

پایدارسازی تصادفی زمان-محدود توسط فیدبک خروجی برای سیستم کنترل تحت شبکه با رویکرد سیستم‌های پرش مارکوف

محسن بحرینی^۱، دانشجوی دکتری؛ طاهره بینازاده^۲، استادیار؛ ملیحه مغفوری فرسنگی^۳، استاد؛ جعفر زارعی^۴، استادیار

۱، ۲ و ۴- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران -

{m.bahreini, binazadeh, zarei}@sutech.ac.ir

۳- دانشکده فنی مهندسی - دانشگاه شهید باهنر - کرمان - ایران - mmaghfoori@uk.ac.ir

چکیده: این مقاله به مسائل پایداری و پایدارسازی تصادفی زمان-محدود سیستم‌های کنترل تحت شبکه^۱ در حضور تأخیر تصادفی پرداخته است. در ابتدا با مدل سازی تأخیر تصادفی شبکه به وسیله فرآیند مارکوف، سیستم کنترل تحت شبکه به شکل مناسبی در چارچوب سیستم‌های پرش مارکوف^۲ زمان-گسسته مدل شده است. از آنجاکه در عمل به علت پیچیدگی‌های شبکه، دسترسی به احتمالات انتقال به طور دقیق امکان پذیر نیست، برخی از عناصر ماتریس احتمال انتقال^۳ نامعین فرض شده است. در ادامه با توجه به تعریف پایداری تصادفی زمان-محدود^۴ برای سیستم‌های پرش مارکوف زمان-گسسته یک شرط کافی برای تضمین اینکه حالت‌های سیستم به مفهوم مربعات-میانگین از یک حد معلومی در یک بازه زمانی تعیین شده‌ای تجاوز نکنند (پایداری تصادفی زمان-محدود)، پیشنهاد شده است. سپس نتایج برای مسئله پایدارسازی تصادفی زمان-محدود این کلاس خاص از سیستم‌ها توسعه داده شده‌اند و قانون کنترلی فیدبک خروجی به نحوی طراحی گردیده است که سیستم حلقه بسته پایدار تصادفی زمان-محدود باشد. تمام نتایج در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی^۵ جدید ارائه شده‌اند. لذا نوآوری اصلی این مقاله استفاده از کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیکی به منظور پایدارسازی تصادفی زمان-محدود سیستم حلقه بسته بوده و در این راستا نامساوی‌های ماتریسی خطی جدیدی برای طراحی قانون کنترل فیدبک خروجی به کار رفته است. همچنین به منظور تأیید مباحث تئوری و نشان دادن کارایی عملی روش مذکور، شبیه سازی‌ها برای دو سیستم انجام پذیرفته است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های کنترل تحت شبکه، سیستم‌های پرش مارکوف، تأخیر تصادفی، پایدارسازی تصادفی زمان-محدود، نامساوی‌های ماتریسی خطی.

Finite-time Stochastic Stabilization via Output Feedback Controller for Networked Control Systems with Markovian Jump Systems Approach

M. Bahreini¹, PhD Student; T. Binazadeh² Assistant Professor; M. Maghfoori Farsangi³ Professor; J. Zarei⁴, Assistant Professor

1, 2, 4- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran,

Emails: {m.bahreini, binazadeh, zarei}@sutech.ac.ir

3- Department of Electrical Engineering, Shahid Bahonar University, Kerman, Iran, Email: mmaghfoori@uk.ac.ir

Abstract: This paper deals with the problem of finite-time stochastic stability and stabilization of networked control systems in the presence of random delay. At first, the network random delay is modeled as a Markov chain, and the resulting closed-loop system is a Markovian jump linear system. Since, due to network complexities, the accurate access to transition probabilities are hard or even impossible, some of the elements in the transition probability matrix are considered as unknown. Then, according to the definition of finite-time stochastic stability for discrete-time Markovian jump systems, a sufficient condition is proposed to guaranty the boundedness of the system states in the sense of mean-square, in a determined time interval. In the next step, the results are extended for the finite-time stochastic stabilization problem of this specific class of systems and the output feedback controller is designed such that the closed-loop system is stochastically finite-time stable. All the results are presented in the form of new linear matrix inequalities (LMIs). The main contribution of this paper is utilizing the static output feedback controller for finite-time stochastic stabilization of the closed-loop system; besides, new LMIs are employed to calculate the output feedback control law. Also, in order to verify the theoretical results and show the applicability of the proposed controller, simulations are performed for two systems.

Keywords: Networked control systems, markovian jump systems, random delay, finite-time stochastic stabilization, linear matrix inequalities.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۱۲/۲۶

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۴/۰۲/۱۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۴/۲۴

نام نویسنده مسئول: طاهره بینازاده

نشانی نویسنده مسئول: شیراز - بلوار مدرس - دانشگاه صنعتی شیراز - دانشکده برق و الکترونیک.

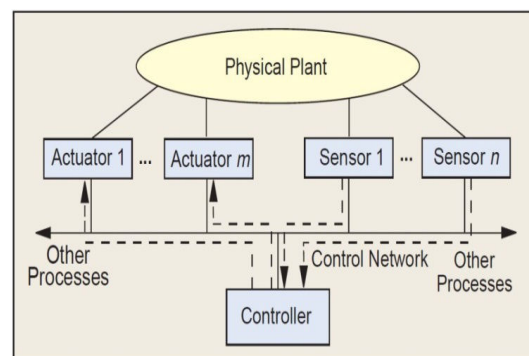
۱ - مقدمه

یکی از موضوعات اساسی در سیستم‌های کنترل، قابلیت این سیستم‌ها در حفظ یک رفتار مقبول و رسیدن به برخی از نیازهای عملکردی، حتی در حضور تغییرات ناگهانی در دینامیک‌های سیستم، است. این تغییرات می‌تواند به‌طور مثال ناشی از اغتشاش‌های محیطی ناگهانی، خرابی یا تعمیرات اجزاء، تغییر در اتصال زیرسیستم‌ها، تغییر ناگهانی در نقطه کار در فرآیندهای غیرخطی باشد. نمونه‌هایی از این وضعیت به‌عنوان مثال می‌تواند در سیستم‌های اقتصادی، سیستم‌های کنترل هواپیما، کنترل گیرنده‌های مرکزی حرارتی خورشیدی، رباتیک و ... پیدا شود. در برخی از موارد این سیستم‌ها می‌توانند به‌وسیله مجموعه‌ای از سیستم‌های خطی با انتقال مد به‌وسیله فرآیند مارکوف، مدل شوند. یعنی در صورتی که سیستم در لحظه معلوم k در مد i داده شده باشد، احتمال پرش به هر یک از مدهای دیگر و نیز احتمال ماندن در مد i تعیین می‌شود که این احتمال فقط به مد عملیاتی لحظه جاری بستگی دارد. این خانواده از سیستم‌ها در مقالات با عنوان سیستم‌های پرش مارکوف، شناخته می‌شوند [۱].

این سیستم‌های تصادفی نخستین بار توسط کراسوفسکی و لیدسکی معرفی شدند [۲]. پس از معرفی این کلاس خاص از سیستم‌ها مسائل تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده برای این سیستم‌ها موردتوجه قرار گرفت [۷-۱].

یک ماتریس احتمال انتقال رفتار سیستم پرش مارکوف را مشخص می‌کند. اما در برخی موارد (مانند سیستم‌های کنترل تحت شبکه) دستیابی به همه عناصر احتمالات انتقال دشوار و یا حتی غیرممکن است.

سیستم کنترل تحت شبکه یک سیستم کنترل است که در آن حلقه‌های کنترل از طریق یک شبکه بسته شده‌اند. سیگنال‌های کنترل و فیدبک در میان اجزای سیستم کنترل (حسگرها، کنترل‌کننده و عملگرها) در قالب بسته‌های اطلاعاتی از طریق شبکه ردوبدل می‌شوند. استفاده از شبکه ارتباطی در حلقه کنترل، طراحی و تحلیل سیستم کنترل تحت شبکه را پیچیده می‌کند [۸، ۹]. شکل ۱ شمای کلی سیستم‌های کنترل تحت شبکه را نشان می‌دهد.



شکل ۱: شمای کلی سیستم‌های کنترل تحت شبکه [۸]

در مقایسه با سیستم‌های کنترل مرسوم، استفاده از شبکه‌های ارتباطی مزایای زیادی نظیر بهبود کارایی، بهبود قابلیت اطمینان و انعطاف‌پذیری، از طریق کاهش سیم‌کشی‌ها و هوشمند شدن گره‌های شبکه و همچنین کاهش زمان و کاهش هزینه‌های نصب، نگهداری و تشخیص عیب را به همراه دارد [۱۰، ۱۱]. اتصال فضای مجازی به فضای فیزیکی دیگر مزیتی است که امکان کنترل از راه دور را فراهم می‌کند [۱۲].

به سبب مزایای زیادی که به آن اشاره شد، سیستم‌های کنترل تحت شبکه کاربردهای وسیعی در صنعت نظیر کارخانه‌های تولیدی، کارخانه‌های اتومبیل‌سازی، سیستم‌های گرمایش، تهویه و تهویه مطبوع^۱، موشک‌ها و هواپیما و همچنین در صنایع نظامی، وسایل نقلیه بدون سرنشین، شبکه‌های حسگر موبایل، جراحی از راه دور، همکاری از راه حواس از طریق اینترنت و ... پیدا کرده است [۱۵-۱۲].

در کنار همه مزایایی که به آن‌ها اشاره شد، سیستم‌های کنترل تحت شبکه با چالش‌هایی مواجه‌اند که دو مورد از مهم‌ترین این چالش‌ها تأخیر زمانی القاشده توسط شبکه و از دست رفتن بسته‌های اطلاعاتی است. همان‌طور که در مطالعات درباره سیستم‌های تأخیر زمانی مرسوم نشان داده شده است، تأخیر می‌تواند عملکرد ضعیف و حتی ناپایداری سیستم حلقه بسته را ایجاد کند. در سیستم کنترل تحت شبکه با پروتکل‌های متفاوت شبکه، تأخیر القایی شبکه ممکن است ثابت، متغیر با زمان، یا حتی متغیری تصادفی باشد [۱۵، ۱۶].

یک رویکرد در برخورد با پدیده تأخیر تصادفی و نیز پدیده از دست رفتن بسته‌های اطلاعاتی در سیستم‌های کنترل تحت شبکه که در سال‌های اخیر بسیار موردتوجه محققین قرار گرفته است، مدل‌سازی آن به‌وسیله فرآیند مارکوف است. دلیل استفاده از فرآیند مارکوف برای مدل‌سازی تأخیر تصادفی و از دست رفتن بسته‌های اطلاعاتی تصادفی در سیستم‌های کنترل تحت شبکه این است که احتمال این متغیرهای تصادفی در لحظه بعد $(k + 1)$ به متغیر تصادفی در لحظه جاری (k) وابسته است. مثلاً زمانی که یک بسته اطلاعاتی از دست برود با احتمال بیشتری بسته بعد نیز از دست می‌رود. این رفتار به‌خوبی با فرآیند مارکوف مدل می‌شود که در این صورت سیستم کنترل تحت شبکه به یک سیستم پرش مارکوف تبدیل می‌شود. در نتیجه می‌توان از نتایج پایداری و پایدارسازی این کلاس خاص از سیستم‌ها بهره برد [۲۲-۱۷].

در مراجع [۱۷، ۱۸] طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت و در [۱۹] طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی برای سیستم‌های کنترل تحت شبکه در حضور تأخیر تصادفی، انجام گرفته است. همچنین از دست رفتن بسته‌های اطلاعاتی به‌وسیله فرآیند مارکوف در مراجع [۲۰، ۲۱] مدل شده است. اما پایداری سیستم کنترل تحت شبکه در این دو مرجع به تعداد بسته‌های اطلاعاتی از دست‌رفته بستگی نداشته و تنها وابسته به این است که آیا فرآیند انتقال بسته‌ها با موفقیت انجام گرفته است یا خیر. در مرجع [۲۲] تعداد بسته‌های از دست‌رفته متوالی با

زمان-گسسته باوجود نامعینی در احتمالات انتقال اختصاص یافته است.

از طرفی، از آنجاکه در کاربردهای عملی اندازه‌گیری همه حالت‌ها برای فیدبک اغلب امکان‌پذیر نیست، در چنین وضعیتی طراحی یک کنترل‌کننده فیدبک خروجی بسیار مناسب است. با این وجود مقالات کمی به مسئله کنترل فیدبک خروجی استاتیک برای سیستم‌های کنترل تحت شبکه که کاربردی تر و چالش‌برانگیزتر از کنترل فیدبک حالت است، پرداخته‌اند.

از این رو در این مقاله، طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی به منظور پایدارسازی تصادفی زمان-محدود سیستم کنترل تحت شبکه در حضور تأخیر تصادفی و در چارچوب سیستم‌های پرش مارکوف خطی انجام گرفته است. با فرض نامعین بودن برخی از عناصر ماتریس احتمال انتقال، نتایج پایداری و پایدارسازی زمان-محدود در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی جدید توسعه داده شده است. سپس با شبیه‌سازی یک مثال عددی درستی نتایج به دست آمده مورد بررسی قرار گرفته است. در انتها نیز اعمال نتایج به دست آمده روی یک موتور DC بدون جاروبک انجام گرفته است که علاوه بر تأیید مباحث تنوری، عملکرد مناسب رویکرد مطرح شده را نشان می‌دهند.

۲- مدل سازی سیستم کنترل تحت شبکه

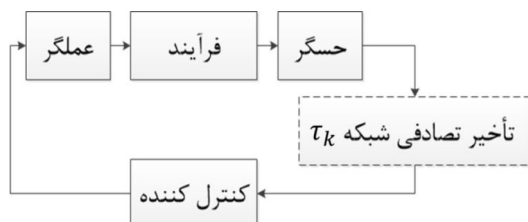
سیستم کنترل تحت شبکه به صورت شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید مدل فرآیند با رابطه (۱) تعریف شود.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $x(k) \in R^n$ ، $u(k) \in R^m$ به ترتیب بردار حالت و ورودی کنترل، $y(k) \in R^p$ بردار خروجی و A ، B و C ماتریس‌های حقیقی معلوم با ابعاد مناسب هستند. ماتریس C دارای رتبه سطری کامل است ($\text{rank}(C) = p$).

قانون کنترل فیدبک خروجی وابسته به تأخیر، با رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$u(k) = K(\tau_k)y(k - \tau_k) \quad (2)$$



شکل ۲: مدل سیستم کنترل تحت شبکه با حضور تأخیر تصادفی در مسیر حسگر تا کنترل‌کننده

مقدار تأخیر τ_k محدود فرض شده و به وسیله یک فرآیند مارکوف که مقادیری در $S = \{0, 1, \dots, \tau\}$ اختیار می‌کند، مدل می‌شود. برای

فرآیند مارکوف مدل شده است و برخلاف مراجع [۲۰، ۲۱] شرایط به دست آمده برای پایداری به تعداد بسته‌های ازدست‌رفته نیز بستگی دارد.

بنا بر تصادفی بودن پدیده تأخیر و از دست رفتن بسته‌های اطلاعاتی، در سال‌های اخیر مقالات زیادی به مدل‌سازی این پدیده‌ها در سیستم‌های کنترل تحت شبکه با فرآیند مارکوف پرداخته‌اند، اما در اکثر این مقالات ماتریس احتمال انتقال مدهای کاری، کاملاً معلوم فرض شده است. اگرچه داشتن اطلاعات کامل و ایده‌آل درباره ماتریس احتمال انتقال، آنالیز و طراحی سیستم را ساده می‌کند، اما باوجود پیچیدگی‌های شبکه دسترسی به همه عناصر ماتریس احتمال انتقال، از نظر عملی یا امکان‌پذیر نبوده و یا هزینه‌بر خواهد بود. در نتیجه حضور نامعینی در این ماتریس به واقعیت نزدیک‌تر است. بنابراین تمرکز مطالعات اخیر به سمت چگونگی اصلاح شرایط پایداری و پایدارسازی برای سیستم‌های پرش مارکوف با لحاظ نامعینی در احتمالات انتقال، سوق یافته است. اخیراً نتایج جالبی در [۷-۵، ۲۵-۲۳] پیشنهاد شده است که در آن‌ها مسائل پایداری و پایدارسازی برای سیستم‌های پرش مارکوف با فرض نامعینی در احتمالات انتقال مطرح شده است. لازم به ذکر است که تمام کارهای فوق روی پایداری و عملکرد در یک بازه زمان-نامحدود متمرکز شده‌اند.

از سوی دیگر در بسیاری از کاربردهای عملی رفتار سیستم، در یک بازه زمان-محدود مورد توجه است. با قطع نظر از جزئیات، یک سیستم پایدار زمان-محدود است اگر با داشتن کرانی روی شرایط اولیه، حالت‌های سیستم در مدت زمان مشخص شده‌ای از حد معینی تجاوز نکند [۲۶]. در مرجع [۲۷] تعریفی برای تصادفی زمان-محدود برای سیستم‌های پرش مارکوف مطرح شده است. سپس بر اساس آن، شرایط کافی برای پایداری تصادفی زمان-محدود این سیستم‌ها ارائه شده و طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت به منظور پایدارسازی تصادفی زمان-محدود سیستم انجام گرفته است. مرجع [۲۸] نیز ابتدا مسئله کران‌داری تصادفی زمان-محدود را برای سیستم‌های مربعی غیرخطی پرش مارکوف ارائه کرده و سپس به طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت برای این کلاس خاص از سیستم‌ها پرداخته است. مرجع [۲۹] نیز به مسئله پایداری و پایدارسازی تصادفی زمان-محدود برای سیستم‌های پرش مارکوف خطی با فرض نامعین بودن برخی از احتمالات انتقال در حوزه زمان-پیوسته پرداخته است. در این مقاله با معرفی مفهوم پایداری تصادفی زمان-محدود برای این کلاس خاص از سیستم‌ها طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت به منظور تضمین پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم انجام گرفته است. در مرجع [۳۰] نیز به مسئله پایدارسازی زمان-محدود مبتنی بر رویکرد استفاده از فیدبک حالت برای سیستم‌های پرش مارکوف زمان-پیوسته باوجود نامعینی در احتمالات انتقال پرداخته شده است. مرجع [۳۱] نیز به طراحی فیلتر زمان-محدود برای سیستم‌های پرش مارکوف

در $\hat{C}(\tau_k)$ همه عناصر صفرند، به جز $(\tau_k + 1)$ امین بلوک که C است. از این پس به منظور ساده نویسی برای $\tau_k = i$ ، $K(\tau_k)$ به صورت K_i و $\hat{C}(\tau_k) = \hat{C}_i$ نوشته می شود.

۳- رویکرد مطرح شده

در این بخش ابتدا تعریف پایداری تصادفی زمان-محدود برای یک سیستم خطی پرسی مارکوف بیان شده است. سپس نتایج پایداری و پایدارسازی تصادفی زمان-محدود برای سیستم کنترل تحت شبکه مورد بررسی که به وسیله سیستم حلقه بسته (Σ) مدل شده است، ارائه شده است. لازم به ذکر است که نتایج پایداری تصادفی زمان-محدود برای طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیک که نسبت به فیدبک حالت کاربردی تر و چالش برانگیزتر است، مطرح گردیده است. در واقع با در نظر گرفتن قانون کنترل فیدبک خروجی و معرفی ماتریس های وزنی G_i ، نتایج در قالب نامساوی های ماتریسی خطی جدید ارائه شده اند.

در حالت کلی یک سیستم خطی پرسی زمان-گسسته به صورت (۵) در نظر گرفته می شود [۲۷].

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{(r(k),k)} x(k) + B_{(r(k),k)} u(k), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $x(k) \in R^n$ ، $u(k) \in R^m$ به ترتیب بردار حالت و ورودی کنترل است. $\{r(k), k \geq 0\}$ فرآیند مارکوف زمان-گسسته ای است که مقادیری در یک فضای محدود اختیار می کند و توصیف کننده تغییر مد در زمان k است. برای $r(k) = i \in S$ ، ماتریس های سیستم مد i ام با A_i و B_i نشان داده می شوند که در آن A_i و B_i ماتریس هایی با ابعاد مناسب هستند.

تعریف ۱: سیستم پرسی مارکوف خطی (۵) با توجه به (c_1, c_2, R, N) که یک ماتریس مثبت معین و $N \in N^+$ است، پایدار تصادفی زمان-محدود (FTSS) است اگر برای $k \in \{1, \dots, N\}$ داشته باشیم [۲۷]:

$$x^T(0) R x(0) \leq c_1 \Rightarrow E \{x^T(k) R x(k)\} \leq c_2$$

که در آن E امید ریاضی و N^+ بیانگر مجموعه اعداد طبیعی مثبت است.

تذکر ۱: لازم به ذکر است که تعریف ۱ را می توان تعمیمی از پایداری زمان-محدود (FTS) سیستم های معین^۸ برای سیستم های تصادفی^۹ در نظر گرفت. مشابه تفاوت بین پایداری مجانبی لیاپانوف و FTS برای سیستم های معین، سیستمی که FTSS می باشد ممکن است پایدار مربعات- میانگین نباشد. همچنین یک سیستم پایدار مربعات- میانگین ممکن است FTSS نباشد [۲۷].

نمونه ماتریس احتمال انتقال با برخی المان های نامعلوم برای سیستم (۱) و با فرض $\tau = 3$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۲۷]:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & ? & ? & \pi_{14} \\ \pi_{21} & ? & ? & ? \\ ? & \pi_{32} & ? & \pi_{34} \\ ? & \pi_{42} & ? & ? \end{bmatrix}$$

که در ماتریس فوق "؟" عناصر نامعلوم را نشان می دهد و همچنین π_{ij} احتمال انتقال از مد i در زمان k به مد j در زمان $(k+1)$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= P(\tau_{k+1} = j | \tau_k = i) \\ \pi_{ij} &\geq 0 \text{ for all } i, j \in S, \sum_{j=0}^{\tau} \pi_{ij} = 1 \end{aligned}$$

به منظور سادگی نماد سازی زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} S &= S_k^i \cup S_{uk}^i, \text{ for all } i \in S \\ S_k^i &\triangleq \{j : \pi_{ij} \text{ is known}\} \\ S_{uk}^i &\triangleq \{j : \pi_{ij} \text{ is unknown}\} \end{aligned} \quad (3)$$

به علاوه اگر $S_k^i \neq \emptyset$ باشد، آنگاه S_k^i می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$S_k^i = (\kappa_1^i, \dots, \kappa_m^i), 1 \leq m \leq s$$

که در آن $\kappa_m^i \in N^+$ ، بیانگر m امین عنصر معلوم با شاخص κ_m^i در سطر i ام ماتریس Π است. علاوه بر این در ادامه و مباحث بعد نماد π_k^i به صورت $\pi_k^i = \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}$ تعریف می شود.

با اعمال قانون کنترل (۲) و بسط بردار حالت به صورت بسته به صورت (۴) به دست می آید.

$$z(k+1) = (\hat{A} + \hat{B} K(\tau_k) \hat{C}(\tau_k)) z(k) \quad (4)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \in R^{(\tau+1)n \times (\tau+1)n} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(\tau+1)n \times m} \\ \hat{C}(\tau_k) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad C \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in R^{p \times (\tau+1)n} \end{aligned}$$

۳-۱ - پایداری تصادفی زمان-محدود

این بخش بر اساس تعریف ۱، یک شرط کافی برای پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم خطی پرشی مارکوف توسعه داده شده و اثبات گردیده است.

قضیه ۱: سیستم (۵) با $u(k) \equiv 0$ و با توجه به (c_1, c_2, R, N) پایدار تصادفی زمان-محدود است اگر برای اسکالر $\alpha > 0$ وجود داشته باشد ماتریس های $P_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, \tau$) و اسکالرهایی $\lambda_1 > 0$ و $\lambda_2 > 0$ به طوری که:

$$\lambda_1 I \leq P_i \leq \lambda_2 I \quad (6)$$

$$(\alpha + 1)^N c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1 < 0 \quad (7)$$

$$\sum_{j \in S_k^i} [\pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i] - \pi_i^i (1 + \alpha) \tilde{P}_i < 0 \quad (8)$$

$$A_i^T \tilde{P}_j A_i - (\alpha + 1) \tilde{P}_i < 0 \quad \forall j \in S_{uk}^i \quad (9)$$

که در آن، $\tilde{P}_i = R^{-\frac{1}{2}} P_i R^{-\frac{1}{2}}$ است.

اثبات: تابع لیپانوف را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$V(x(k), r(k)) = x^T(k) \tilde{P}_i x(k), \quad \forall r(k) = i \in S$$

اثبات قضیه ۱ به دو بخش تقسیم می شود. در بخش اول نشان می دهیم که شرایط (۶) و (۷) به همراه شرط (۱۰) می توانند تضمین کنند در صورتی که شرط $x^T(0) R x(0) \leq c_1$ برقرار باشد، آنگاه $E\{x^T(k) R x(k)\} \leq c_2$ است و لذا طبق تعریف ۱، سیستم (۵) پایدار تصادفی زمان-محدود است. همچنین در بخش دوم نشان داده می شود که شرایط (۸) و (۹) شرط (۱۰) را ایجاب می کنند.

$$\zeta V(x(k), r(k)) < \alpha V(x(k), r(k)) \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، ζ در حالت کلی بیان گر یک عملگر دیفرانسیل جزئی است که به صورت $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[f(X_t)] - f(x)}{t}$ تعریف می شود [۳۲].

بخش اول: شرط (۱۰) می تواند برای فواصل متفاوت به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} E\{V(x(1), r(1))\} - V(x(0), r(0)) &< \alpha V(x(0), r(0)) \\ E\{V(x(2), r(2))\} - E\{V(x(1), r(1))\} &< \alpha E\{V(x(1), r(1))\} \\ &\vdots \\ E\{V(x(k+1), r(k+1))\} - E\{V(x(k), r(k))\} &< \alpha E\{V(x(k), r(k))\} \end{aligned}$$

یعنی:

$$\begin{aligned} E\{V(x(1), r(1))\} &< (\alpha + 1) V(x(0), r(0)) \\ &\vdots \\ E\{V(x(k+1), r(k+1))\} &< (\alpha + 1) E\{V(x(k), r(k))\} \end{aligned}$$

در نتیجه به صورت بازگشتی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E\{V(x(k), r(k))\} &< (\alpha + 1) E\{V(x(k-1), r(k-1))\} \\ &< (\alpha + 1)^2 E\{V(x(k-2), r(k-2))\} \\ &\vdots \\ &< (\alpha + 1)^k E\{V(x(0), r(0))\} \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} E\{V(x(k), r(k))\} &= E\{x^T(k) \tilde{P}_{r(k)} x(k)\} \\ &= E\{x^T(k) R^{1/2} P_{r(k)} R^{1/2} x(k)\} \\ &\geq \lambda_{\min}(P_{r(k)}) E\{x^T(k) R x(k)\} \end{aligned}$$

از سوی دیگر:

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)^k V(x(0), r(0)) &= (\alpha + 1)^k x^T(0) \tilde{P}_{r(0)} x(0) \\ &= (\alpha + 1)^k x^T(0) R^{1/2} P_{r(0)} R^{1/2} x(0) \\ &\leq (\alpha + 1)^k \lambda_{\max}(P_{r(0)}) x^T(0) R x(0) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P_{r(k)}) E\{x^T(k) R x(k)\} &\leq (\alpha + 1)^k \lambda_{\max}(P_{r(0)}) x^T(0) R x(0) \\ &\leq (\alpha + 1)^k \lambda_{\max}(P_{r(0)}) c_1 \end{aligned}$$

از (۶) و (۷) نتیجه می شود:

$$E\{x^T(k) R x(k)\} \leq (\alpha + 1)^k \frac{\lambda_{\max}(P_{r(0)})}{\lambda_{\min}(P_{r(k)})} c_1 \leq c_2$$

بخش دوم: حال در این بخش اثبات می کنیم که شرط های (۸) و (۹) برقراری شرط (۱۰) را ایجاب می کنند. لازم به ذکر است که شرط (۱۰) معادل است با:

$$\begin{aligned} E\{V(x(k+1), r(k+1)) | x(k), r(k)\} - V(x(k), r(k)) &= \sum_{j \in S} \pi_{ij} x^T(k) A_i^T \tilde{P}_j A_i x(k) - x^T(k) \tilde{P}_i x(k) \\ &< \alpha x^T(k) \tilde{P}_i x(k) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$x^T(k) \left\{ \sum_{j \in S} \pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i - (\alpha + 1) \tilde{P}_i \right\} x(k) < 0$$

حال با توجه به تعاریف S_k^i و S_{uk}^i در (۳) و $1 = \sum_{j \in S} \pi_{ij} = \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij}, \forall i \in S$ داریم:

$$\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + (1+\alpha)^{-1} X_i & (\hat{A}G_i + \hat{B}M_i\hat{C}_i)^T \\ (\hat{A}G_i + \hat{B}M_i\hat{C}_i) & -X_j \end{bmatrix} < 0, \quad \forall j \in S_{uk}^i \quad (15)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \bar{H}_i &= \left[\sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}} (\hat{A}G_i + \hat{B}M_i\hat{C}_i)^T \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\pi_{i\kappa_m^i}} (\hat{A}G_i + \hat{B}M_i\hat{C}_i)^T \right] \\ \bar{L}_i &= \text{diag} \{X_{\kappa_1^i}, \dots, X_{\kappa_m^i}\} \end{aligned}$$

به علاوه بهره‌های کنترل کننده به ازای $i \in S$ از رابطه

$$K_i = M_i Q_i^{-1} \text{ به دست می‌آید.}$$

اثبات: ابتدا طرفین نامساوی (۸)، از راست در G_i و از چپ در G_i^T ضرب می‌شود. آنگاه با جایگذاری $A_i \triangleq (\hat{A} + \hat{B}K_i\hat{C}_i)$ و با استفاده از لم مکمل شر^{۱۰} (به بخش ضمائم رجوع شود). نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} -G_i^T (\pi_k^i (1+\alpha))^{-1} \tilde{P}_i G_i & \sqrt{\pi_{i\kappa_1^i}} (\hat{A}G_i + \hat{B}K_i\hat{C}_i G_i)^T & * & \dots \\ * & -\tilde{P}_{\kappa_1^i}^{-1} & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ * & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} < 0$$

که در آن * بیان گر تقارن است. اکنون با جایگذاری تعاریف (۱۶) در این رابطه، نامساوی (۱۷) به دست می‌آید.

$$X_i \triangleq \tilde{P}_i^{-1} \quad (16)$$

$$K_i \hat{C}_i \hat{G}_i \triangleq M_i \hat{C}_i$$

$$\begin{bmatrix} -G_i^T (\pi_k^i (1+\alpha))^{-1} (X_i)^{-1} G_i & \bar{H}_i \\ \bar{H}_i^T & -\bar{L}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

از آنجاکه برای $X_i > 0$ ، $(X_i - G_i)^T X_i^{-1} (X_i - G_i) \geq 0$ همواره برقرار است. اگر (۱۴) برقرار باشد، نامساوی (۱۷) نیز برقرار است. به طور مشابه برای (۹)، نامساوی (۱۵) به دست می‌آید. معادله (۱۱) نیز با توجه به تعریف (۱۶)، نتیجه می‌شود. همچنین نامساوی‌های (۱۲) و (۱۳) مستقیماً از (۶) و (۷) و با توجه به تعریف $X_i \triangleq \tilde{P}_i^{-1}$ به دست می‌آیند.

اکنون سؤالی که مطرح می‌شود این است که قید تساوی (۱۱) چگونه باید حل شود. از آنجاکه ماتریس‌های $\hat{C}_i$ ، دارای رتبه سطری کامل هستند، همیشه ماتریس‌های متعامد $U \in R^{p \times p}$ و $V_i \in R^{(\tau+1)n \times (\tau+1)n}$ به ازای $i \in S$ به صورت زیر وجود دارد:

$$\begin{aligned} \Psi_i &\triangleq \sum_{j \in S} \pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i - (\alpha + 1) \tilde{P}_i \\ &= \left(\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} \right) A_i^T \tilde{P}_j A_i \\ &\quad - \left(\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} \right) (\alpha + 1) \tilde{P}_i \\ &= \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} (\alpha + 1) \tilde{P}_i \\ &\quad + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i - \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (\alpha + 1) \tilde{P}_i \end{aligned}$$

اکنون با تعریف $\bar{\Psi}_i$ و $\bar{\Psi}_i$ به صورت زیر، این معادله به صورت $\Psi_i = \bar{\Psi}_i + \bar{\Psi}_i \quad \forall i \in S$ خلاصه نویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_i &\triangleq \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} (\alpha + 1) \tilde{P}_i \\ \bar{\Psi}_i &\triangleq \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} A_i^T \tilde{P}_j A_i - \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} (\alpha + 1) \tilde{P}_i \\ &= \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij} [A_i^T \tilde{P}_j A_i - (\alpha + 1) \tilde{P}_i] \end{aligned}$$

بنابراین شرایط (۸) و (۹) ایجاب می‌کنند که $\bar{\Psi}_i < 0$ و $\bar{\Psi}_i < 0$ باشد، در نتیجه شرط $\Psi_i < 0$ برآورده می‌شود.

۳-۲- طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیکی

در این بخش با توجه به نتایج توسعه داده شده در بخش قبل، یک شرط کافی برای تضمین پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم کنترل تحت شبکه مورد نظر، ارائه شده است. با در نظر گرفتن قانون کنترل فیدبک خروجی (۲) و معرفی ماتریس‌های وزنی G_i ، طراحی کنترل کننده پایدار ساز از طریق نامساوی‌های ماتریسی خطی جدید انجام گرفته است. لازم به ذکر است که این مقاله در مقایسه با مرجع [۲۷] نگاهی عملی و کاربردی تر به مسئله پایداری تصادفی زمان-محدود در سیستم‌های پرش مارکوف خطی داشته است. به سبب آنکه در عمل اندازه گیری همه حالات سیستم برای فیدبک اغلب در دسترس نیست و در چنین حالتی طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی که کاربردی تر است، لازم می‌شود.

قضیه ۲: اگر برای اسکالر $\alpha > 0$ ، ماتریس‌های $Q_i, M_i, G_i, X_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, \tau$) و $\lambda_1 > 0$ وجود داشته باشد به نحوی که شرایط (۱۱) تا (۱۵) برآورده شوند، آنگاه قانون کنترل فیدبک (۲) پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم حلقه بسته (۴) را با توجه به (c_1, c_2, R, N) ایجاب می‌کند.

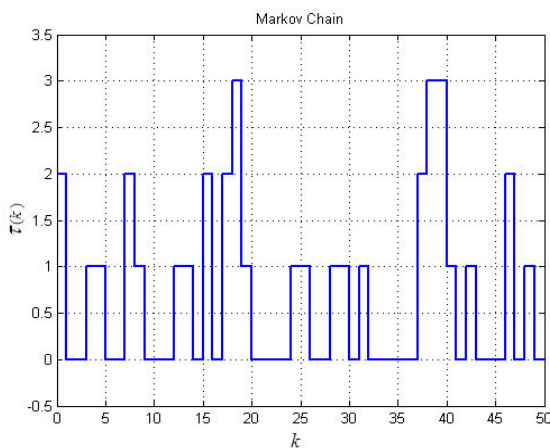
$$Q_i \hat{C}_i = \hat{C}_i G_i \quad (11)$$

$$\lambda_2^{-1} R^{-1} \leq X_i \leq \lambda_1^{-1} R^{-1} \quad (12)$$

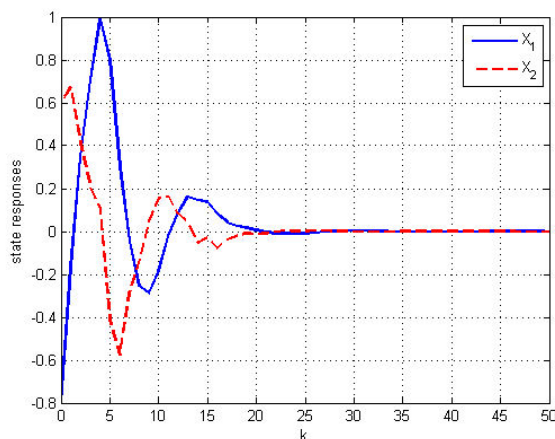
$$(\alpha + 1)^N c_1 \lambda_2 - c_2 \lambda_1 < 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + (\pi_k^i (1+\alpha))^{-1} X_i & \bar{H}_i \\ \bar{H}_i^T & -\bar{L}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

با در نظر گرفتن $R = I$ ، $N=50$ ، $c_1=1$ ، $c_2=10$ و $\alpha=0.17$ ، ابتدا با استفاده از جعبه‌ابزار YALMIP برای حل نامساوی‌های ماتریسی (۱۲) تا (۱۵) یک پاسخ شدنی^{۱۱} برای ماتریس‌های G_{i1} ، $X_i > 0$ ، G_{i2} ، G_{i3} و M_i به دست آورده شده و سپس از رابطه (۲۰) بهره‌های کنترل‌کننده محاسبه شده و به سیستم اعمال می‌شوند. شکل ۴ پاسخ زمانی حالت‌های سیستم را به ازای شرایط اولیه $x_0 = [-0.8 \ 0.6]^T$ و فرآیند مارکوف شکل ۳ نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۴ مشخص است سیستم با توجه به (c_1, c_2, R, N) پایدار تصادفی زمان-محدود است.



شکل ۳: یک تحقق تصادفی از فرآیند مارکوف حاصل از ماتریس احتمال انتقال (۲۱)



شکل ۴: پاسخ زمانی حالت‌های سیستم به ازای فرآیند مارکوف شکل ۳

بنا بر تصادفی بودن فرآیند مارکوف تولیدشده برای این که نتایج به واقعیت نزدیک‌تر باشد، شکل ۵ با میانگین‌گیری از ۱۰۰ بار شبیه‌سازی سیستم فوق به ازای ۱۰۰ فرآیند مارکوف تصادفی، به دست آمده است. که این شکل نیز کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

$$\bar{C}_i = UC_i V_i = UC_i [V_{i1} \ V_{i2}] = [\Sigma \ 0] \quad (18)$$

که در رابطه فوق $V_{i2} \in R^{(\tau+1)n \times [(\tau+1)n-p]}$ ، $V_{i1} \in R^{(\tau+1)n \times p}$ و $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ است که $\sigma_r (r=1, \dots, p)$ مقادیر تکین غیر صفر $\hat{C}_i$ هستند [۱۹].

لم ۱: برای $\hat{C}_i (i \in S)$ با رتبه p ، اگر به ازای $i \in S$ ماتریس‌های G_i با رتبه کامل و ساختاری به فرم (۱۹) وجود داشته باشند، آنگاه ماتریس‌های ناویژه Q_i وجود دارند به‌طوری‌که معادله تساوی (۱۱) را راضی کند [۱۹].

$$G_i = V_i \begin{bmatrix} G_{i1} & 0 \\ G_{i2} & G_{i3} \end{bmatrix} V_i^T \quad (19)$$

$$= V_{i1} G_{i1} V_{i1}^T + V_{i2} G_{i2} V_{i2}^T + V_{i2} G_{i3} V_{i2}^T$$

که در رابطه فوق $G_{i2} \in R^{[(\tau+1)n-p] \times p}$ ، $G_{i1} \in R^{p \times p}$ و $G_{i3} \in R^{[(\tau+1)n-p] \times [(\tau+1)n-p]}$ نیز در (۱۸) تعریف شده‌اند.

نتیجه ۱: سیستم حلقه بسته (۴) پایدار تصادفی زمان-محدود است، اگر وجود داشته باشد ماتریس‌های $X_i > 0$ ، G_{i1} ، G_{i2} ، G_{i3} و M_i ، به‌طوری‌که به ازای $i \in S$ نامساوی‌های ماتریس خطی (۱۲) تا (۱۵) برقرار باشند که در آن‌ها G_i ها با معادله (۱۹) تعریف شده‌اند. به‌علاوه بهره‌های کنترل‌کننده $K_i (i \in S)$ به‌وسیله معادله زیر حاصل می‌شوند. U و Σ نیز در (۱۸) تعریف شده‌اند.

$$K_i = M_i U \Sigma G_{i1}^{-1} \Sigma^{-1} U \quad (20)$$

۴- شبیه‌سازی‌های عددی

در این بخش ابتدا نتایج شبیه‌سازی برای یک مثال عددی ساده و سپس یک مثال کاربردی (موتور BLDC) برای نشان دادن صحت و کارایی روش مطرح‌شده، ارائه شده است. به‌منظور طراحی کنترل‌کننده از نرم‌افزار متلب و جعبه‌ابزار [۳۳] YALMIP برای حل نامساوی‌های ماتریسی استفاده شده است.

۴-۱- مثال عددی

ماتریس‌های سیستم رابطه (۱) به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.7 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$$

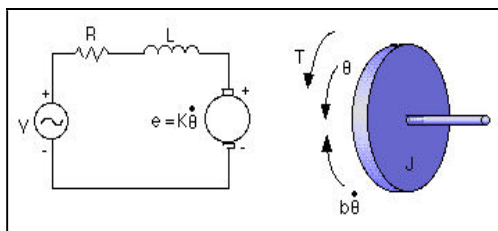
با فرض $\tau = 3$ ، تأخیر τ_k به‌وسیله یک فرآیند مارکوف با ماتریس احتمال انتقال به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & ? & ? & 0 \\ ? & 0.4 & ? & 0 \\ 0.5 & 0.3 & ? & ? \\ 0.2 & ? & ? & ? \end{bmatrix} \quad (21)$$

یک تحقق تصادفی از فرآیند مارکوف تولیدشده توسط ماتریس احتمال انتقال (۲۱) در شکل ۳ نشان داده شده است.

خطی تولید کند. در موتورهای BLDC عمل کوموتاسیون توسط کلیدهای الکترونیکی انجام می‌شود و برخلاف موتورهای DC معمول نیاز به کموتاتور مکانیکی و جاروبک ندارند. حذف کموتاتور و جاروبک در این موتورها، مزایایی نظیر قابلیت اطمینان بالاتر و عدم نیاز به تعمیر، کارکرد در سرعت‌های بالاتر، حذف انواع تداخلات فرکانس رادیویی، حذف جرقه اتصال جاروبک‌ها به کنترل، کاهش وزن و حجم روتور را به همراه دارد. با پیشرفت تکنولوژی‌های الکترونیک قدرت این موتورها کاربردهای فراوانی در ربات‌ها، لوازم خانگی، هوافضا، فن‌ها، قلب مصنوعی، اتوماسیون کارخانه‌ها، وسایل نقلیه برقی و ... پیدا کرده‌اند. ادامه این بخش به طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی برای پایدارسازی یک موتور BLDC تحت شبکه در حضور تأخیر تصادفی شبکه اختصاص یافته است.

یک موتور DC بدون جاروبک را در نظر بگیرید. مدار الکتریکی و دیگرام آزاد روتور در شکل ۷ نشان داده شده‌اند. همچنین پارامترهای فیزیکی موتور در جدول ۱ آورده شده‌اند.

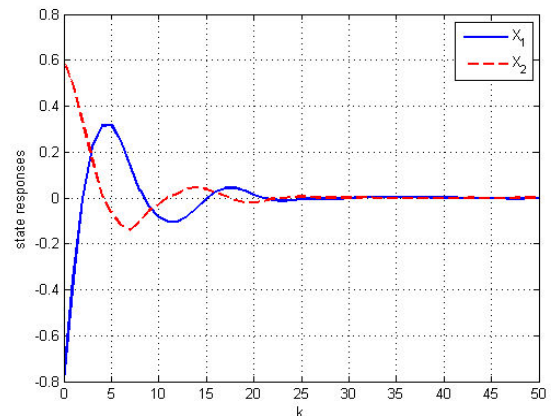


شکل ۷: موتور DC

جدول ۱: پارامترهای فیزیکی موتور DC

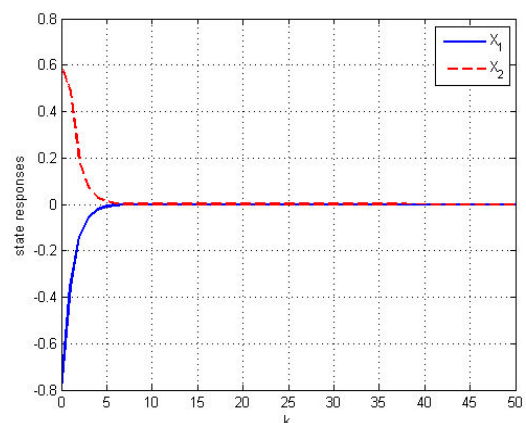
پارامترهای فیزیکی	مقادیر
ممان اینرسی روتور	$J = 3.228 \times 10^{-6} \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
ضریب میرایی سیستم مکانیکی	$C_m = 3.5 \times 10^{-6} Nm \cdot s$
ثابت نیروی الکتروموتوری	$K = K_e = K_t = 0.0274 \frac{N \cdot m}{Amp}$
مقاومت الکتریکی	$R = 4\Omega$
اندوکتانس الکتریکی	$L = 2.75 \times 10^{-6} H$
ولتاژ منبع تغذیه (ورودی)	V
موقعیت شفت (خروجی)	θ

حال با استخراج معادلات حالت سیستم بر اساس اصول فیزیکی و با در نظر گرفتن جریان روتور، موقعیت و سرعت دورانی موتور به عنوان متغیرهای حالت، مدل فضای حالت سیستم به صورت (۲۲) به دست می‌آید:



شکل ۵: پاسخ زمانی حالت‌های سیستم به ازای میانگین‌گیری از ۱۰۰ پاسخ تصادفی

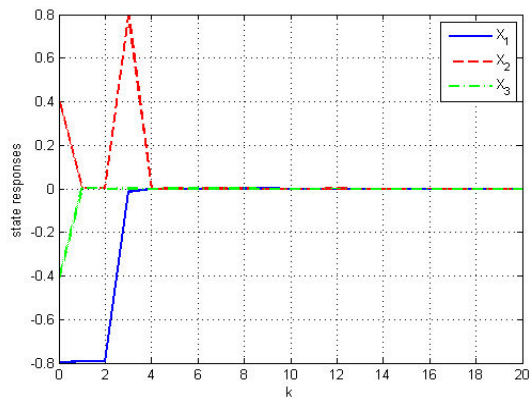
شایان ذکر است مقالاتی که تاکنون در زمینه پایدارسازی تصادفی زمان-محدود این کلاس خاص از سیستم‌ها وجود داشته است، عمدتاً از کنترل کننده فیدبک حالت استفاده کرده‌اند. استفاده از کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیک به منظور پایدارسازی زمان-محدود این کلاس از سیستم‌ها کاری است که در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته است. باین وجود مقایسه نتایج مقاله با مرجع [۲۷] که از کنترل کننده فیدبک حالت استفاده کرده است برای این مثال انجام گرفته است. شکل ۶ پاسخ زمانی حالت‌های سیستم برای کنترل کننده فیدبک حالت ارائه شده در مرجع [۲۷] را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود، پایدارسازی تصادفی زمان-محدود در هر دو به خوبی انجام شده است و نتایج روش ارائه شده در مقاله با وجود این که از کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیک استفاده کرده است، قابل قبول است.



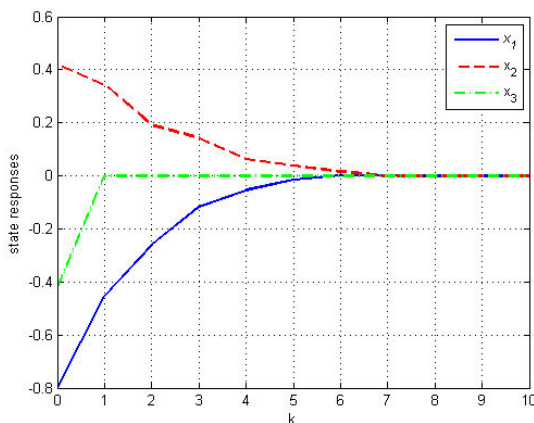
شکل ۶: پاسخ زمانی حالت‌های سیستم مثال عددی به ازای کنترل کننده فیدبک حالت مرجع [۲۷]

۴-۲- مثال کاربردی (موتور DC بدون جاروبک)

یکی از محرک‌های رایج در سیستم‌های کنترلی موتور DC است که به طور مستقیم می‌تواند حرکت دورانی و به طور غیرمستقیم حرکت



شکل ۹: پاسخ زمانی حالت‌های سیستم به ازای فرآیند مارکوف شکل ۸



شکل ۱۰: پاسخ زمانی حالت‌های سیستم به ازای میانگین گیری از ۱۰۰ پاسخ تصادفی

همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، با توجه به (c_1, c_2, R, N) شرط پایداری تصادفی زمان-محدود برآورده شده است و کارایی روش پیشنهادی را تضمین می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا یک سیستم کنترل تحت شبکه در حضور تأخیر تصادفی شبکه، در چارچوب سیستم‌های پرش مارکوف مدل شده است. سپس با توجه به تعریف پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم پرش مارکوف زمان-گسسته خطی، معیاری برای تضمین پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم در قالب قیود نامساوی ماتریسی خطی فراهم شده است. علاوه بر این طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی وابسته به مد با فرض نامعینی در ماتریس احتمال انتقال، از طریق نامساوی‌های ماتریسی خطی جدید انجام گرفته است. در نهایت نتایج شبیه‌سازی دو مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، ارائه شده است.

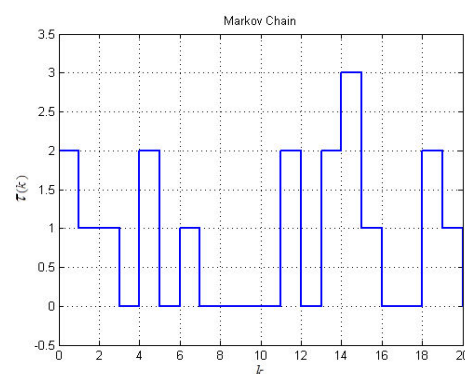
پیوست‌ها

لم مکمل شر: برای ماتریس متقارن Q ، رابطه زیر همواره برقرار است [۱]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{C_m}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \\ y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (22)$$

که با توجه به جدول ۱ و معادلات (۲۲) و با دوره نمونه‌برداری $T=1$ نسخه گسسته-زمان سیستم (۱) به دست می‌آید. با فرض $\tau=3$ ، تأخیر τ_k به وسیله یک فرآیند مارکوف با همان ماتریس احتمال انتقال (۲۱) مثال قبل مدل می‌شود. یک تحقق تصادفی از فرآیند مارکوف تولیدشده توسط ماتریس احتمال انتقال (۲۱) در شکل ۸ نشان داده شده است.

با در نظر گرفتن $\alpha=0/17$ و $c_2=10$ ، $c_1=1$ ، $N=50$ ، $R=I$ ابتدا با استفاده از جعبه‌ابزار YALMIP برای حل نامساوی‌های ماتریسی (۱۲) تا (۱۵) یک پاسخ شدنی برای ماتریس‌های G_{i2} ، G_{i1} ، $X_i > 0$ ، M_i و G_{i3} به دست آورده شده و سپس از رابطه (۲۰) بهره‌های کنترل‌کننده محاسبه شده و به سیستم اعمال می‌شوند. شکل ۹ پاسخ زمانی حالت‌های سیستم را به ازای شرایط اولیه $x_0 = [-0.8 \ 0.42 \ -0.42]^T$ و فرآیند مارکوف شکل ۸ نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۹ برمی‌آید، حالت‌های سیستم به مفهوم مربعات میانگین از یک حد معینی و در یک بازه زمانی محدود تجاوز نکرده است و شرط پایداری تصادفی زمان-محدود سیستم برآورده شده است. مشابه مثال قبل شکل ۱۰ با میانگین‌گیری از ۱۰۰ بار شبیه‌سازی سیستم فوق به ازای ۱۰۰ فرآیند مارکوف تصادفی، به دست آمده است.



شکل ۸: یک تحقق تصادفی از فرآیند مارکوف حاصل از ماتریس احتمال انتقال (۲۱)

- approach,” in *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, 2000, vol. 3, pp. 2199–2204.
- [18] L. Zhang, Y. Shi, T. Chen and B. Huang, “A new method for stabilization of networked control systems with random delays,” *Autom. Control IEEE Trans. On*, vol. 50, no. 8, pp. 1177–1181, 2005.
- [19] S.-W. Gao and G.-Y. Tang, “Output feedback stabilization of networked control systems with random delays,” in *18th IFAC World Congress, Milano*, 2011, pp. 3250–3255.
- [20] J. Wu and T. Chen, “Design of Networked Control Systems With Packet Dropouts,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 52, no. 7, pp. 1314–1319, Jul. 2007.
- [21] D. Xie, X. Han, H. Huanq and Z. Wang, “Research on robust mean square stability of networked control systems with packet dropout,” *J. Syst. Eng. Electron.*, vol. 21, no. 1, pp. 95–101, Feb. 2010.
- [22] M. Yu, L. Wang, T. Chu and G. Xie, “Modelling and control of networked systems via jump system approach,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 2, no. 6, pp. 535–541, Jun. 2008.
- [23] L. Zhang and E.-K. Boukas, “ H_∞ control for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 19, no. 8, pp. 868–883, 2009.
- [24] S. Ma, E.-K. Boukas and Y. Chinniah, “Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 20, no. 5, pp. 531–543, 2010.
- [25] R. Oliveira, A. N. Vargas, J. B. R. do Val and P. L. D. Peres, “Robust stability, $\mathcal{H}_2$ analysis and stabilisation of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain probability matrix,” *Int. J. Control*, vol. 82, no. 3, pp. 470–481, 2009.
- [26] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino and G. De Tommasi, *Finite-Time Stability and Control*, vol. 453. London: Springer London, 2014.
- [27] Z. Zuo, Y. Liu, Y. Wang and H. Li, “Finite-time stochastic stability and stabilisation of linear discrete-time Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 6, no. 10, pp. 1522–1526, Jul. 2012.
- [28] Y. Wei and W. X. Zheng, “Finite-time stochastic stabilisation of Markovian jump non-linear quadratic systems with partially known transition probabilities,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 8, no. 5, pp. 311–318, 2014.
- [29] Z. Zuo, H. Li, Y. Liu and Y. Wang, “On Finite-Time Stochastic Stability and Stabilization of Markovian Jump Systems Subject to Partial Information on Transition Probabilities,” *Circuits Syst. Signal Process.*, vol. 31, no. 6, pp. 1973–1983, Dec. 2012.
- [30] X. Luan, F. Liu and P. Shi, “Observer-based finite-time stabilization for extended Markov jump systems,” *Asian J. Control*, vol. 13, no. 6, pp. 925–935, Nov. 2011.
- [31] J. Cheng, H. Zhu, S. Zhong, Y. Zeng and L. Hou, “Finite-time H_∞ filtering for a class of discrete-time Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities,” *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, vol. 28, no. 10, pp. 1024–1042, Oct. 2014.
- [32] B. Øksendal, *Stochastic differential equations*. Springer, 2003.
- [33] J. Lofberg, “YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” in *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, 2004, pp. 284–289.
- $$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{11} > 0 \\ Q_{22} - Q_{12}^* Q_{11}^{-1} Q_{12} > 0 \end{cases}$$
- or
- $$\begin{cases} Q_{22} > 0 \\ Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^* > 0 \end{cases}$$
- مراجع
- [1] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] N. N. Krasovskii and E. A. Lidskii, “Analysis design of controller in systems with random attributes,” *Part*, vol. 1, pp. 1021–1025.
- [3] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso and M. G. Todorov, *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [4] E.-K. Boukas, *Stochastic switching systems: analysis and design*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] L. Zhang and E.-K. Boukas, “Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities,” *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 463–468, 2009.
- [6] L. Zhang, E.-K. Boukas and J. Lam, “Analysis and Synthesis of Markov Jump Linear Systems With Time-Varying Delays and Partially Known Transition Probabilities,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 53, no. 10, pp. 2458–2464, Nov. 2008.
- [7] M. F. Braga, C. F. Morais, R. C. Oliveira and P. L. Peres, “Robust stability and stabilization of discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probability matrix,” in *American Control Conference (ACC), 2013*, 2013, pp. 6784–6789.
- [8] W. Zhang, M. S. Branicky and S. M. Phillips, “Stability of networked control systems,” *Control Syst. IEEE*, vol. 21, no. 1, pp. 84–99, 2001.
- [9] Y. Tipsuwan and M.-Y. Chow, “Control methodologies in networked control systems,” *Control Eng. Pract.*, vol. 11, no. 10, pp. 1099–1111, Oct. 2003.
- [10] Y. Ge, L. Tian and Z. Liu, “Survey on the stability of networked control systems,” *J. Control Theory Appl.*, vol. 5, no. 4, pp. 374–379, Nov. 2007.
- [11] Y. Ke-You and X. Li-Hua, “Survey of recent progress in networked control systems,” *Acta Autom. Sin.*, vol. 39, no. 2, pp. 101–117, 2013.
- [12] F.-Y. Wang and D. Liu, Eds., *Networked Control Systems*. London: Springer London, 2008.
- [13] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi and Y. Xu, “A Survey of Recent Results in Networked Control Systems,” *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, Jan. 2007.
- [14] G. C. Walsh and H. Ye, “Scheduling of networked control systems,” *Control Syst. IEEE*, vol. 21, no. 1, pp. 57–65, 2001.
- [15] L. Zhang, H. Gao and O. Kaynak, “Network-Induced Constraints in Networked Control Systems—A Survey,” *IEEE Trans. Ind. Inform.*, vol. 9, no. 1, pp. 403–416, Feb. 2013.
- [16] D. Yue, Q.-L. Han and C. Peng, “State Feedback Controller Design of Networked Control Systems,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs*, vol. 51, no. 11, pp. 640–644, Nov. 2004.
- [17] L. Xiao, A. Hassibi and J. P. How, “Control with random communication delays via a discrete-time jump system

زیرنویس ها

-
- ¹ Networked control system
 - ² Markovian jump systems
 - ³ Transition probability matrix
 - ⁴ Finite-time stochastic stability
 - ⁵ Linear matrix inequalities
 - ⁶ Brushless DC motor
 - ⁷ Heating, ventilating, and air conditioning
 - ⁸ Deterministic systems
 - ⁹ Stochastic systems
 - ¹⁰ Schur complement
 - ¹¹ Feasible solution