

طراحی یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی برای پایداری سازی زمان محدود و مقاوم پرنده چهارملخه

علیرضا مدیرروستا^۱، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ مهدی خدابنده^۲، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی همدان - همدان - ایران - alirezamodirrousta@stu.hut.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی همدان - همدان - ایران - khodabandeh@hut.ac.ir

چکیده: در این مقاله، پایداری سازی زمان محدود، برای یک ربات پرنده چهارملخه (Quadrotor) بر مبنای یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی با سطح لغزش ترمینال غیر تکین ارائه شده است. در ابتدا مدل سیستم معرفی شده و به دو سیستم با تحریک کامل و با تحریک محدود تقسیم می‌شود. سپس کنترل کننده جدیدی بر مبنای هندسه همگنی و کنترل مد لغزشی برای این دو سیستم ارائه می‌شود. هدف از این روش، ارائه یک کنترل کننده مقاوم نسبت به اغتشاش خارجی و عدم قطعیت‌های نامعلوم سیستم است. برای بهبود و بالا بردن دقت ردیابی و عملکرد کنترل کننده در حضور اغتشاش خارجی انتگرال خطا به عنوان متغیر جدید حالت به مجموعه خطاهای ردیابی سیستم اضافه شده است. در پایان، برای اثبات کارایی و مقاوم بودن کنترل کننده پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی و مقایسه در حضور اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: پرنده چهارملخه، کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی، پایداری سازی زمان محدود، عدم قطعیت روی اینرسی، اغتشاش خارجی.

Design of an Adaptive Integral Sliding Mode Control for Robust and Finite Time Stabilization for a Quadrotor

A. r. Modirrousta¹, MSc Student; M. Khodabandeh², Assistant Professor

1- Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran, Email: alirezamodirrousta@stu.hut.ac.ir

2Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran, Email: khodabandeh@hut.ac.ir

Abstract: In this paper, finite time stabilization for a quadrotor has been presented based on an adaptive sliding mode control with nonsingular terminal surface. The introduced system model has been divided into the full actuated and under actuated system. Then, a new controller based on homogeneity geometry and sliding mode control has been proposed for these two subsystems. The main purpose of the control scheme is proposing a robust controller against the unknown uncertainty and external disturbance. The integral error has been added into the set of tracking errors to raise the tracking accuracy and to improve the controller performance against external disturbance. Finally, the results of the simulation and comparison study in the presence of inertia uncertainty and external disturbance have been presented to demonstrate the robustness and high performance of the controller.

Keywords: Quadrotor, Adaptive integral sliding mode control, Finite time stabilization, Inertia uncertainty, External disturbance.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۲۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۰۷/۲۰، ۱۳۹۳/۰۹/۱۱ و ۱۳۹۳/۱۰/۰۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۱۲/۲۷

نام نویسنده مسئول: مهدی خدابنده

نشانی نویسنده مسئول: ایران - همدان - بلوار شهید فهمیده - خیابان مردم - دانشگاه صنعتی همدان.

۱- مقدمه

پرنده بدون سرنشین^۱ (UAV) چهارمخه یکی از پرکاربردترین خودروهای بدون سرنشین است که اخیراً مورد توجه محققان قرار گرفته است. از جمله کاربردهای پرنده چهارمخه در هدایت، نقشه برداری از مناطق صعب العبور، رهایی و نجات، اجرای قانون و حمل و نقل است [۳-۱]. علاوه بر این، در این زمینه هنوز چالش‌های زیادی در مهندسی از جمله در مهندسی برق، مکانیک و کنترل وجود دارد. پرنده چهارمخه جزو هواپیماهایی با امکان فرود و برخاست عمودی^۲ (VTOL) طبقه بندی می‌شوند. این نوع از پرنده‌ها مزایای زیادی نسبت به هواپیماهای ملخ دار گذشته و متداول دارند. در پرنده چهارمخه، حرکت‌های طولی توسط تغییر سرعت در ملخک جلویی و عقبی به دست می‌آید. جابه‌جایی عرضی توسط ملخک‌های سمت چپ و راست ایجاد می‌شود و جابه‌جایی در محور عمودی توسط اختلاف بین هر جفت از ملخک‌ها ایجاد می‌شود. به‌طور مثال دو ملخک در جهت عقربه‌های ساعت و دوتای دیگری در خلاف جهت آن می‌چرخند و ایجاد شتاب در محور عمودی می‌کنند.

این نوع از خودروها دارای تحریک محدود^۳ می‌باشند. به‌طور مثال با وجود ۶ درجه آزادی برای سیستم تنها چهار عملگر برای کنترل آن وجود دارد. این چهار تحریک کننده گشتاور و نیروی ناشی از الکتروموتورهای مرتبط با هر ملخک می‌باشند. بنابراین روش‌های مرسوم برای کنترل سیستم‌های مکانیکی با تحریک کامل از جمله ربات‌های مختلف در اینجا به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست [۴]. برای دستیابی به هدف پرواز هوشمند با عملکرد و کیفیت بالا نیاز به مدل‌سازی سیستم وجود دارد. روش‌های مدل‌سازی غیر خطی در سال‌های اخیر توسعه یافته است و در این مقاله از مدل پرنده به دست آمده در مقالات [۷-۵] استفاده شده است. مدل‌سازی به کار گرفته بر اساس روش لاگرانژ و برخی از فرض‌های معمول و عملی به کار گرفته شده در آن است. در اینجا برخی از روش‌های مختلفی را که در سال‌های اخیر برای کنترل پرنده چهارمخه استفاده شده است؛ مرور می‌کنیم. در میان روش‌هایی که برای کنترل پرنده بدون سرنشین چهارمخه به کار گرفته شده است، روش خطی‌سازی فیدبک [۱۰-۸] و روش پس‌گام^۴ [۱۱] بیشترین کاربرد و استفاده را داشته‌اند. اگرچه زمانی که اطلاعات دقیقی نسبت به دینامیک سیستم وجود نداشته باشد و یا اگر سیستم در معرض اغتشاشات خارجی و نویز قرار داشته باشد، استفاده از مدل ساده این روش‌ها عملاً مناسب نیست، زیرا که دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاش خارجی سبب ناپایداری در حرکت پرنده می‌شوند و امکان جبران اثر آن‌ها توسط این روش وجود ندارد. در میان روش‌های کنترل غیر خطی، روش کنترل مد لغزشی^۵ به علت مقاومت بالا مناسب به نظر می‌رسد. بنابراین در ادامه به بررسی روش‌های مبتنی بر کنترل مد لغزشی می‌پردازیم. روش متداول کنترل لغزشی برای بهبود عملکرد مقاوم کنترل کننده پرواز پرنده چهارمخه در [۱۲] به کار رفته است. در این مقاله به علت وجود تابع علامت در

سیگنال کنترل، نوسان شدیدی در نقطه تعادل سطح لغزش وجود دارد. با وجود این که این روش مقاوم است ولی نیاز به اطلاع از اندازه کران بالای نامعینی‌ها و اغتشاش سیستم، این روش را ناکارآمد کرده است. همچنین در این مقاله به ازای هر درجه آزادی و به کمک ساختن ورودی کنترل مجازی، از یک سطح لغزش تعریف استفاده شده است و در انتها باید مقادیر عملی وضعیت پرنده از روی ورودی‌های مجازی به دست آورده شوند. در بسیاری از مقالات دیگر که برخی در ادامه معرفی می‌شوند، از روش مشابه و یا روابط دینامیک معکوس برای ایجاد ورودی کنترل مجازی استفاده شده است. در [۱۳] از روش کنترل مد لغزشی ساده و کنترل تطبیقی برای پایداری و کنترل وضعیت پرنده و تخمین برخی از پارامترهای نامعلوم سیستم استفاده شده است. در مرجع [۱۴]، به کمک روش کنترل مد لغزشی و طراحی رویکرد برای اغتشاش، مقاومت سیستم در برابر اغتشاش و عدم قطعیت بهبود یافته است و دیگر نیازی به بالا بردن بهره برای جبران اثر و تغییرات ناشی از اغتشاش نیست و کنترل کننده طراحی شده به سرعت این تغییرات را جبران می‌کند. در مرجع [۱۵] نیز یک روش کنترل مد لغزشی مرتبه دو برای سیستم با تحریک محدود پرنده ارائه شده است، البته اغتشاش تنها روی مدل حرکت انتقالی پرنده در نظر گرفته شده است. در این روش، محدوده مشخصی برای تعیین پارامترهای سطح لغزش وجود دارد که بر اساس این مقادیر پایداری سطح لغزش برقرار خواهد بود. بنابراین، عدم امکان استفاده از این مقادیر در محدوده‌های مختلف برای سطح لغزش، سبب کاهش شدید انعطاف پذیری کنترل کننده و رفتار پرنده می‌شود. مقاله [۱۶]، کنترل کننده‌ای بر پایه تکنیک پس گام بلوکی با الگوریتم پیچش فوق العاده^۶ کنترل مد لغزشی ترکیب شده است تا ردیابی مسیر حرکتی پرنده برقرار شود. روش کنترل مد لغزشی مرتبه بالاتر^۷ برای افزایش مقاومت سیستم در مقابل دینامیک‌های مدل نشده و پارامترهای نامعین ارائه شده و همچنین برای رؤیت و تخمین اغتشاش در [۱۷] ارائه شده است. مرجع [۱۸] نیز روش‌های کنترل مد لغزشی به نام پیچش فوق العاده را برای کنترل حرکت پرنده ارائه کرده است، در این روش نیز، برای هر خروجی یک کنترل کننده در نظر گرفته شده است. در این مقاله از دو انتگرال گیر برای افزایش درجه نسبی سیستم و ایجاد مشتق گیر مقاوم استفاده شده است. همچنین به تازگی روش کنترل مد لغزشی برای سیستم‌های با تحریک محدود بهبود داده شده است [۱۹]. در مقاله [۲۰] کنترل کننده‌ای مقاوم بر این اساس و با سطح لغزش متداول برای سیستم‌هایی با درجه بالاتر طراحی شده است.

کنترل مد لغزشی به علت خطای کم و سادگی کاربرد آن، یکی از مهم‌ترین روش‌های کنترل غیر خطی است [۲۱]. در واقع روش مد لغزشی به دو قسمت: اول انتخاب سطح لغزش پایدار و دوم انتخاب قانون کنترل مناسب تقسیم می‌شود. در این مقاله روش کنترل مد لغزشی با یک سطح لغزش انتگرالی غیر تکین ترمینال و پایداری زمان محدود برای یک هواپیمای چهارمخه بدون سرنشین به گونه‌ای ارائه

است. این فرض زمانی که پرنده در حالت شناور^{۱۲} و یا حالت شبیه آن پرواز می‌کند، جایی که پرنده چهارملمخه معمولاً به این شکل پرواز می‌کند، قابل قبول است.

مدل پرنده چهارملمخه در چارچوب اختیاری نسبت به چارچوب مرجع برای حرکت انتقالی و دورانی همان‌طور که در بسیاری از مقالات مرجع مانند [۱] و [۵-۱۲]، [۱۵]، [۱۹]، [۲۰] آمده است؛ با در نظر گرفتن فرض‌های ساده و عملی فوق مطابق با معادلات زیر به دست آمده می‌آید. در ابتدا معادلات حرکت انتقالی معرفی می‌گردد:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) u_1 \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) u_1 \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} (\cos\phi \cos\theta) u_1 - g \end{cases} \quad (1)$$

واضح است که x ، y و z بیانگر موقعیت نسبی پرنده در مختصات دکارتی می‌باشند.

تذکر (۱): برای ساده‌نویسی و اجتناب از طولانی شدن روابط تابعیت زمان برای متغیرها حذف شده است.

همچنین معادلات حرکت دورانی پرنده چهارملمخه به شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi} \frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta}\Omega_r + \frac{l}{I_x} u_2 \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}\dot{\phi} \frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{J_r}{I_x} \dot{\phi}\Omega_r + \frac{l}{I_y} u_3 \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{l}{I_z} u_4 \end{cases} \quad (2)$$

در عمل شرایط زیر برای زوایای اوپلر برقرار است:

$\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\psi \in (-\pi, \pi)$ که در آن، $\Omega_r = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$ و Ω_i سرعت زاویه‌ای ملخک i ام را برای $i=1, 2, 3, 4$ نشان می‌دهد. I_x ، I_y و I_z اینرسی متناسب با محورهای دکارتی را نشان می‌دهند. همچنین سیگنال کنترل در معادلات (۱) و (۲) به شکل زیر به دست آورده می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_1 &= (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\ u_2 &= (-F_2 + F_4) \\ u_3 &= (-F_1 + F_3) \\ u_4 &= d(-F_1 + F_2 + F_3 + F_4)/b \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن، $F_i = b\Omega_i^2$ نیروی پرتابی تولیدشده به وسیله چهار ملخک هواپیما یا پرنده را نشان می‌دهد. در واقع این نیرو است که ورودی واقعی سیستم دینامیکی را تشکیل می‌دهد و در نهایت به کمک کنترل کننده طراحی شده سبب پایداری حرکت پرنده می‌شود. همچنین b و d به ترتیب نشان دهنده ضریب بالابری^{۱۳} و عامل تغییر مقیاس نیرو به گشتاور می‌باشند.

شده است که نسبت به اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت کران‌دار پارامترهای مشخص شده مقاوم باشد. همچنین با در نظر گرفتن چند تقریب منطقی مدل سیستم به گونه‌ای به دست آمده که از حداقل پیچیدگی ممکن در طراحی کنترل کننده برای سیستم با تحریک محدود برخوردار باشد. در این مقاله، پس از ارائه سطح لغزش فوق، با استفاده از کنترل تطبیقی و طراحی قانون کنترل مناسب، یک کنترل کننده مقاوم برای تمام سیستم طراحی می‌شود. در واقع به کمک این روش نیازی به اطلاعاتی از کران بالای اغتشاشات سیستم و عدم قطعیت‌های تعریف شده نیست. همچنین یک متغیر انتگرالی به متغیرها و حالت‌های سیستم اضافه می‌گردد تا دقت ردیابی و عملکرد روش ارائه شده را در برابر اغتشاش و عدم قطعیت بهبود دهد. واضح است که متناسب با متغیر انتگرالی اضافه شده، تعریف سطح لغزش نیز تغییر پیدا کرده است. علاوه بر این، یک کران بالا برای عدم قطعیت در نظر گرفته شده و مقادیر ثابت نامعلوم آن به کمک کنترل تطبیقی تخمین زده شده است. همچنین قانون کنترل در حضور سطح لغزش ناتکین ترمینال انتگرالی برای سیستم با تحریک محدود، طوری بهبود داده شده است که علاوه بر این که اغتشاش را در محل سیگنال کنترل (که در معادلات مربوط به متغیرهای حالت شامل زوایای رول^{۱۴} و پیچ^{۱۵} وارد می‌شود) لحاظ کرده، اثر اغتشاش را برای متغیرهای موقعیت X و Y نیز در نظر گرفته است.

سازمان‌دهی مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، نمایش سیستم در مدل فضای حالت سیستم معرفی شده است، کنترل کننده ارائه شده برای حرکت عرضی، طولی و عمودی سیستم در بخش سوم معرفی می‌گردد. در بخش چهارم، شبیه‌سازی‌های عددی به عمل آمده تا مؤثر بودن استراتژی کنترلی پیشنهادی را در حضور اغتشاشات خارجی اثبات نماید. در بخش پنجم نیز نتیجه‌گیری به دست آمده از روش طراحی شده تشریح می‌شود.

۲- مدل پرنده چهارملمخه

برای محاسبه دینامیک پرنده از روش لاگرانژین [۵] استفاده شده است.

همچنین ماتریس انتقال از $[\phi \theta \psi]^T$ به $[pqr]^T$ به صورت

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

بیان می‌شود که

$[\phi \theta \psi]^T$ سرعت زاویه پرنده را در چارچوب مرجع نشان می‌دهد.

ϕ ، θ و ψ زوایای اوپلر^{۱۶} هستند که به ترتیب به آن‌ها زوایای رول، پیچ و یاو^{۱۷} گفته می‌شود. به طور مشابه، $[pqr]^T$ سرعت زاویه‌ای را در چارچوب بدنه پرنده نشان می‌دهد.

از آنجایی که دینامیک چهار روتور بسیار سریع‌تر از دینامیک سیستم اصلی است، در اینجا از آن صرف نظر شده است. می‌توان در نظر گرفت که سرعت زاویه‌ای در دو قاب مرجع و قاب پرنده، یکی

قضیه (۱) [۲۲]: فرض کنید که $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$ به گونه‌ای انتخاب شوند که چندجمله‌ای $s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_2 s + k_1 = 0$ پایدار هوریتز باشد، حال سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

...

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = \omega_{nom}$$

به ازای فیدبک زیر و مقادیر درستی از $0 < \alpha < 1$ ، سیستم در زمان محدودی در نقطه تعادل خود به پایداری می‌رسد:

$$\omega_{nom} = -k_1 \text{sign}(x_1) |x_1|^{\alpha_1} - \dots - k_n \text{sign}(x_n) |x_n|^{\alpha_n} \quad (5)$$

که در آن، $\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} \alpha_i}$ برای $i=2, \dots, n$ و $\alpha_n = 1, \alpha_{n+1} = \alpha$ برقرار می‌باشد.

برای بهبود ردیابی سیستم و همگرایی زمان محدود خطاهای سیستم به سمت نقطه تعادل صفر کافی است دو سطح لغزش انتگرالی ناکین ترمینال بر اساس قضیه (۱) به شکل زیر تعریف کنیم:

$$s_{1,2} = e_2 - e_2(0) - \int_0^t \omega_{1,2} d\tau \quad (6)$$

که در آن، $s_{1,2} = [s_1, s_2]^T$ سطوح لغزشی متناسب با خطای ردیابی ارتفاع و دوران حول محور z هستند. همچنین واضح است که داریم:

$$\dot{s}_{1,2} = \dot{e}_2 - \omega_{1,2} \quad (7)$$

که در آن، $\omega_{1,2} = [\omega_1, \omega_2]^T$ متناسب با ω_{nom} تعریف شده در قضیه (۱) و معادلات (۴) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -k_1 |\xi_z|^{\alpha_1} \text{sign}(\xi_z) - k_2 |e_z|^{\alpha_2} \text{sign}(e_z) \\ &\quad - k_3 |\dot{e}_z|^{\alpha_3} \text{sign}(\dot{e}_z) \\ \omega_2 &= -k_1 |\xi_\psi|^{\alpha_1} \text{sign}(\xi_\psi) - k_2 |e_\psi|^{\alpha_2} \text{sign}(e_\psi) \\ &\quad - k_3 |\dot{e}_\psi|^{\alpha_3} \text{sign}(\dot{e}_\psi) \end{aligned} \quad (8)$$

که e_z و e_ψ به ترتیب همان درایه اول و دوم بردار e_1 بوده که در آن، مقادیر α طبق قضیه (۱) به دست می‌آیند و sign تابع علامت است.

به کمک قضیه (۱) و انتخاب سطح لغزش (۶) پایداری زمان محدود خطاهای سیستم با انتخابی مناسب از مقادیر α_i و k_i برقرار خواهد شد، حال قانون کنترل را به کمک کنترل مد لغزشی و کنترل تطبیقی به گونه‌ای به دست می‌آوریم که سطح لغزش در زمانی محدود به نقطه تعادل خود همگرا شده و در نهایت خطاهای ردیابی در حضور اغتشاش در زمانی محدود صفر شوند. بنابراین، قانون کنترلی به شکل زیر ارائه می‌گردد:

$$U_1 = U_{eg1} + U_{sw1} \quad (9)$$

۳- طراحی کنترل کننده برای پرنده چهارمخه

در این بخش، مدل پرنده به دو مجموعه با تحریک کامل و دیگری مدل با تحریک محدود تقسیم می‌کنیم. حرکت عمودی سیستم شامل حرکت انتقالی در محور z و حرکت چرخشی حول آن (زاویه یاو) به عنوان سیستم کاملاً تحریک شده در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که حرکت انتقالی و چرخشی حول محور x و y تنها توسط دو تحریک کننده قابل کنترل هستند، این مجموعه را که از خروجی مفروض تنها دو ورودی کنترل دارد، سیستم با تحریک محدود می‌نامیم. خروجی هر یک از این سیستم‌ها توسط یک کنترل کننده غیر خطی هدایت می‌شود که هر دو کنترل کننده بر اساس کنترل مد لغزشی انتگرالی ناکین ترمینال، کنترل تطبیقی و متناسب با مرتبه آن طراحی می‌شوند.

۳-۱- طراحی کنترل کننده برای سیستم با تحریک کامل

همان طور که گفته شد، مدل پرنده چهارمخه را می‌توان به دو سیستم تحریک محدود و تحریک کامل تقسیم کرد، در این بخش یک کنترل کننده و پایداری برای سیستم شامل حرکت و دوران حول محور z طراحی می‌شود.

مدل سیستم با تحریک کامل به کمک اضافه کردن متغیر کمکی انتگرالی و در نظر گرفتن خطای ردیابی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= f_1 + g_1 U_1 + d_1 \end{aligned} \quad (4)$$

متغیرهای خطای حالت سیستم کاملاً تحریک شده می‌باشند و $[z_d, \psi_d]^T$ مقادیر مطلوب ارتفاع و دوران حول محور z هستند و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} g_1 &= \left[\frac{1}{m} (\cos\phi \cos\theta), 0, 0, \frac{l}{I_z} \right]^T, \\ f_1 &= \left[-g - \ddot{z}_d, \phi \dot{\theta} \frac{I_x - I_y}{I_z} - \ddot{\psi}_d \right]^T, \end{aligned}$$

$d_1 = [d_z, d_\psi]^T$ اثر اغتشاش خارجی روی پرنده است.

فرض (۱): تمام اغتشاش‌های در نظر گرفته شده روی دینامیک سیستم کران دار بوده و در شرط $|d_z| < \rho_2, |d_\psi| < \rho_1$ صدق می‌کنند. به طوری که ρ_1 و ρ_2 اعدادی ثابت، مثبت و نامشخص هستند و بقیه پارامترها بعداً تعریف می‌شوند.

حال با در نظر گرفتن قضیه زیر به طراحی سطح لغزش مناسب برای سیستم می‌پردازیم.

مقدار تخمین زده شده و سطح لغزش در زمانی محدود به نقطه تعادلشان همگرا می شوند [۲۴، ۲۵]. در نتیجه خطای ردیابی و یا پایداری سیستم در زمانی محدود به صفر همگرا می شود.

۲-۳- طراحی کنترل کننده برای سیستم با تحریک محدود

در این بخش، پیش از این که به معرفی کنترل کننده طراحی شده پردازیم، مدل حرکت عرضی و طولی پرنده چهارمخه را بازنویسی و اصلاح می کنیم. کنترل کننده حرکت و دوران در طول محور z در بخش قبل طراحی شد. پارامترهای ثابت برای این کنترل کننده را می توان به شکلی انتخاب کرد که سرعت همگرایی خطاهای e_1, e_2 بیشتر شده و در یک زمان به اندازه کافی کوچک، حالت های z, ψ به مقادیر مطلوبشان همگرا شوند و داریم:

$$r \rightarrow 0, \psi \rightarrow \psi_d \quad (16)$$

بنابراین، با جایگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱) و با در نظر گرفتن این فرض که زوایای پیچ و رول در محدوده ای کوچک تغییر می کنند یعنی $\tan(\theta) \approx \theta, \tan(\phi) \approx \phi$ و با استفاده از معادله (۱۶) که منطقی و عملی نیز می باشد، معادلات سیستم با تحریک محدود در معادلات (۱) و (۲) که توصیف کننده حرکت عرضی و طولی می باشند به شکل زیر در می آیند [۲۶]:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= f_2 + d_2 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= f_3 + g_2 U_2 + d_3 \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن، داریم:

$$\begin{aligned} U_2 &= [u_3, u_2]^T, y_1 = [x, y]^T, y_2 = [\dot{x}, \dot{y}]^T, \\ y_3 &= [\theta, \phi]^T, y_4 = [\dot{\theta}, \dot{\phi}]^T, g_2 = \text{diag}\left[\frac{l}{I_y}, \frac{l}{I_x}\right], \\ f_2 &= [\theta \cdot g, -g \phi]^T \end{aligned}$$

و همچنین بر اساس معادلات (۲) داریم:

$$f_3 = \left[\dot{\psi} \phi \frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{J_r}{I_x} \dot{\phi} \Omega, \theta \dot{\psi} \frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{J_r}{I_x} \theta \dot{\Omega}_r \right]^T$$

اغتشاش خارجی مؤثر روی هریک از خروجی های سیستم نیز با

$$d_2 = [d_x, d_y]^T \text{ و } d_3 = [d_\theta, d_\phi]^T$$

در واقع معادلات بالا نوعی از معادلات خطی سازی شده سیستم است که هدف ردیابی یک موقعیت خاص توسط پرنده با تغییرات کم و مناسب در زوایای اوپلر آن می باشد. حالا با اضافه کردن متغیر کمکی انتگرال گیر که برای بهبود دقت ردیابی استفاده شده، معادلات خطی سازی سیستم را بدون در نظر گرفتن اغتشاش به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

به طوری که $U_{eq1} = g_1^{-1}(-f_1 + \omega_{1,2})$ و داریم:

$$U_{sw1} = g_1^{-1}(-\hat{G} \text{sign}(s_{1,2})) \quad (10)$$

به طوری که $\hat{G} = [\hat{G}_1, \hat{G}_2]^T$ پارامترهای تطبیقی بوده و قانون تطبیق آن در هر لحظه از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{\hat{G}} = S^{1,2} \cdot q \quad (11)$$

که در آن، $S^{1,2} = \text{diag}[|s_1|, |s_2|]$ ، $q = [q_1, q_2]^T$ عددی مثبت و بین صفر و یک است. با توجه به تعریف $U_1 = [u_1, u_4]^T$ رابطه مربوط به محاسبه قانون کنترل u_1 به شکل زیر به دست می آید. محاسبه u_4 نیز به شکل مشابه می باشد.

$$u_1 = \frac{m}{(\cos \phi \cos \theta)}(g + r) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} r &= \omega_1 + u_{swz} \\ u_{swz} &= -\hat{G}_1 \text{sign}(s_1) \end{aligned} \quad (13)$$

ω_1 از معادله (۸) به دست می آید و بقیه پارامترها متناسب با درایه های تناظر معادله (۴) تعریف می شوند.

برای این که نشان دهیم سیستم معرفی شده در زمان محدودی پایدار است متغیر z را در نظر گرفته و پایداری سطح لغزش انتگرالی معرفی شده برای آن بررسی می شود. بدیهی است که پایداری سطح لغزش دیگر برای ردیابی متغیر ψ به طور مشابه اثبات می شود که از بیان آن خودداری می کنیم.

اثبات: تابع لیاپانوف زیر را در نظر می گیریم:

$$V_1 = \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{G}_1^2$$

فرض می شود تغییرات پارامتر تطبیقی آهسته است و $\tilde{G}_1 = \hat{G}_1 - G_1$ خطای مقدار تخمین زده می باشد، با مشتق گرفتن از تابع لیاپانوف نسبت به زمان و به کار گرفتن معادله (۴) و معادلات (۷) تا (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s_1 \dot{s}_1 + \dot{\hat{G}}_1 \tilde{G}_1 = s_1 (-\hat{G}_1 \text{sign}(s_1) + d_z) + \dot{\hat{G}}_1 \tilde{G}_1 \\ \dot{V}_1 &\leq -|s_1| \tilde{G}_1 - |s_1| (G_1 - d_z) + q_1 |s_1| \tilde{G}_1 \\ \dot{V}_1 &\leq -\tilde{G}_1 (|s_1| - q_1 |s_1|) - |s_1| (G_1 - d_z) \end{aligned} \quad (14)$$

طبق روابط بالا به ازای مقداری مناسب از G_1 که به ازای آن داشته باشیم $G_1 < |d_z|$ و $\tilde{G}_1 > 0$ و با انتخاب مناسب q_1 به گونه ای که داشته باشیم $1 - q_1 > 0$ می توان نشان داد که داریم [۲۴]:

$$\dot{V}_1 < -\min(\beta_1 / \sqrt{2}, \beta_2 / \sqrt{2}) V_1^{1/2} \quad (15)$$

که در آن، داریم $\beta_1 = |s_1| - q_1 |s_1|$ و $\beta_2 = G_1 - d_z$ ، رابطه (۱۵) نشان می دهد که با فرض این که رابطه $G_1 > \rho_1$ برقرار باشد،

کنترل کننده طراحی شده برای حرکت عرضی و طولی پرنده چهارمخه خطای حرکت انتقالی و دورانی پرنده حول محور x و y در زمانی محدود به صفر همگرا می شود.

۴- بهبود کنترل کننده به کمک آنالیز عدم قطعیت روی اینرسی دستیابی به یک مدل دقیق برای دینامیک سیستم بسیار سخت بوده و کاهش وابستگی کنترل کننده به مدل سیستم سبب بهبود عملکرد آن در شرایط مختلف و مخصوصاً زمانی که اغتشاش و نامعینی هر دو باهم وجود دارند، می شود. این موضوع برای انواع ربات و سازه های مختلف صادق و برقرار است، به طور مثال در مقاله [۲۷] این موضوع برای سیستم های موشکی در نظر گرفته شده است و به کمک کنترل کننده تطبیقی دیگری، کنترل کننده بهبود یافته است. برای افزایش کارایی کنترل کننده در حضور اغتشاش و عدم قطعیت، در این بخش بهره متغیر با زمان کنترل کننده به شکلی مناسب بهبود پیدا می کند.

پارامترهای عدم قطعیت را برای اینرسی بدنه^{۱۴} پرنده حول محور x ، y و z و روی اینرسی ناشی از پره های روتورهای^{۱۵} به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + \Delta I_x \\ I_y &= \bar{I}_y + \Delta I_y \\ I_z &= \bar{I}_z + \Delta I_z \\ J_{ri} &= \bar{J}_r + \Delta J_r \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن، \bar{I}_x ، \bar{I}_y ، \bar{I}_z و \bar{J}_r مقادیر عددی معلوم و پارامترهای ΔI_x ، ΔI_y ، ΔI_z و ΔJ_r مقادیر نامعلومی هستند که سبب ایجاد عدم قطعیت و در نهایت نامعینی روی سیستم می شوند.

فرض (۲): فرض می کنیم مقادیر نامعلوم ΔI_x ، ΔI_y ، ΔI_z و ΔJ_r کران دار بوده و در شرط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} |\Delta I_x| &< J_1 \\ |\Delta I_y| &< J_2 \\ |\Delta I_z| &< J_3 \\ |\Delta J_r| &< J_4 \end{aligned} \quad (24)$$

بنابراین، معادله (۲) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\theta}\psi \frac{\bar{I}_y - \bar{I}_z}{\bar{I}_x} + \frac{\bar{J}_r}{\bar{I}_x} \dot{\theta}\dot{\Omega}_r + \frac{l}{\bar{I}_x} u_2 + \Delta_\phi \\ \ddot{\theta} = \psi\dot{\phi} \frac{\bar{I}_z - \bar{I}_x}{\bar{I}_y} - \frac{\bar{J}_r}{\bar{I}_x} \dot{\phi}\dot{\Omega}_r + \frac{l}{\bar{I}_y} u_3 + \Delta_\theta \\ \ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi} \frac{\bar{I}_x - \bar{I}_y}{\bar{I}_z} + \frac{l}{\bar{I}_z} u_4 + \Delta_\psi \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= E_1 = y_d - y_1 \\ E_2 &= \dot{E}_1 = \dot{y}_d - y_2 \\ E_3 &= \dot{E}_2 = \ddot{y}_d - f_2 \\ E_4 &= \dot{E}_3 = \ddot{y}_d - Q \\ Q &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} y_4 \end{aligned} \quad (18)$$

که $E_1 = [E_x, E_y]^T = [x_d - x, y_d - y]^T$ می باشد. روابط بالا خطای ردیابی بوده و اغتشاش d_2 که در اثبات پایداری اضافه می شود در آن درج نشده است.

حال برای بهبود و جبران اثر نامعلوم اغتشاش مثل حالت قبل از کنترل کننده مد لغزشی تطبیقی استفاده می کنیم. با توجه به معادلات (۱۷) و (۱۸) برای حرکت عرضی و طولی تنها از سطح لغزش زیر استفاده می شود:

$$s = E_4 - E_4(0) - \int_0^t \omega_{3,4} dt \quad (19)$$

$$\dot{s} = \dot{E}_4 - \omega_{3,4} \quad (20)$$

که $s = [s_3, s_4]^T$ و $\omega_{3,4}$ مانند بخش قبل و از روی معادله (۱۴) قضیه (۱) به دست می آید.

بنابراین، قانون کنترل به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{eq2} + U_{sw2} \\ U_{eq2} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2 \right)^{-1} \left(\frac{d^4}{dt^4} y_d - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1} y_2 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2} f \right) - \frac{\partial f_2}{\partial y_3} f_3 - \omega_{3,4} \right) \\ u_{sw2} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2 \right)^{-1} (-\hat{F} \text{sign}(s)) \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن، عبارت $\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2$ غیر صفر و معکوس پذیر می باشد.

همچنین در معادلات بالا $\omega_{3,4}$ بر اساس قضیه (۱) و معادلات (۱۸) به راحتی به دست می آید. بردار بهره های متغیر با زمان سیگنال کنترل سوئیچینگ است و قانون تطبیق به شکل زیر به دست می آید:

$$\dot{\hat{F}} = S^{3,4} \cdot p \quad (22)$$

که در آن، $p = [p_1, p_2]^T$ و $S^{3,4} = \text{diag}[|s_3|, |s_4|]$ مانند بخش قبل عددی ثابت، مثبت و بین صفر و یک است.

اثبات پایداری این کنترل کننده نیز مانند بخش قبل و معادلات (۱۴) و (۱۵) می باشد و از تکرار آن پرهیز می کنیم. بنابراین، به وسیله

که مقادیر Δ_ψ و Δ_θ ، Δ_ϕ توابع عدم قطعیت برحسب مشتقات زوایای اویلر و مقادیر نامعلوم اینرسی (۲۳) متناسب با دینامیک پرنده می‌باشند. بنابراین فرض زیر کاملاً منطقی است:

با در نظر گرفتن فرض (۲) و معادله‌های (۲) و (۲۵)، مقادیر نامعینی ناشی از عدم قطعیت اینرسی مدل پرنده کران‌دار بوده و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$|d_x|^{\alpha_4} < \rho_3, |d_y|^{\alpha_4} < \rho_4 \quad (۳۰)$$

$$|d_\theta| < \rho_5, |d_\phi| < \rho_6 \quad (۳۱)$$

تذکر (۲): برای محاسبه و ساده‌سازی عملیات ریاضی و با توجه به معادلات (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} &\approx 0_{2 \times 2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_2} &\approx 0_{2 \times 2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_3} &= \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۳۲)$$

اثبات پایداری قانون کنترل بهبودیافته (۲۹) و (۲۰) بسیار شبیه معادلات (۱۴) می‌باشد، به طوری که داریم:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} s^T s + \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^2 \tilde{F}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{c}_i^2 \\ \dot{V} &= s^T \left(-M \text{sign}(s) + \Gamma + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} d_3 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \Delta \right) + g \sum_{i=1}^2 \dot{\tilde{F}}_i \tilde{F}_i + \sum_{i=1}^4 \dot{\tilde{c}}_i \end{aligned} \quad (۳۳)$$

که در آن، $\Delta = [\Delta_\theta, \Delta_\phi]^T$ و $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]^T$ می‌باشد و داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= |\ddot{E}_x + d_x|^{\alpha_4} \text{sign}(\ddot{E}_x + d_x) - |\ddot{E}_x|^{\alpha_4} \text{sign}(\ddot{E}_x) \\ \Gamma_2 &= |\ddot{E}_y + d_y|^{\alpha_4} \text{sign}(\ddot{E}_y + d_y) - |\ddot{E}_y|^{\alpha_4} \text{sign}(\ddot{E}_y) \end{aligned} \quad (۳۴)$$

از آنجایی که داریم:

$$\begin{aligned} |s| |\dot{E}_2 + d_2|^{\alpha_3} \text{sign}(\dot{E}_2 + d_2) &\leq |s| |\dot{E}_2 + d_2|^{\alpha_3} \\ |\dot{E}_2 + d_2|^{\alpha_3} &\leq |\dot{E}_2|^{\alpha_3} + |d_2|^{\alpha_3} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

بنابراین با توجه به فرض (۲)، رابطه (۲۶) و (۲۷) و روابط ذکر شده در ضمیمه نتیجه می‌شود که:

که مقادیر Δ_ψ و Δ_θ ، Δ_ϕ توابع عدم قطعیت برحسب مشتقات زوایای اویلر و مقادیر نامعلوم اینرسی (۲۳) متناسب با دینامیک پرنده می‌باشند. بنابراین فرض زیر کاملاً منطقی است:

با در نظر گرفتن فرض (۲) و معادله‌های (۲) و (۲۵)، مقادیر نامعینی ناشی از عدم قطعیت اینرسی مدل پرنده کران‌دار بوده و در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} |\Delta_\phi| < \zeta_1 |\dot{\theta}| |\dot{\psi}| + \zeta_2 |\dot{\theta}| \|\Omega_r\| \\ |\Delta_\theta| < \zeta_3 |\dot{\psi}| |\dot{\phi}| + \zeta_4 |\dot{\phi}| \|\Omega_r\| \\ |\Delta_\psi| < \zeta_5 |\dot{\phi}| |\dot{\theta}| \end{cases} \quad (۲۶)$$

که ضرایب ζ_i ($i = 1, \dots, 5$) پارامترهای مثبت، نامعلوم و نشان‌دهنده کران بالای عدم قطعیت می‌باشند. در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} |\Delta_\phi| < \hat{c}_1 \|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_2 \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| \\ |\Delta_\theta| < \hat{c}_3 \|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_4 \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| \\ |\Delta_\psi| < \hat{c}_5 \|\dot{E}\|^2 \end{cases} \quad (۲۷)$$

که در آن، $E = [\phi, \theta, \psi]^T$ می‌باشد. در رابطه بالا، \hat{c}_i ($i = 1, \dots, 5$) مقادیر نامعلومی می‌باشد که به کمک مکانیزم تطبیقی تخمین زده می‌شود و مانع از تغییرات گسترده در پایداری سیستم در حضور عدم قطعیت این پارامترها می‌شود. قوانین تطبیق به شکل زیر ارائه می‌گردند:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{c}}_1 &= \eta_1 \|\dot{E}\|^2 |s_4| \\ \dot{\hat{c}}_2 &= \eta_2 \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| |s_4| \\ \dot{\hat{c}}_3 &= \eta_3 \|\dot{E}\|^2 |s_3| \\ \dot{\hat{c}}_4 &= \eta_4 \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| |s_3| \\ \dot{\hat{c}}_5 &= \eta_5 \|\dot{E}\|^2 |s_2| \end{aligned} \quad (۲۸)$$

$0 < \eta_i < 1, i = 1, 2, 3, 4, 5$

بنابراین، به طور مثال برای کنترل حرکت پرنده در طول و حول محورهای x و y قانون کنترل (۲۱) و (۱۰) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} u_{sw} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_3} g_2 \right)^{-1} (-M(t)) \\ \text{که در آن، داریم } M(t) &= [M_1 \text{sign}(s_3), M_2 \text{sign}(s_4)]^T \\ M_1 &= g \cdot \hat{F}_2 + \hat{c}_3 \|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_4 \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| + N_1 |\ddot{E}_x|^{\alpha_4} \\ M_2 &= g \cdot \hat{F}_1 + \hat{c}_1 \|\dot{E}\|^2 + \hat{c}_2 \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| + N_2 |\ddot{E}_y|^{\alpha_4} \end{aligned} \quad (۲۹)$$

$$\text{sign}(s) = \frac{s}{\|s\| + \delta} \quad (۳۹)$$

که δ عددی مثبت و به اندازه کافی کوچک است.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی‌های عددی برای اثبات کارایی کنترل‌کننده طراحی شده ارائه می‌گردند. پارامترهای پرنده چهارم‌لخه در جدول ۱ آمده است، همچنین پارامترهای طراحی به ترتیب برای کنترل‌کننده معرفی شده در بخش اول و دوم به شرح زیر می‌باشند:

$$k_1 = 1; k_2 = 3; k_3 = 3; \quad (۴۰)$$

$$k_1 = 1; k_2 = 5; k_3 = 10; k_4 = 7; k_5 = 5 \quad (۴۱)$$

مقادیر $\alpha = 1/3$ انتخاب شده و بقیه مقادیر از روی قضیه (۱) به دست آورده شده است. بازه بهره تطبیق برای قانون تطبیق در معادله (۱۱) و (۲۱) نیز 0.5 در نظر گرفته شده است. نقطه (۱، ۱، ۵) به عنوان مقصد پرنده در نظر گرفته شده است. همچنین یک نویز خروجی به شکل یک موج سینوسی با دامنه 0.1 و فرکانس 100 هرتز و یک اغتشاش خارجی با همان دامنه و فرکانس π برای حرکت انتقالی و حرکت دورانی پرنده در نظر گرفته شده است. مشابه این فرض برای اغتشاش در [۲۹] نیز استفاده شده است. عدم قطعیت روی عناصر تانسور لختی و اینرسی مدل 25 درصد در نظر گرفته می‌شود.

برای اثبات کارایی روش کنترل‌کننده و مدل سیستم به کمک برنامه MATLAB شبیه‌سازی شده است. شکل ۱ حرکت پرنده را در مختصات دکارتی را به کمک روش ارائه شده در مقاله و شکل ۲ حرکت دورانی آن را به کمک کنترل‌کننده طراحی شده در این مقاله نشان می‌دهد. پاسخ حالت گذرای سیستم بسیار وابسته به انتخاب پارامترهای سطح لغزش و در نتیجه کنترل‌کننده (۴۰) و (۴۱) دارد. همان‌طور که بیان شد، این پارامترها باید در شرایط قضیه (۱) صدق کنند.

شکل ۳ ورودی‌های کنترل را نشان می‌دهد. استفاده از تذکر (۱) سبب شده است سیگنال و ورودی تحریک فاقد نوسان شدید در فرکانس‌های مختلف باشد. شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و خطی پرنده را نشان می‌دهد که بعد از زمان مشخصی به صفر همگرا می‌شوند. در نهایت، شکل‌های ۶ تا ۸ پارامترهای تطبیقی سیستم را نشان می‌دهند. ضرایب ثابت روابط تطبیقی 0.5 انتخاب شده‌اند. پارامترهای تطبیقی نیز بعد از گذشت زمان محدودی به مقدار مطلوب و مورد نیاز برای جبران اثرهای اغتشاش و عدم قطعیت رسیده‌اند.

سیگنال کنترل نشان داده شده در شکل ۳ به نسبت سیگنال کنترل در مقالات مرجع دیگری نظیر [۱۹، ۲۰] مناسب‌تر و عملی‌تر بوده و در عمل به راحتی قابل پیاده‌سازی می‌باشد. البته بسته به توانایی تجهیزات سیستم کنترل‌کننده در ساختن سیگنال کنترل و دقت مورد نیاز در ردیابی، می‌توان پارامترهای مختلفی برای تذکر (۴) در نظر گرفت که به تبع آن دقت ردیابی و سیگنال کنترل دست‌خوش تغییر می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\tilde{F}_2 g(|s_3| - p_1 |s_3|) - |s_3| g \left(F_2 - \frac{k_4}{g} |d_x|^{\alpha_4} + d_0 \right) \\ & - \tilde{c}_3 \left(\|\dot{E}\|^2 |s_3| - \eta_3 \|\dot{E}\|^2 |s_3| \right) - \left(-2k_4 |s_3| \|\ddot{E}_x\|^{\alpha_4} + N_1 |s_3| \|\ddot{E}_x\|^{\alpha_4} \right) \\ & - |s_3| \|\dot{E}\|^2 (c_3 - \zeta_3) - \tilde{c}_4 \|\Omega_r\| \left(\|\dot{E}\| |s_3| - \eta_4 \|\dot{E}\| |s_3| \right) \\ & - |s_3| \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| (c_4 - g\zeta_4) - \tilde{F}_1 g(|s_4| - p_2 |s_4|) - \end{aligned} \quad (۳۶)$$

$$\begin{aligned} & |s_4| g \left(F_1 - \frac{k_4}{g} |d_y|^{\alpha_4} + d_0 \right) - \tilde{c}_1 \left(\|\dot{E}\|^2 |s_4| - \eta_1 \|\dot{E}\|^2 |s_4| \right) \\ & - \left(-2k_4 |s_4| \|\ddot{E}_y\|^{\alpha_4} + N_2 |s_4| \|\ddot{E}_y\|^{\alpha_4} \right) - |s_4| \|\dot{E}\| \|\Omega_r\| (c_2 - \zeta_2) \\ & - \tilde{c}_2 \|\Omega_r\| \left(\|\dot{E}\| |s_4| - \eta_2 \|\dot{E}\| |s_4| \right) - |s_4| \|\dot{E}\|^2 (c_1 - \zeta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\beta_1 |\tilde{c}_1| - \beta_2 |\tilde{c}_2| - \beta_3 |\tilde{c}_4| - \beta_4 |\tilde{c}_4| \\ & - \beta_5 |\tilde{F}_1| - \beta_6 |\tilde{F}_2| - \beta_7 |s_3| - \beta_8 |s_4| \leq -\mu V^{1/2} \quad (۳۷) \end{aligned}$$

مقادیری از F و همچنین همیشه مقادیری از c وجود دارند که:

$$\begin{aligned} F_1 & > \frac{k_4}{g} |d_x|^{\alpha_4} + |d_0| \\ F_2 & > \frac{k_4}{g} |d_y|^{\alpha_4} + |d_0| \quad (۳۸) \end{aligned}$$

اگر $1 - \eta_i > 0, (i=1,2)$ ، $1 - p_i > 0, (i=1,2)$ ، $c_i > \zeta_i$ و β_i را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\mu > 0$ باشد، داریم:

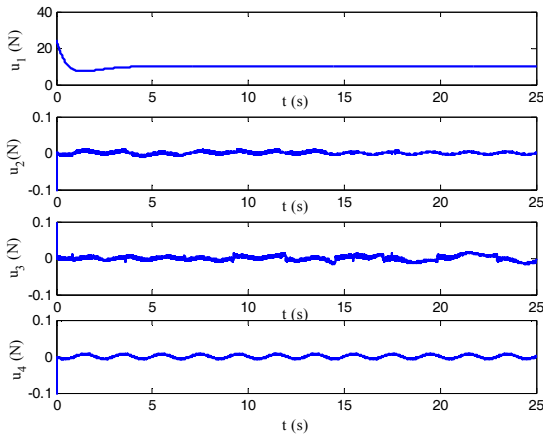
$$\mu = \min \left(\sum_{i=1}^8 \beta_i / \sqrt{2} \right)$$

به طوری که برای معادله بالا β_i ها با همگرایی پارامترهای تطبیقی همواره مثبت هستند [۲۴].

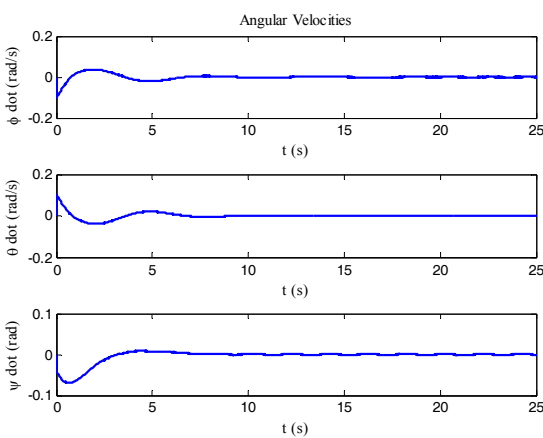
با وجود آن که عناصر تانسور لختی یا اینرسی ممکن است مقادیر کمی باشند اما به علت حضور اغتشاش و تغییرات ناگهانی متغیرهای مدل، عدم قطعیت‌های موجود ممکن است سبب تضعیف عملکرد کنترل‌کننده شوند. بدین منظور و برای کاهش وابستگی کنترل‌کننده به مدل سیستم، قانون کنترل توسط معادله (۲۹) بهبود داده شده است. حال برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور عدم قطعیت و اغتشاش، مدل و کنترل‌کننده شبیه‌سازی شده و نتایج آن بررسی می‌شود.

تذکر (۳): بدیهی است با توجه به معادلات بالا پایداری حرکت در حول محور Z (ψ)، در حضور اغتشاش و عدم قطعیت‌های یادشده به شکل مشابهی با تغییرات مناسب در قانون کنترل (۱۰) و به کمک رابطه (۲۹) به دست می‌آید.

تذکر (۴): برای جلوگیری از نوسان شدید^{۱۶} توسط کنترل‌کننده طراحی شده در سیگنال تحریک از تابع زیر استفاده می‌شود [۲۸]:



شکل ۳: سیگنال ورودی کنترل



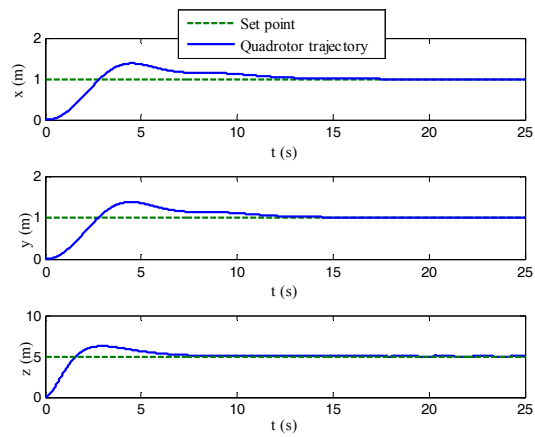
شکل ۴: سرعت زاویه‌ای پرنده چهارمخه

در نهایت برای اثبات کارای سیستم مقایسه‌ای بین روش به‌کار گرفته‌شده در مقاله [۲۰] و روش ارائه‌شده در این مقاله در حضور اغتشاش خارجی تعریف‌شده، صورت گرفته است. در واقع در مقاله [۲۰] اثر کشیدگی هوا و اغتشاش در نظر گرفته شده است و در این مقاله اغتشاش و نامعینی. بنابراین برای مقایسه از اثر کشیدگی هوا و نامعینی صرف‌نظر شده و تنها اغتشاش در نظر گرفته شده است. پارامترهای ثابت کنترل‌کننده در محدوده پارامترهای مقاله [۲۰] و مانند زیر فرض شده و برای بهبود پاسخ سیستم از α برابر 0.75 استفاده شده است.

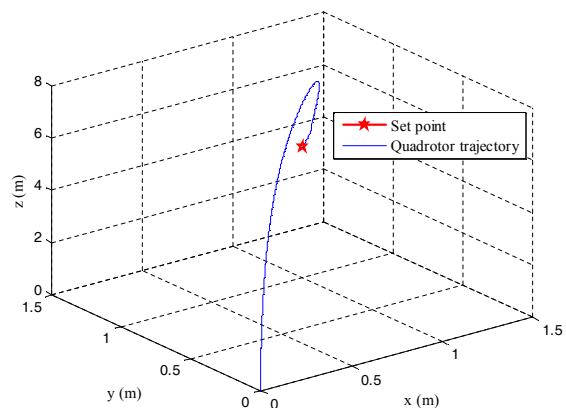
پارامترهای دینامیک پرنده مانند مقاله [۲۰] در نظر گرفته شده است. داریم:

$$k_1 = 1; k_2 = 10; k_3 = 10; \quad (42)$$

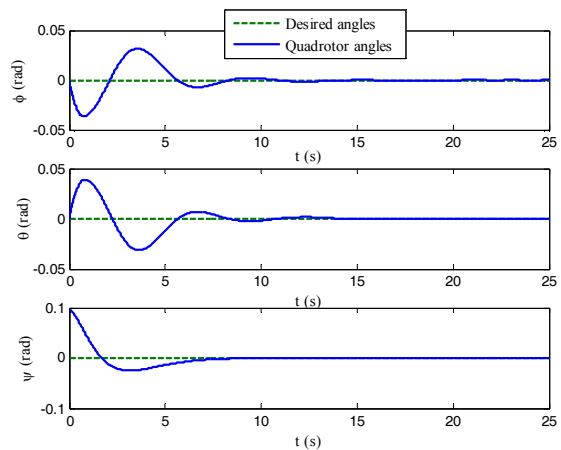
$$k_1 = 1; k_2 = 20; k_3 = 20; k_4 = 10; k_5 = 10 \quad (43)$$



شکل ۱: ردیابی نقطه (۱، ۱، ۵) متر در حرکت انتقالی پرنده؛ شکل اول: توسط کنترل‌کننده معرفی‌شده و شکل دوم: حرکت سه‌بعدی آن



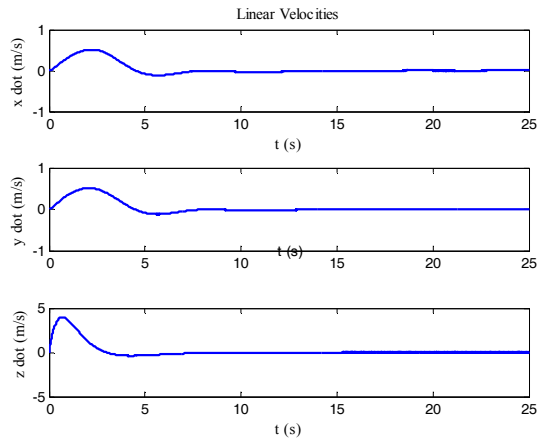
شکل ۲: ردیابی حرکت دورانی پرنده



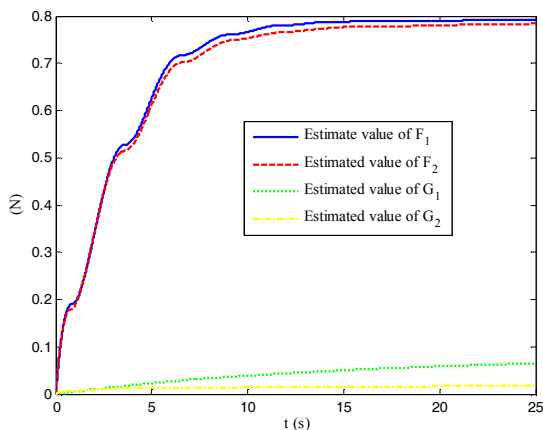
شکل ۳: ردیابی حرکت دورانی پرنده

جدول ۱: پارامترهای مدل پرنده

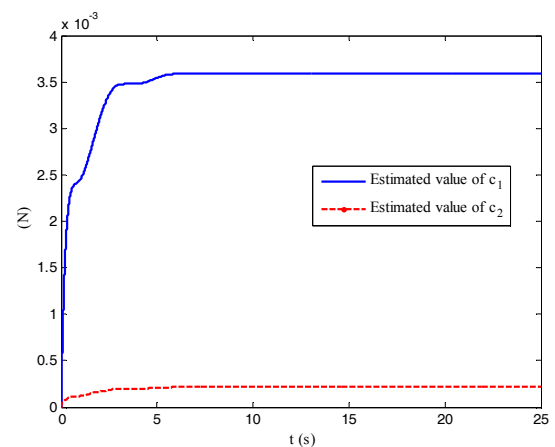
مقدار	علامت	کمیت
۱ kg	m	جرم پرنده چهارمخه
۰/۲۳ m	l	فاصله مرکز جرم و ملخکها
$9/81 m/s^2$	g	شتاب
$۰/۰۰۷۵ m^2$	I_x	ممان اینرسی حول محور X
$۰/۰۰۷۵ m^2$	I_y	ممان اینرسی حول محور Y
$۰/۰۱۳ kgm^2$	I_z	ممان اینرسی حول محور Z
$۰/۰۰۰۰۶۵ kgm^2$	J_r	ممان اینرسی حول محور ملخک



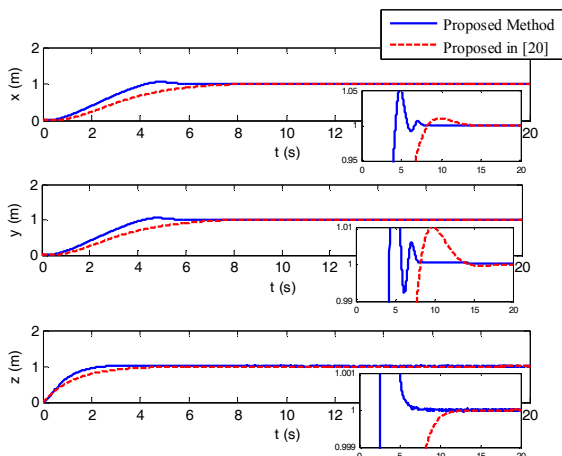
شکل ۵: سرعت خطی پرنده چهارمخه



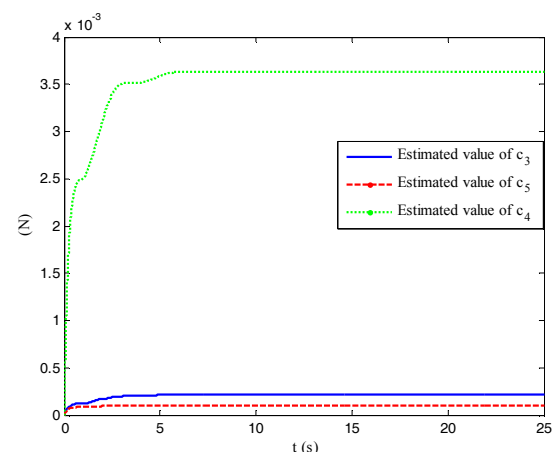
شکل ۸: بخشی از پارامترهای تخمین زده توسط کنترل تطبیقی



شکل ۶: بخشی از پارامترهای تخمین زده توسط کنترل تطبیقی



شکل ۹: مقایسه پاسخ زمانی سیستم برای ردیابی خروجی x و y بین روش ارائه شده در این مقاله و روش ارائه شده در مقاله [۲۰]



شکل ۷: بخشی از پارامترهای تخمین زده توسط کنترل تطبیقی

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، یک کنترل مد لغزشی انتگرالی ناتکین غیر ترمینال تطبیقی با حداقل سطح لغزش ممکن برای هواپیمای چهارمخه کوچک با تحریک محدود و در حضور اغتشاش و عدم قطعیت طراحی می شود. برای بالا بردن دقت ردیابی متغیر انتگرال خطا به مجموعه خطاهای سیستم اضافه شده است. همچنین روابط قانون کنترل با

مقایسه عملکرد کنترل کننده ارائه شده در مقاله [۲۰] با روش ارائه شده در این مقاله، در شکل ۹ ذکر شده است. همان طور که مشخص است، در این مقاله دقت ردیابی بهبود یافته و پاسخ این مقاله سریع تر به نقطه مطلوب رسیده است البته باید توجه داشت که پاسخ مقاله [۲۰] میزان فراجهدش کمتری در این حالت دارد.

- [8] V. Mistler, A. Benallegue, and N.K. M'Sirdi, "Exact linearization and non-interacting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback," *10th IEEE International Workshop on Robot-Human Interactive Communication Paris*, 2001.
- [9] E. Altug, J.P. Ostrowski, and R. Mahony, "Control of a quadrotor helicopter using visual feedback," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2002.
- [10] B. Bijnens, Q.P. Chu, J.M. Voorsluijs, and J.A. Mulder, "Adaptive feedback linearization flight control for a helicopter UAV," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 15-18, 2005.
- [11] S. Bouabdallah, and R. Siegwart, "Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor," *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2247-2252, 2005.
- [12] H. Bouadi, M. Bouchoucha, and M. Tadjine, "Modelling and stabilizing control laws design based on sliding mode for an UAV type-quadrotor," *Engineering Letters*, vol. 15, no. 2, 2007.
- [13] D. Lee, H.J. Ki, and S. Sastry, "Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor unmanned aerial vehicle," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 7, no. 3, pp. 419-428, 2009.
- [14] L. Besnarda, Y.B. Shtessel, and B. Landrum, "Quadrotor vehicle control via sliding mode controller driven by sliding mode disturbance observer," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, pp. 658-684, 2012.
- [15] E.H. Zheng, L.L. Xiong, and L.L. Luo, "Second order sliding mode control for a quadrotor," *ISA Transactions*, 2014.
- [16] L. Luque-Vega, B. Castillo-Toledo, and A.G. Loukianov, "Robust block second order sliding mode control for a quadrotor," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 719-39, 2012.
- [17] A. Benallegue, A. Mokhtari, and L. Fridman, "High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV," *International Journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 18, pp. 427-440, 2008.
- [18] L. Derafa, A. Benallegue, and L. Fridman, "Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 685-99, 2012.
- [19] R. Xu, and Ü. Özgüner, "Sliding mode control of a class of underactuated systems," *Automatica*, vol. 44, pp. 233-41, 2010.
- [20] J.J. Xiong, and E.H. Zheng, "Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV," *ISA Transactions*, vol. 53, no. 3, pp. 725-731, 2014.
- [21] S.S. Chong, X. Yu, and M. Zhihong, "A robust adaptive sliding mode controller for robotic manipulators," *IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 31-35, 1996.
- [22] S.P. Bhat, and D.S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 38, pp. 751-766, 1996.
- [23] S.P. Bhat, and D.S. Bernstein, "Geometric homogeneity with applications to finite-time stability, Mathematics of Control," *Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101 - 127, 2005.
- [24] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. poznyak, "New methodologies for adaptive sliding mode control," *International Journal of Control*, vol. 9, no. 83, pp. 1907-1919, 2010.

توجه به حضور اغتشاش روی تمام خروجی‌های سیستم فاقد تحریک کامل در مقایسه با روش‌های مشابه کنترل مد لغزشی ناتکین غیر ترمینال بهبود یافته است. برای بهبود عملکرد کنترل‌کننده یک کران بالا برای عدم قطعیت در نظر گرفته شده و ضرایب آن به کمک کنترل تطبیقی تخمین زده شده است. در نهایت به کمک شبیه‌سازی و مقایسه، اعتبار کنترل‌کننده طراحی شده مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با وجود حضور اغتشاش و عدم قطعیت روی عناصر تانسور لختی و اینرسی روتور، ردیابی به‌خوبی صورت گرفته و پرند به نقطه مطلوب رسیده است.

پیوست

معادله (۲۶) را در نظر بگیرید، رابطه (۲۷) به‌راحتی توسط رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} |\dot{\theta}\psi| \leq \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) \\ |\dot{\phi}\psi| \leq \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) \\ |\dot{\theta}\dot{\phi}| \leq \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\ |\dot{\theta}\psi + \dot{\phi}\psi + \dot{\theta}\dot{\phi}| \leq |\dot{\theta}\psi| + |\dot{\phi}\psi| + |\dot{\theta}\dot{\phi}| \end{cases} \quad (44)$$

در نتیجه از جمع سه رابطه اول معادله بالا به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} |\dot{\theta}\psi| + |\dot{\phi}\psi| + |\dot{\theta}\dot{\phi}| \leq Z \\ Z = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\ \dot{E}^2 = Z \end{cases} \quad (45)$$

مراجع

- [1] G.V. Raffo, M.G. Ortega, and F.R. Rubio, "An integral predictive/nonlinear H infinity control structure for a quadrotor helicopter," *Automatica*, vol. 46, pp. 29-39, 2010.
- [2] L. Garcia-Delgado, A. Dzul, V. Santibáñez, and M. Llama, "Quadrotors formation based on potential functions with obstacle avoidance," *IET Control Theory and Application*, vol. 6, no.12, pp. 787-802, 2012.
- [3] G.M. Hoffmann, H. Huang, S.L. Waslander, and C.J. Tomlin, "Quadrotor helicopter flight dynamics and control: theory and experiment," *AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Exhibit*, 1-20, South Carolina, USA, 2007.
- [4] I. Fantoni, and R. Lozano, *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*, Springer-Verlag, London, 2002.
- [5] A. Das, K. Subbarao, and F. Lewis, "Dynamic inversion with zero-dynamics stabilization for quadrotor control," *IET Control Theory and Applications*, 2008.
- [6] L.D. Cowling, O.A. Yakimenko, J.F. Whidborne, and A.K. Cooke, "A prototype of an autonomous controller for a quadrotor UAV," *Proceedings of ECC07*, 2007.
- [7] P. Castillo, R. Lozano and A. E. Dzul, "Modelling and Control of Mini-Flying Machines", Springer-Verlag, London, 2005.

- International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 23, pp. 1966-1717, 2013.
- [28] Zh. Hongmei, and Zh. Guoshan, "Adaptive backstepping sliding mode control for nonlinear systems with input saturation," *Transaction of Tianjin University*, vol. 18, pp. 046-051, 2012.
- [29] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man, "Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode," *Automatica*, vol. 41, pp. 1957-1964, 2005.
- [25] S.P. Bhat, and D.S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 38, pp. 751-766, 2003.
- [26] G. Carrillo, R.L. Dzúl López, A.E. Lozano, and R.C. Pégard, 213, *Quad Rotorcraft Control*, Springer publishing, 2013.
- [27] Y. Xia, K. Lu, Z. Zhu, and M. Fu, "Adaptive backstepping sliding mode attitude control of missile systems,"

زیرنویس‌ها

^ Pitch

^ Euler

^ Yaw

^ Hover

^ Lift coefficient

^ Body inertia

^ Propeller/rotor inertia

^ Chattering

^ Unmanned Aerial Vehicle

^ Vertical Take Off and Landing

^ Under actuated

^ Back-stepping

^ Sliding mode control

^ Super twisting

^ High order sliding mode

^ Roll