) با استفاده از روش طراحی LQR. در غیر این صورت (یعنی مقید بودن سیستم)، ممکن است شرایط به گونه ای باشد که نتوان هیچ قانون کنترلی برای دستیابی به اهداف مورد نظر تعیین کرد. این مفهوم با نام مسئله امکان پذیری شناخته می‌شود (برای مثال تعریف ۱ را در شرایطی که $X_f = \emptyset$ یا $x_0 \notin X_f$ تصور کنید). این مسئله به صورت گسترده ای

لم ۱: برقرار بودن فرض ۱، معکوس پذیری ماتریس های $(I - A)$ و $(C(I - A)^{-1}B)$ را تضمین می‌کند.

اثبات: از فرض ۱ ردیف های ماتریس C مستقل خطی می‌باشند، بنابراین برای آنکه ماتریس Π رتبه کامل باشد $(rank(\Pi) = n + m)$ باید ماتریس $(I - A)$ رتبه کامل باشد، یعنی $rank(I - A) = n$. به عبارت دیگر $(I - A)$ معکوس پذیر خواهد بود. از طرفی رتبه کامل بودن Π معرف معکوس پذیری آن است. بنابراین از لم معکوس ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} W_1 + W_1 B W_2 C W_1 & -W_1 B W_2 \\ -W_2 C W_1 & W_2 \end{bmatrix}$$

که $W_1 = (I - A)^{-1}$ و $W_2 = -(C(I - A)^{-1}B)^{-1}$ می‌باشند.

معکوس پذیری W_1 و W_2 نتیجه مورد انتظار را بیان می‌کنند.

۲-۱- ساختار کنترل کننده

مهم ترین اهداف کنترلی در ساختار سیستم مورد نظر عبارت اند از پایدارسازی سیستم حلقه بسته، ردیابی دقیق سیگنال مرجع (بدون خطا) و تضمین برآورده شدن قیدها و محدودیت های سیستم تحت کنترل. در همین راستا و به منظور دستیابی به اهداف اشاره شده فرض می‌کنیم قانون کنترل پیشنهادی از ترکیب سه قانون کنترل مجزا به صورت زیر تشکیل شده است:

$$u(k) = u_{stab}(k) + u_{track}(k) + u_{constraint}(k) \quad (3)$$

که در آن $u_{stab}(k) = -K_1 x(k)$ بوده و نقش آن مشابه با کنترل کننده فیدبک حالت استاندارد برای سیستم های خطی غیر مقید است. به عبارت دیگر، مأموریت پایدارسازی سیستم حلقه بسته با فرض عدم وجود محدودیت در سیستم توسط این بخش از قانون کنترل انجام خواهد شد. از طرف دیگر، دستیابی به هدف ردیابی بدون خطای ماندگار توسط بخش $u_{track}(k)$ انجام می‌شود. برای این منظور، با در نظر گرفتن سیگنال خطای ردیابی $e(k) = r(k) - y(k)$ و بهره گیری از ایده کنترل انتگرالی، متغیر جدید $S(k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(k) = S(k-1) + e(k). \quad (4)$$

بر این اساس، $u_{track}(k) = K_2 S(k)$ به منظور تحقق رفتار کنترل انتگرالی و دستیابی به هدف ردیابی دقیق در سیستم بدون قید تعریف می‌شود. نهایتاً، به منظور تضمین برآورده شدن قیدها و جلوگیری از نقض محدودیت های تعریف شده برای سیستم مورد نظر، بخش نهایی کنترل کننده به صورت $u_{constraint}(k) = u_c(k)$ تعریف می‌شود. شایان ذکر است که K_1 ، K_2 و u_c معرف پارامترهای طراحی در ساختار پیشنهادی می‌باشند و در ادامه شرایط و روند طراحی آن برای اینکه اهداف تعیین شده را برآورده کنند، ارائه خواهد شد. با در نظر گرفتن سیستم توصیف شده توسط رابطه (۱)، محدودیت های ارائه شده در (۲) و قانون کنترل پیشنهاد شده در رابطه (۳) داریم:

لازم به ذکر است که قضیه ۱ با فرض امکان پذیری سیستم، تضمین کننده دستیابی به ویژگی ردیابی مجانبی سیگنال مرجع تکه ای ثابت در سیستم مورد نظر است. به عبارت دیگر، در صورتی که پارامترهای مناسب K_1, K_2 و u_c وجود داشته باشند و به ازای آن سیستم (۱۰) و به تبع آن سیستم (۶) پایدار سازی شده و کلیه محدودیت های مورد نظر برآورده شوند، آنگاه ردیابی سیگنال مرجع توسط قضیه ۱ تضمین می شود. در بخش آینده، روند طراحی پارامترهای مناسب K_1, K_2 و u_c برای تضمین اهداف فوق با بهره گیری از رویکرد کنترل پیش بین ارائه می شود.

۳- حل مسئله ردیابی مقید با رویکرد کنترل پیش بین

در این بخش به اختصار کلیات مربوط به تئوری کنترل پیش بین صریح (eMPC) را بیان می کنیم. سپس با تطبیق مسئله مورد نظر و بهره گیری از ویژگی های روش eMPC، پایداری و امکان پذیری رویکرد پیشنهادی را پی خواهیم گرفت. در روش کنترل پیش بین برخط، مسئله بهینه سازی زیر به صورت مکرر در هر زمان نمونه برداری حل می شود:

$$J_N^*(x_0) = \min_U \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) + x_N^T Q_f x_N \quad (16)$$

$$s.t. \quad x_k \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$u_k \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \forall k \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x(0) = x_0,$$

$$Q = Q^T \geq 0, Q_f = Q_f^T \geq 0, R = R^T > 0$$

که در آن، $U = [u_0^T, \dots, u_{N-1}^T]^T$ متغیر بهینه سازی، N معرف افق پیش بینی و Q, R و Q_f ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب می باشند (برای جزئیات بیشتر [۲۲] را ببینید). هر چند نرم افزارها و روش های کارآمد بسیاری مانند بهینه سازی های QP/LP برای حل چنین مسائلی ارائه شده اند، با این وجود پیچیدگی های محاسباتی در سیستم هایی با دینامیک سریع می تواند همچنان مشکل ساز باشد. در سال های اخیر، با بهره گیری از ابزار برنامه ریزی چند پارامتری مرتبه دو (mpQP)، راهکاری برای برخورد با چنین مواردی ارائه شده است. با این روش، پاسخ مسئله بهینه سازی فوق به صورت یک تابع تکه ای شبه خطی (PWA) در فضای پارامتر تعیین می شود که بر روی مجموعه ای از نواحی چندوجهی محدب (P_ℓ) تعریف شده است. در نهایت، حل مسئله بهینه سازی با یک مسئله ارزیابی تابع PWA شامل تعیین ناحیه چندوجهی فعال جایگزین می شود (برای جزئیات بیشتر [۳۱-۲۷] را ببینید). در این راستا با جایگزین نمودن عبارت زیر بازنویسی می شود:

$$J_N^*(x_0) = \min_U \left\{ x_0^T Y x_0 + x_0^T F U + \frac{1}{2} U^T H U \right\} \quad (17)$$

$$s.t. \quad \mathbf{G}U \leq \mathbf{W} + \mathbf{E}x_0$$

$$x_0 \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n, U \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^s$$

در مراجع مختلف مورد بررسی قرار گرفته است [۲۹]. تأکید می شود که در ادامه این مقاله فرض بر آن است که مسئله مورد بحث امکان پذیر است.

تذکر ۲: در مرجع [۳۰] نشان داده شده است که مجموعه Ω_∞ یک مجموعه تغییرناپذیری است که دربرگیرنده یک همسایگی باز از مبدأ مختصات است. به عبارت دیگر، مبدأ مختصات داخل مجموعه $\Omega_\infty \subseteq \mathbb{R}^n$ (و نه در مرز آن) واقع شده است.

نتیجه ۱: در صورتی که سیستم (۶) با طراحی مناسب پارامترها پایدار سازی شده باشد (روش طراحی مناسب پارامترها در بخش بعد آمده است)، آنگاه به ازای کلیه $x(k) \in \Omega_\infty$ داریم $\Delta u_c(k) = 0$. در نتیجه با توجه به اینکه $x_\infty \in \Omega_\infty$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta u_c(\infty) = 0 \quad (10)$$

با ترکیب معادلات (۶) و (۷) مدل توسعه یافته زیر حاصل می شود:

$$\xi(k+1) = G\xi(k) + Hv(k) \quad (11)$$

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) - x_\infty \\ u(k) - u_\infty \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix}$$

$$v(k) = [\Gamma_1 \Gamma_2] \xi(k) + \Delta u_c(k+1).$$

قضیه ۱: سیستم LTI توصیف شده در (۱) همراه با قیدهای تعریف شده در (۲) و فرض ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید r یک سیگنال مرجع ثابت (تکه ای) باشد. با فرض امکان پذیری قانون کنترل (۳) ($\mathbf{X}_f \neq \emptyset$) و وجود معکوس ماتریس های زیر، آنگاه $y_\infty = r$ و داریم:

$$(i) \quad x_\infty = (I_n - A)^{-1} B [C(I_n - A)^{-1} B]^{-1} r, \quad (12)$$

$$(ii) \quad u_\infty = [C(I_n - A)^{-1} B]^{-1} r$$

اثبات: با اعمال تست Hautus، کنترل پذیری زوج (G, H) به سادگی از فرض کنترل پذیری (A, B) حاصل می شود. با اعمال نتیجه ۱ و برخی محاسبات جبری، رابطه (۷) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \hat{K} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n - A & -B \\ K_2 C & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ K_2 r \end{bmatrix} \quad (13)$$

که در آن $\hat{K} = -K_1 - K_2 C$ است. سپس با بهره گیری از لم معکوس ماتریس نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda - \Lambda B \Sigma K_2 C \Lambda & \Lambda B \Sigma \\ -\Sigma K_2 C \Lambda & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{K} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 r \end{bmatrix} \quad (14)$$

به طوری که $\Lambda = (I - A)^{-1}$ و $\Sigma = (K_2 C (I - A)^{-1} B)^{-1}$ می باشند. پس از ساده سازی مختصر، نتیجه زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_n - A)^{-1} B [C(I_n - A)^{-1} B]^{-1} r \\ (C(I_n - A)^{-1} B)^{-1} r \end{bmatrix} \quad (15)$$

سپس با استفاده از رابطه (۱۵) نتیجه مورد نظر ($y_\infty = Cx_\infty = r$) حاصل می شود.

مشخص شده توسط مجموعه χ_ℓ^N به ترتیب توسط ماتریس های G ، W و S محاسبه می شوند.

قضیه ۴: سیستم توصیف شده توسط معادله (۱) همراه با قید (۲) و سیگنال مرجع ثابت r را در نظر بگیرید. در صورتی که قانون کنترل (۳) به سیستم اعمال شود، آنگاه پارامترهای طراحی K_1 ، K_2 و u_c که دستیابی به هدف ردیابی و نیز امکان پذیری سیستم حلقه بسته را تضمین می کنند، به صورت زیر تعیین می شوند:

$$u_c(k) = u_c(k-1) + F_2^\ell(k-1) \quad (23)$$

$$[K_1 \ K_2] = ([0 \ I_m] - F_1^\ell) \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ CA & CB \end{bmatrix}^{-1}$$

که در آن F_1^ℓ و F_2^ℓ توسط رابطه (۲۱) ارائه شده اند. اثبات: قبلاً نشان داده شد که طراحی تنظیم کننده برای سیستم توسعه یافته در (۱۰) و (۱۱) تضمین کننده هدف ردیابی برای سیستم اصلی خواهد بود. همچنین، با تکیه بر نتایج حاصل از [۲۲] و [۲۳] دیدیم که قانون کنترل eMPC برای سیستم مقید منجر به یک پاسخ بهینه PWA می شود که تضمین کننده امکان پذیری سیستم حلقه بسته نیز است. بر این اساس، با تطبیق مسئله طراحی تنظیم کننده توصیف شده در (۱۰) و (۱۱) بر مسئله mpQP داریم:

$$v(k) = F_1^\ell \xi(k) + F_2^\ell, \text{ if } \xi(k) \in P_\ell \quad (24)$$

با مقایسه (۱۱) و (۲۴) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$[\Gamma_1 \ \Gamma_2] = F_1^\ell(k) \quad (25)$$

$$\Delta u_c(k+1) = F_2^\ell(k)$$

با استخراج پارامترهای K_1 و K_2 ، خواهیم داشت:

$$[0 \ I_m] - [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ CA & CB \end{bmatrix} = F_1^\ell(k) \quad (26)$$

$$u_c(k) = u_c(k-1) + F_2^\ell(k-1)$$

نهایتاً دستیابی به نتایج مورد نظر با استفاده از رابطه (۲۶) به روشی امکان پذیر است.

شکل ۱ ساختار و عملکرد کنترل کننده پیشنهادی در سیستم حلقه بسته را توصیف می کند. الگوریتم روش پیشنهادی در فاز برون خط و بر خط به صورت زیر است:

الگوریتم روش پیشنهادی

سیستم (۱) و (۲) همراه با فرض ۱ را در نظر بگیرید. همچنین مقادیر $x(0)$ و R, Q_f, Q, N مفروض می باشند. به ازای هر یک از سیگنال های مرجع مشخص $r_1, r_2, \dots$ مراحل فاز برون خط را انجام دهید:

فاز برون خط

۱- مقادیر ماندگار را با استفاده از قضیه ۱ و به ازای سیگنال مرجع r_i محاسبه و سیستم افزونه شده (۱۰) را تشکیل دهید.

۲- به ازای سیستم (۱۰)، مسئله بهینه سازی (۱۷) را تشکیل دهید و با کمک نتیجه ۲ (قضایای ۲ و ۳) مسئله بهینه سازی را حل و نواحی چندوجهی P_ℓ و بهره های متناظر را تعیین و ذخیره نمایید (F_1^ℓ, F_2^ℓ).

به طوری که $E \in R^{q \times n}$ و $G \in R^{q \times s}$ ، $s = mN$ ، $H = H^T \in R^{s \times s}$ ماتریس های ثابت، برداری با بعد p و X و U به ترتیب مجموعه های چندوجهی محدب و کران دار با ابعاد n و s می باشند. همچنین q معرف تعداد قیدهای سیستم است. با بهره گیری از تبدیل خطی زیر:

$$z = U + H^{-1}F^T x_0 \quad (18)$$

مسئله بهینه سازی (۱۷) به صورت یک مسئله mpQP استاندارد بازنویسی می شود [۲۲]:

$$V_z^*(x_0) = \min_z \frac{1}{2} z^T H z \quad (19)$$

$$s.t. \quad Gz \leq W + Sx_0$$

به طوری که در آن، $V_z^*(x_0) = J_N^*(x_0) - \frac{1}{2} x_0^T (2Y - FH^{-1}F^T) x_0$ و $S = E + GH^{-1}F^T$ می باشند. حل مسئله بهینه سازی mpQP مراجع [۲۲] و [۲۳] تبیین شده است. خلاصه نتایج در قضایای زیر ارائه شده اند.

قضیه ۲ [۲۳]: مسئله بهینه سازی (۱۹) را در نظر بگیرید. فرض کنید $H \succ 0$ بوده و $X \subseteq R^n$ یک ناحیه چندوجهی باشد. در این صورت بهینه ساز $z^*(x)$ و ضریب لاگرانژ $\lambda^*(x)$ مربوط به مسئله mpQP توابع تکه ای شبه خطی از x بوده و $z^*(x)$ پیوسته است.

قضیه ۳ [۲۲]: مسئله کنترل پیش بین مقید با افق محدود در رابطه (۱۶) را در نظر بگیرید. در این صورت مجموعه پارامترهای امکان پذیر X_f یک مجموعه محدب است و بهینه ساز $U^*: X_f \rightarrow R^s$ یک تابع پیوسته و PWA از x بوده و داریم:

$$u^*(x_0) = F_1^\ell x(0) + F_2^\ell, \text{ if } x(0) \in P_\ell, \quad (20)$$

$$P_\ell = \{x \in R^n \mid H_\ell x \leq K_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, N_p\}\},$$

$$X_f = \left\{ \bigcup_{\ell=1}^{N_p} P_\ell \right\}$$

که در آن $u^*(x_0) = [I_m \ 0_{m \times (s-m)}] U^*$ معرف m عنصر اول در بردار بهینه ساز U^* است.

نتیجه ۲ [۳۲]: فرض کنید $\chi_\ell^N = \{i \in \{1, \dots, q\} \mid x \in P_\ell\}$ معرف مجموعه اندیس قیدهای فعال در (۱۷) و مربوط به ناحیه P_r باشد. در این صورت بهره های کنترلی بهینه و ناحیه چندوجهی متناظر به صورت زیر تعیین می شوند:

$$F_1^\ell = H^{-1}G_{\chi_\ell^N}^T \left(G_{\chi_\ell^N} H^{-1}G_{\chi_\ell^N}^T \right)^{-1} S_{\chi_\ell^N} - H^{-1}F^T, \quad (21)$$

$$F_2^\ell = H^{-1}G_{\chi_\ell^N}^T \left(G_{\chi_\ell^N} H^{-1}G_{\chi_\ell^N}^T \right)^{-1} W_{\chi_\ell^N}$$

$$H_\ell = \begin{bmatrix} \Psi_1 - S \\ \Psi_2^T S_{\chi_\ell^N} \end{bmatrix}, \quad K_\ell = \begin{bmatrix} W - GF_2^\ell \\ -\Psi_2^T W_{\chi_\ell^N} \end{bmatrix} \quad (22)$$

که در روابط فوق $\Psi_2 = (G_{\chi_\ell^N} H^{-1}G_{\chi_\ell^N}^T)$ ، $\Psi_1 = G(F_1^\ell + H^{-1}F^T)$ می باشند و ماتریس های $G_{\chi_\ell^N}$ ، $W_{\chi_\ell^N}$ و $S_{\chi_\ell^N}$ با انتخاب سطریهای

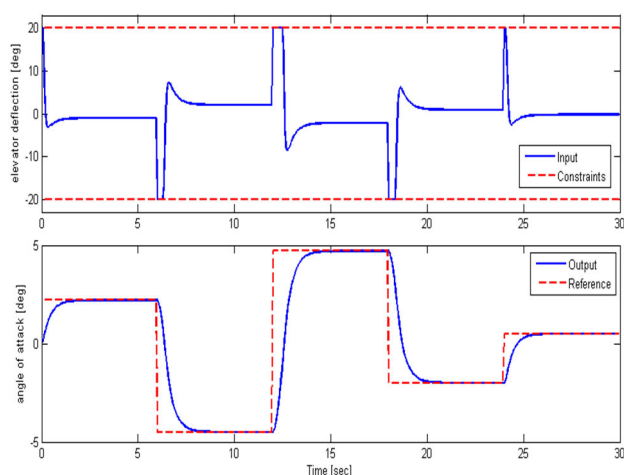
سیستم حلقه بسته تضمین خواهد شد. بر این اساس، پاسخ حلقه بسته سیستم و ورودی کنترلی متناظر به ازای سیگنال‌های مرجع مختلف در شکل ۲ نشان داده شده است. بر اساس نتایج به دست آمده ملاحظه می شود که هدف ردیابی دقیق حتی در شرایطی که سیگنال مرجع مقداری متفاوت از مقادیر از پیش تعیین شده را دارد برآورده می شود، در عین حال سیستم حلقه بسته کلیه قیدها را حفظ نموده است.

۴-۲-۲ مثال ۲

در این بخش به منظور اعمال روش پیشنهادی به یک سیستم چندورودی-چندخروجی، از سیستم زیر که عملکرد آن در مرجع [۳۴] با رویکردی متفاوت مورد ارزیابی قرار گرفته است، بهره می گیریم:

$$G(s) = \frac{1}{100s+1} \begin{bmatrix} 40 & -5 \\ -30 & 40 \end{bmatrix} \quad (30)$$

که در آن بردار ورودی به صورت $\|u(t)\|_{\infty} \leq 1$ محدود شده است. در این بخش با اعمال روش پیشنهادی به سیستم فوق، توانایی و راندمان روش ارائه شده در این مقاله برای برخورد با سیستم های چندورودی-چندخروجی نیز مورد بررسی و ارزیابی واقع شده است. در این راستا، سیستم (۳۰) به ازای زمان نمونه برداری $T_s = 0.1$ ثانیه گسسته سازی شده و قانون کنترل با استفاده از روش پیشنهادی و به ازای $r = [0.63, 0.79]^T$ طراحی شده است. پارامترهای طراحی به کاررفته عبارتند از $N = 7$ ، $R = \text{diag}\{0.1, 0.1\}$ ، سپس پاسخ سیستم حلقه بسته به ازای شرایط اولیه $y(0) = [-1/33, 1/55]^T$ در شکل ۳ رسم شده است. از نتایج شبیه سازی به خوبی مشهود است که با وجود اشباع شدن هردو عملگر تا زمان $t \approx 0.8$ ثانیه، نه تنها دستیابی به هدف ردگیری به خوبی حاصل شده است بلکه نوسانات ناخواسته ای نیز در پاسخ سیستم ایجاد نشده است. این قابلیت ریشه در توانایی ساختار پیشنهادی در تضمین همزمان بهینگی و امکان پذیری سیستم حلقه بسته دارد.



شکل ۲: سیگنال های ورودی و خروجی مربوط به سیستم کنترل حلقه بسته

دقیق قضیه ۴ الزام می دارد که شرط $x_{\infty}^r \in \Omega_{\infty}^{1,2}$ یا به صورت معادل $H_{\Omega}(\mu r + \eta) \leq h_{\Omega}$ برقرار شود. با تعریف $\Psi = H_{\Omega}\mu$ و $Y = h_{\Omega} - H_{\Omega}\eta$ در مسئله موردنظر تضمین شرط فوق حاصل می شود. از فرض انجام شده در بخش (ب) نتیجه می شود: $H_{\Omega}x_{\infty}^{r_2} \leq h_{\Omega}$ و $H_{\Omega}x_{\infty}^{r_1} \leq h_{\Omega}$ سپس با ترکیب محدب نتایج اخیر خواهیم داشت: $\alpha H_{\Omega}x_{\infty}^{r_1} + (1-\alpha)H_{\Omega}x_{\infty}^{r_2} \leq \alpha h_{\Omega} + (1-\alpha)h_{\Omega}$ که در آن $\alpha = \frac{r_1 - r_1}{r_2 - r_1} \in [0, 1]$ است. بنابراین نتیجه می شود: $H_{\Omega}x_{\infty}^r \leq h_{\Omega}$ که این نتیجه معادل با برقراری شرط $x_{\infty}^r \in \Omega_{\infty}^{1,2}$ است. در نهایت با تکیه بر نتایج قضیه ۴ می توان تضمین کرد که دستیابی به هدف ردیابی دقیق به ازای $r = \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2 \in [r_1, r_2]$ برآورده می شود.

۴- نتایج شبیه سازی

۴-۱-۱ مثال ۱ (هواپیمای جنگنده)

مدل خطی و زمان گسسته یک هواپیمای جنگنده (برای جزئیات دقیق تر به [۳۳] مراجعه شود) به صورت زیر داده شده است:

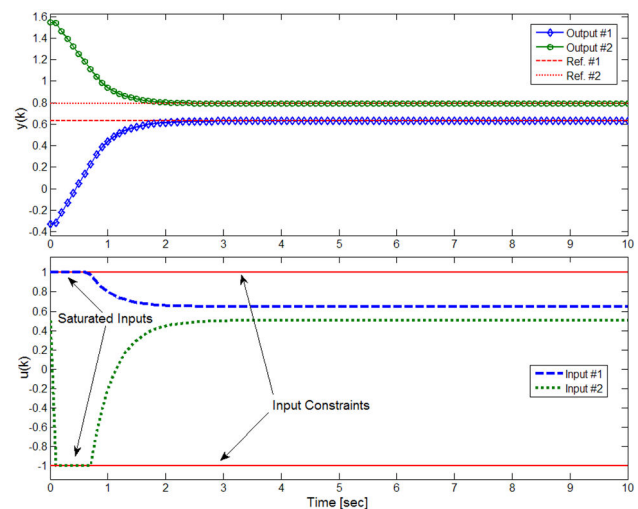
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.9719 & 0.0155 \\ 0.2097 & 0.9705 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0071 \\ 0.3263 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \ 0] x(k) \end{aligned} \quad (28)$$

که زمان نمونه برداری در آن $T_s = 0.06$ ثانیه در نظر گرفته شده است. متغیرهای x_1 ، x_2 و u به ترتیب معرف زاویه حمله، سرعت زاویه ای پیچ و انحراف زاویه ای سطح کنترلی بالابرنده می باشند. همچنین فرض کنید محدودیت های $|x_1| \leq 15$ ، $|x_2| \leq 100$ و $|u| \leq 20$ برای سیستم تعریف شده اند. می خواهیم با استفاده از ساختار پیشنهاد شده در این مقاله کنترل کننده ای را طراحی کنیم که سیستم حلقه بسته، کلیه سیگنال های مرجع $r \in [-5, 5]$ را ردیابی نموده و در عین حال امکان پذیری سیستم حلقه بسته تضمین شود. برای این منظور، مجموعه ای از سیگنال های مرجع به فرم $r_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ را در نظر می گیریم. سپس قانون کنترل به ازای هر یک از موارد با استفاده از رویکرد ارائه شده تعیین می شود. پارامترهایی که برای طراحی قانون کنترل eMPC به کار رفته اند شامل $N = 10$ ، $R = 0.1$ و $Q = \text{diag}\{1, 0, 1\}$ می باشند. همچنین Q_f با حل معادله ریکاتی زیر تعیین شده است [۲۲]:

$$\begin{aligned} Q_f &= (A + BK_{LQ})^T Q_f (A + BK_{LQ}) + K_{LQ}^T R K_{LQ} + Q \\ K_{LQ} &= -(R + B^T Q_f B)^{-1} B^T Q_f A \end{aligned} \quad (29)$$

بررسی مستقیم $\Omega_{\infty}^{r_i}$ به ازای مقادیر مختلف نشان می دهد که کلیه شرایط قضیه ۴ و نتیجه ۲ به ازای r_i انتخاب شده، برآورده شده اند. به عبارت دیگر داریم $\{x_{\infty}^{r_k}, x_{\infty}^{r_k+1}\} \in \Omega_{\infty}^{r_k}, r_k+1 \neq \emptyset$ ،

- validation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 11, pp. 6275-6284, 2014.
- [4] N. P. Ananthamoorthy, and K. Baskaran, "Speed and torque control of permanent magnet synchronous motor using hybrid fuzzy proportional plus integral controller," *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, no. 3, pp. 563-579, 2015.
- [5] P. Guillemain, "Fuzzy logic applied to motor control," *IEEE Transactions on Industrial Applications*, vol. 32, no. 1, pp. 51-56, 1996.
- [6] M. Msaad, and G. Sanche, "Multivariable generalized predictive adaptive control with a suitable tracking capability," *Journal of Process Control*, vol. 4, no. 1, pp. 45-52, 1994.
- [7] D. Limon, I. Alvarado, T. Alamo, and E. F. Camacho, "MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems," *Automatica*, vol. 44, no. 9, pp. 2382-2387, 2008.
- [8] A. Ferramosca, D. Limon, I. Alvarado, T. Alamo, and E. F. Camacho, "MPC for tracking with optimal closed-loop performance," *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1975-1978, 2009.
- [9] U. Maeder, F. Borrelli, and M. Morari, "Linear offset-free model predictive control," *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2214-2222, 2009.
- [10] Y. H. Chen, "Constraint-following servo control design for mechanical systems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 15, no. 3, pp. 369-389, 2009.
- [11] A. Bemporad, A. Casavola, and E. Mosca, "Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 3, pp. 340-349, 1997.
- [12] F. Blanchini, and S. Miani, "Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 971-994, 2000.
- [۱۳] فاطمه منفرد، محمدحسین شفیعی و طاهره بینازاده، «طراحی کنترل کننده ردیاب مقاوم برای یک روبات متحرک غیرهولونومیک دارای لغزش جانبی با روش‌های بازطراحی لیپانوفی و H^∞ غیرخطی»، «مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، دوره ۴۵ شماره ۴، صفحه ۲۰۲-۱۹۱، ۱۳۹۴».
- [14] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert, "Constrained model predictive control: stability and optimality," *Automatica*, vol. 36, no. 6, pp. 789-814, 2000.
- [15] D. Q. Mayne, M. M. Seron, and S. V. Rakovic, "Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances," *Automatica*, vol. 41, no. 2, pp. 219-234, 2005.
- [16] D. Limon, I. Alvarado, T. Alamo, M. Fiacchini, and E. F. Camacho, "Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances," *Journal of Process Control*, vol. 20, no. 3, pp. 248-260, 2010.
- [17] G. Betti, M. Farina, and R. Scattolini, "A robust MPC algorithm for offset-free tracking of constant reference signals," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 9, pp. 2394-2400, 2013.
- [18] N. M. Zeilinger, D. M. Raimondo, A. Domahidi, M. Morari, and C. N. Jones, "On real-time robust model predictive control," *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 683-694, 2014.
- [19] M. A. Mohammadkhani, F. Bayat, and A. A. Jalali, "Design of explicit model predictive control for constrained linear systems with disturbances," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 12, no. 2, pp. 8-16, 2014.



شکل ۳: سیگنال‌های ورودی و خروجی مربوط به سیستم کنترل حلقه بسته

۵- نتیجه‌گیری

مسئله ردیابی سیگنال‌های مرجع تکه‌ای ثابت برای سیستم‌های مقید با دینامیک سریع مورد بررسی واقع شد. در ابتدا یک رویکرد مبتنی بر تحلیل رفتاری سیستم ارائه شد. سپس با فرمول‌بندی و تطبیق مسئله مورد نظر و بهره‌گیری از ویژگی‌های روش eMPC نشان داده شد که امکان طراحی صریح پارامترهای کنترلی در ساختار پیشنهادی وجود دارد. همچنین نشان داده شد که روش ارائه‌شده در کاربردهایی که سیگنال مرجع مقادیری مشخص و از پیش معلوم را داشته باشند به راحتی قابل استفاده است. نهایتاً، به منظور توسعه روش پیشنهادی به کاربردهایی که سیگنال مرجع مقادیر دلخواه (با ماهیت تکه‌ای) می‌باشند، روشی مبتنی بر ترکیب محدب قوانین کنترلی ارائه شد که نه تنها امکان دستیابی به هدف ردگیری دقیق را فراهم می‌نمود، بلکه امکان‌پذیری سیستم حلقه بسته را نیز تضمین می‌کرد. همچنین روش پیشنهادی را می‌توان برای کاربردهایی که سیگنال مرجع دارای تغییرات نسبتاً کند است نیز به کار برد (منظور از کند بودن آن است که بتوان آن را با سیگنال تکه‌ای ثابت تقریب زد بدون آنکه خطای زیادی در عملکرد سیستم وارد شود). لازم به ذکر است که در ساختار پیشنهاد شده فرض شده است که بردار حالت در دسترس است. لذا ترکیب ایده ارائه‌شده با یک تخمین‌گر حالت مناسب به عنوان موضوع پژوهش بعدی پیشنهاد می‌شود.

مراجع

- [1] Y. Fujimoto, and A. Kawamura, "Robust servo-system based on two-degree-of-freedom control with sliding mode," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 3, pp. 272-280, 1995.
- [2] S. Weerasooriya, and D. T. Phan, "Discrete-time LQG/LTR design and modeling of a disk drive actuator tracking servo system," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 3, pp. 240-247, 1995.
- [3] X. Jiao, J. Zhang, and T. Shen, "An adaptive servo control strategy for automotive electronic throttle and experimental

[۲۰] فاطمه پیروزمند، نعمت‌اله قهرمانی و محمدرضا عاروان، «طراحی کنترل کننده پیش‌بین مقاوم با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، دوره ۴۴، شماره ۴، صفحه ۲۱-۹، زمستان ۱۳۹۳.

- [21] Y. Wang, and S. Boyd, "Fast model predictive control using online optimization," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 2, pp. 267-278, 2010.
- [22] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. Pistikopoulos, "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems," *Automatica*, vol. 38, no. 1, pp. 3-20, 2002.
- [23] P. Tondel, T. A. Johansen, and A. Bemporad, "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions," *Automatica*, vol. 39, no. 3, pp. 489-497, 2003.
- [24] F. Bayat, and T. A. Johansen, "Multi-resolution explicit model predictive control: delta model formulation and approximation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 11, pp. 2979-2984, 2013.
- [25] T. A. Johansen, W. Jackson, R. Schrieber, and P. Tondel, "Hardware architecture design for explicit model predictive control," *American Control Conference*, Minneapolis, 2006.
- [26] A. Bemporad, A. Oliveri, T. Poggi, and M. Storace, "Ultra-fast stabilizing model predictive control via canonical piecewise affine approximations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 12, pp. 2883-2897, 2011.
- [27] F. Bayat, T. A. Johansen, and A. A. Jalali, "Flexible piecewise function evaluation methods based on truncated binary search trees and lattice representation in explicit MPC," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 20, no. 3, pp. 632-640, 2012.
- [28] E. G. Gilbert, and K. T. Tan, "Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 9, pp. 1008-1020, 1991.
- [29] J. Rossiter, B. Kouvaritakis, and J. Gossner, "Guaranteeing feasibility in constrained stable generalized predictive control," *IEEE Control Theory & Applications*, vol. 143, no. 3, pp. 463-469, 1996.
- [30] M. Sznajder, and M. J. Damborg, "Suboptimal control of linear systems with state and control inequality constraints," *26th IEEE Conf. on Decision and Control*, Los Angeles, vol. 26, pp. 761-762, 1987.
- [31] F. Bayat, T. A. Johansen, and A. A. Jalali, "Using hash tables to manage the time-storage complexity in a point location problem: application to explicit model predictive control," *Automatica*, vol. 47, no. 3, pp. 571-577, 2011.
- [32] P. Grieder, and M. Morari, "Complexity reduction of receding horizon control," *42th IEEE Conf. on Decision and Control*, Hawaii, USA, pp. 3179-3184, 2003.
- [33] B. L. Stevens, and F. L. Lewis, *Aircraft control and simulation*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 2003.
- [34] E. F. Muldera, M. V. Kothare, and M. Morari, "Multivariable antiwindup controller synthesis using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 37, no. 9, pp. 1407-141, 2001.