

# ردگیری غیرخطی بهینه و مقید مسیر مبتنی بر تابع لیاپانوفی کنترل

رضا زردشتی<sup>۱</sup>، مربی، محمدجواد یزدانپناه<sup>۲</sup>، استاد، امیرعلی نیکخواه<sup>۳</sup>، دانشیار

۱- دانشکده مهندسی هوافضا- دانشگاه خواجهنصیرالدین طوسی-تهران- ایران rezazardashti@dena.kntu.ac.ir

۲- قطب علمی کنترل و پردازش هوشمند، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه تهران-تهران- ایران yazdan@ut.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی هوافضا - دانشگاه خواجهنصیرالدین طوسی- تهران - ایران nikkhah@kntu.ac.ir

**چکیده:** هدف از این مقاله، ردگیری بهینه و مقید با استفاده از راهبرد کنترل غیرخطی بهینه مبتنی بر تابع لیاپانوفی کنترل (CLF) است. رویکرد اصلی روش مزبور این است که دارای حل تحلیلی بوده و تضمین می‌کند که سیستم حلقه‌بسته را پایدار نماید، ضمن اینکه رابطه صریحی برای کنترل‌کننده فراهم می‌سازد. روشی که مبتنی بر تابع لیاپانوفی کنترل است و تابع هزینه را نیز در فرآیند طراحی لحاظ می‌نماید روش "کفایت صدق" است. در این روش مسئله کنترل بهینه مستقیماً حل نمی‌شود، بلکه سعی می‌گردد تا قانون کنترلی به صورت نقطه‌ای به گونه‌ای انتخاب شود که یک تابع سود از یک تابع هزینه بیشتر شود و لذا پیاده‌سازی آن منجر به بهینگی تابع عملکرد در راهبرد کنترل می‌شود ولی مهم‌ترین نقطه‌ضعف آن، عدم تضمین پایداری در سیستم‌های با ورودی کران‌دار است. با توجه به اهمیت موضوع ورودی کران‌دار در سیستم‌های واقعی، در این مقاله سعی در جهت مرتفع شدن نقیصه مزبور شده است. به همین منظور، پس از مروری بر روش کفایت صدق، روش اصلاح‌شده معرفی و به اثبات بهینگی و مقیدبودن آن مبادرت شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با استفاده از روش پیشنهادی، مسیر مرجع به خوبی دنبال شده ضمن این که ورودی در کران خود باقی می‌ماند.

**واژه‌های کلیدی:** ردگیری مسیر، کنترل بهینه غیرخطی مقید، تابع لیاپانوفی کنترل، روش کفایت صدق.

## Nonlinear Optimal and Constrained Trajectory Tracking based on Control Lyapunov Function

R. Zardashti, Educator, M. J. Yazdanpanah, Professor<sup>2</sup>, A. A. Nikkhah, Associate Professor<sup>3</sup>

1- Faculty of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of University of Tech., Tehran, Iran, rezazardashti@dena.kntu.ac.ir

2- Control & Intelligent Processing Center of Excellence, School of ECE, University of Tehran, Tehran, Iran, yazdan@ut.ac.ir

3- Faculty of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of University of Tech., Tehran, Iran, Email: nikkhah@kntu.ac.ir

**Abstract:** The purpose of this paper is the optimal and constrained nonlinear optimization-based tracking strategy using Control Lyapunov Function (CLF) technique. The main approach is based on analytical solution and guarantees that the closed-loop system is stable, whilst presenting an explicit relation for the controller. A CLF method-base that considers the cost function in the design process is referred to as "Satisficing" method. In this method, optimal control problem is not solved directly. Instead, it's tried to design the control law point-wise so that a utility function is greater than a penalty function. Thus, its implication results in optimality of the performance objective in control strategies. The main disadvantage of Satisficing method is the lack of stability guarantee in systems with bounded control input. Referring to significance of bounded input in real systems, it's attempted to amend the method in order to overcome the said drawback. Therefore, after reviewing the Satisficing method, the modified method is proposed and attempted to prove its optimality and boundedness. Simulation results show that using the proposed method, a reference trajectory is well followed and while the input remains within its bounds.

**Keywords:** Path following, trajectory tracking, nonlinear constrained optimal control, control lyapunov function, satisficing method.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۰۳/۱۳

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۲۰ و ۱۳۹۳/۰۷/۰۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۷/۰۷

نام نویسنده مسئول: رضا زردشتی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - دانشگاه خواجهنصیرالدین طوسی - دانشکده مهندسی هوافضا

## ۱- مقدمه

مسئله دنبال نمودن مسیر<sup>۱</sup> و ردگیری مسیر پروازی<sup>۲</sup>، جنبه‌های مورد اشاره در این مقاله می‌باشند. علی‌رغم اینکه موارد بسیاری در مقالات و فعالیت‌های پژوهشی در این زمینه متمرکز شده و کارهای متعددی انجام شده، ولی به نظر می‌رسد که با رشد روزافزون فن‌آوری و پیشرفت‌ها در زمینه نرم‌افزار و سخت‌افزار، به‌روزرسانی روش‌ها و استفاده از الگوریتم‌های پیچیده‌تر با مدل‌سازی کامل‌تر هنوز جای کار داشته باشد. معیار بهینگی به‌منظور داشتن قانون هدایت با رویکرد غیرخطی که معیارهای مختلفی چون کم‌ترین انحراف از مسیر مرجع، کم‌ترین تلاش کنترلی و غیره را بهینه نماید اهمیت دارد. همچنین، مسئله محدودیت‌های فیزیکی در ورودی سیستم‌های کنترل دینامیکی همواره چالش برانگیز است. چراکه علی‌رغم وجود روش‌های متعدد در طراحی کنترل‌کننده چه به‌صورت خطی و چه به‌صورت غیرخطی و پایدارسازی مناسب سیستم در حالت عادی، وجود عوامل محدودکننده مانند اشباع که به‌صورت عامل غیرخطی در سیستم‌ها ظاهر می‌شود معمولاً عملکرد پایداری و کنترل آن‌ها را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد و در صورتی که قانون کنترلی صرف‌نظر از این قیود طراحی شود ممکن است که در بعضی از شرایط، باعث برهم زدن شرط پایداری لیاپانوف شده و لذا موجبات پایداری ضعیف یا حتی ناپایداری را برای سیستم فوق فراهم سازد.

عموماً مسئله هدایت و کنترل در اجسام پرنده مبتنی بر هر دو روش خطی و غیرخطی ارائه شده است. روش‌های کنترل خطی معادلات غیرخطی، پس از خطی‌سازی حول نقطه تعادل (تربیم)، با استفاده از روش‌های متداول مثل PID به هدایت و کنترل پرنده پرداخته می‌شود. اما چون پرنده‌ها در شرایط مختلف پرواز می‌کنند برآورده شدن ملزومات مورد انتظار از سیستم با این روش دشوار بوده و نیازمند به استفاده از زمان‌بندی بهره<sup>۳</sup> است که میان‌یابی بهره‌ها در پوش پروازی از مشکلات این روش است. ضمن اینکه کنترل‌کننده‌های مذکور می‌توانند کارایی و پایداری را در اطراف نقطه کار تضمین کرده و با دور شدن از آن، عملکرد کنترل‌کننده کاهش می‌یابد. در [۱] ترکیب روش‌های زمان‌بندی بهره و LPV<sup>۴</sup> برای کنترل استفاده شده است. با این روش، پایداری سیستم تضمین می‌شود اما دارای پیچیدگی زیاد در طراحی بوده و منجر به کنترل‌کننده‌های محافظه‌کارانه خواهند شد. ضمناً از آنجایی که روش‌های غیرخطی در مقایسه با خطی در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی نسبت به شرایط آغازین وسیع‌تری (ناحیه جذب بزرگ‌تر) عملکرد مطلوبی دارند، مسئله بهتر است به‌صورت غیرخطی در نظر گرفته شود.

رویکردی که در چند سال اخیر در مسئله هدایت وارد شده، مطالعه آن در چهارچوب روش‌های مبتنی بر نظریه کنترل غیرخطی است. یکی از نخستین راهکارها، استفاده از خطی‌سازی فیدبک برای طراحی کنترل‌کننده مطلوب است [۲ و ۳]. در این روش با استفاده از یک نگاشت دیفئومورفیسم، سیستم غیرخطی به‌صورت یک سیستم

خطی دیده می‌شود. سپس می‌توان از راهبردهای متعدد کنترل خطی برای پایدارسازی این سیستم استفاده کرد.

یکی دیگر از روش‌های تولید قانون کنترل پایدارساز برای یک سیستم غیرخطی عبارت است از یافتن تابع لیاپانوفی کنترل (CLF<sup>۵</sup>) برای آن سیستم و سپس استخراج یک فرمول جامع کنترل پایدارساز از CLF مزبور. مهم‌ترین مزیت راهبردی روش مزبور این است که دارای حل تحلیلی بوده و تضمین می‌کند که سیستم حلقه‌بسته را پایدار می‌نماید، ضمن اینکه رابطه صریحی برای کنترل‌کننده به دست می‌آورد. یکی از این قوانین توسط فرمول اساسی سونتاگ [۷-۴] ارائه شده است.

رویکرد دیگری که مبتنی بر CLF است و تابع هزینه را نیز در فرآیند طراحی لحاظ می‌نماید روش «کفایت صدق»<sup>۶</sup> است [۸]. ایده کلی این روش آن است که در سیستم‌هایی که امکان دستیابی به کنترل‌کننده تحلیلی وجود ندارد و یا پیچیدگی محاسبات یا پیاده‌سازی بیش‌ازحد قابل قبول است، از کنترل‌کننده‌ای استفاده شود که بهینه بوده و در عین حال برای تأمین اهداف کنترلی نیز مفید واقع شود. آقای پرد و همکارش در مقاله فوق، مسئله کنترل مبتنی بر کفایت صدق را توسعه داده است. ایده اصلی او بر اساس تئوری بازی‌های «کفایت صدق» بود که توسط استرلینگ در [۹] معرفی گردید.

در مقاله [۱۰]، کنترل ردگیری مبتنی بر بهینگی معکوس بر روی یک روبات بال‌ن هوایی کوچک<sup>۷</sup> اعمال شده است. در روش فوق، کنترل‌کننده با بهره‌گیری از تابع لیاپانوفی کنترل و فرمول سونتاگ طراحی شده است. این کنترل‌کننده برخی از پارامترهای معنی‌دار وابسته به خود را که در ابتدا داده نشده حداقل می‌سازد، و سیستم طراحی شده دارای حاشیه طراحی به‌گونه‌ای است که قوام را نسبت به نایقینی‌های ورودی تضمین می‌کند.

مقاله [۱۱]، ردگیری خروجی یک سیستم غیرخطی زمان-گسسته را با روش کنترل بهینه معکوس، بدون حل معادله HJB<sup>۸</sup> و با حداقل‌سازی یک تابع هزینه معنی‌دار ارائه داده است. این پایدارسازی کنترل‌کننده بهینه بر اساس نظریه اتلاف‌کنندگی<sup>۹</sup> زمان-گسسته طراحی شده است. کاربرد روش پیشنهادی از طریق شبیه‌سازی کنترل ردگیری مسیر یک روبات زمینی نشان داده شده است.

مقاله دیگری نیز از همان نویسندگان، پایدارسازی نمایی یک سیستم غیرخطی زمان-گسسته را با روش کنترل بهینه معکوس، بدون حل معادله HJB و با حداقل‌سازی یک تابع هزینه معنی‌دار ارائه داده است [۱۲]. این پایدارسازی کنترل‌کننده بهینه بر اساس تابع لیاپانوفی کنترل زمان-گسسته (DTCLF) طراحی شده است.

در این تحقیق به مسئله کنترل ردگیری مسیر مرجع مبتنی بر CLF پرداخته شده است. یکی از نقاط ضعف روش مزبور، مقید نبودن آن نسبت به پارامترهای ورودی سیستم است و این مسئله همان‌طور

حالت، فیدبک  $K(x)$  وجود دارد که به ازای آن سیستم حلقه بسته پایدار گردد و در آن صورت  $V(x)$  یک تابع لیاپانوف برای آن سیستم حلقه بسته خواهد بود.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)K(x) \quad (4)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)K(x)] < 0 \Rightarrow L_f V(x) + L_g V(x)K(x) < 0$$

در این صورت، فیدبک پایدارساز به صورت زیر ارائه می شود [۴ و ۵]:

$$u = K(x) = k \left( L_f V(x), \|L_g V(x)\|^2 \right) L_g V(x)^T = \kappa(L_f V, L_g V) \quad (5)$$

که در آن،

$$\kappa(L_f V, L_g V) = \begin{cases} -\frac{L_f V + \sqrt{L_f V^2 + L_g V^2}}{L_g V}, & \text{if } L_g V \neq 0 \\ 0, & \text{if } L_g V = 0 \end{cases}$$

## ۲-۱- روش "کفایت صدق"

این روش که اساس آن مبتنی بر نظریه تصمیم گیری کفایت صدق است [۹]، دو تابع کلی بنام تابع سود (اهداف موردنیاز) و تابع هزینه (شامل پارامترهایی که برای اجرا، هزینه بر هستند) را به کار می گیرد. توابع سود و هزینه می توانند به طور دلخواه توسط کاربر انتخاب شوند و برخلاف روش های دیگر، مسئله کنترل بهینه مستقیماً حل نشده بلکه سعی شده قانون کنترلی به صورت نقطه ای به گونه ای انتخاب شود که تابع سود از تابع هزینه بیشتر شود [۹].

در این روش، تابع سود به شکل منفی مشتق زمانی تابع لیاپانوف انتخاب شده در راستای پاسخ سیستم مفروض انتخاب می شود. این انتخاب باعث می شود که با مثبت معین نگاه داشتن تابع سود، پایداری سیستم تضمین شود. همچنین تابع هزینه به شکل نقطه ای لحاظ می شود. به عبارت دیگر، در صورتی که تابع هزینه برای مسئله کنترل بهینه به شکل زیر در نظر گرفته شود:

$$J = \int_0^{\infty} \{q(x) + u^T R(x)u\} dx, \quad q(x) \geq 0, \quad R(x) > 0 \quad (6)$$

که در آن  $q(x)$  و  $R(x)$ ، به ترتیب توابع پناالتی متغیرهای حالت و کنترل هستند آنگاه این دو تابع به صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_s(u, x) = -V_x^T (f(x) + g(x)u) \quad (7)$$

$$p_r(u, x) = q(x) + u^T R(x)u$$

که توابع  $q(x)$  و  $R(x)$  به ترتیب مثبت نیمه معین و مثبت معین بوده و به طور محلی لیپ شیتز هستند. تابع  $p_s$  تابع سود (تابع قابلیت انتخاب) بوده و مشاهده می شود که نسبت به  $u$  خطی است و لذا در  $u$  مقعر است و  $p_r$  تابع هزینه (تابع قابلیت حذف) در  $u$  محدب است. در این روش قانون کنترلی از مجموعه زیر بنام مجموعه کفایت صدق انتخاب می شود.

$$S_b(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : p_s(u, x) > \frac{1}{b(x)} p_r(u, x) \right\} \quad (8)$$

که اشاره گردید گاهی اوقات باعث برهم زدن شرط پایداری لیاپانوف شده و تضمینی برای پایداری دینامیک سیستم وجود ندارد. لذا عموماً در سیستم هایی که بدون در نظر گرفتن محدودیت های ورودی کنترلی کنترل کننده طراحی می شود و بعد از عنصر اشباع استفاده می کنند ممکن است در حالات واقعی دچار ناپایداری و یا لرزش شوند، و لذا بهتر است که طراحی کنترل کننده از ابتدا با ورودی مقید طراحی شود. موضوع این مقاله، اصلاح و توسعه روش مزبور برای سیستم های با ورودی کران دار است که موضوع اصلی پژوهش حاضر است. به همین منظور ابتدا پس از ارائه مقدمه و ادبیات موضوع، در بخش ۲ به بیان نسخه کفایت صدق که از روش های مرسوم مبتنی بر CLF است مبادرت شده و در بخش ۳، به توسعه نسخه جدید روش مزبور در جهت مقیدسازی ورودی کنترلی و اثبات تحلیلی آن پرداخته شده است. به منظور بررسی نتایج حاصله، در بخش ۴ روش مزبور روی مثال هایی پیاده سازی شده و روی نتایج حاصله بحث شده است. در بخش ۵ شکل ها و جداول آورده شده و در بخش ۶، نتیجه گیری ارائه شده است.

## ۲- روش های مبتنی بر تابع لیاپانوفی کنترل

یک روش پایدارسازی سیستم غیرخطی، انتخاب یک تابع لیاپانوف  $V(x)$  و سپس سعی در پیدا کردن یک کنترل فیدبک  $u(x)$  به قسمی است که  $V(x)$  منفی معین شود. با انتخاب دلخواه  $V(x)$  این کوشش ممکن است به شکست بیانجامد ولی اگر  $V(x)$  یک CLF باشد می توان یک قانون کنترلی پایدارساز  $u(x)$  را پیدا نمود. وقتی که  $V(x)$  یک CLF باشد، قوانین کنترلی زیادی وجود خواهد داشت که  $V(x)$  را منفی معین کند. سونتاک [۴] برای اولین بار فرمولی برای  $u(x)$  ارائه داد که در صورت وجود CLF، سیستم را به صورت مجانبی پایدار می کند.

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

که  $u \in \mathbb{R}^m$  و  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ،  $x \in \mathbb{R}^n$  توابع  $f$  و  $g$  به طور محلی لیپ شیتز در نظر گرفته شده و  $f(x) = 0$ .

تابع CLF به صورت زیر تعریف می شود:

**تعریف:** تابع دوبار مشتق پذیر پیوسته  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $V \in C^2$ ) که مثبت معین و بیکران شعاعی است یک CLF نامیده می شود هرگاه:

$$\inf_u V_x^T (f + gu) < 0 \quad \text{for all } x \neq 0. \quad (2)$$

یا به عبارت دیگر:

$$L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) < 0 \quad (3)$$

که در آن،  $L_f V(x) = V_x^T f(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$  و

$$L_g V(x) = V_x^T g(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)$$

اصطلاحاً به توابع Lie مشهور هستند.

بر اساس قضیه معکوس استاندارد لیاپانوف، در صورتی که سیستم (۱) پایدارپذیر باشد آنگاه CLF وجود خواهد داشت [۳ و ۴]. در این

### ۳- ارائه نسخه جدید روش کفایت صدق مقید

در این بخش، قانون کنترلی ارائه شده در بخش قبلی برای سیستم‌های با ورودی مقید توسعه داده می‌شود. سیستم دینامیکی غیرخطی (رابطه ۱) را به صورت زیر بازتعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \\ \|u\| &\leq u_{\max}\end{aligned}\quad (14)$$

که در آن  $u \in \mathcal{R}^m$ ،  $u_{\max}$  مقدار حداکثر (اشباع) ورودی  $u$  و  $y \in \mathcal{R}^m$  بردار خروجی اندازه‌گیری شده است. همچنین فرض می‌شود که توابع  $f$  و  $g$  به صورت محلی لپ‌شیتز بوده و  $f(0) = 0$  به علاوه،  $h$  یک تابع پیوسته است و  $h(0) = 0$ . هدف اصلی این است که تابع فیدبک حالت تولید شود که سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی فراگیر باشد.

لازم به ذکر است که تابع اشباع برای سیستم (۱۴) به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u_{\max} & \text{if } u > u_{\max} \\ u & \text{if } u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, |u_{\min}| = |u_{\max}| = u_{\max} \\ u_{\min} & \text{if } u < u_{\min} \end{cases} \quad (15)$$

قضیه زیر، فرمول موردنظر را بر اساس CLF برای کنترلر فیدبک حالت سیستم (۱۴) با وجود محدودیت‌های ورودی فراهم می‌سازد و شرایط دقیقی را جهت وادار کردن خصوصیات خواسته شده برای سیستم حلقه بسته بیان می‌دارد:

**قضیه ۲:** فرض کنید که توابع قابلیت انتخاب و قابلیت حذف مطابق رابطه (۷) انتخاب شوند. مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$M(u_{\max}) = \{x \in \mathcal{R}^n : V_x^T f < u_{\max} \|V_x^T g\|\} \quad (16)$$

در صورتی که مبدأ عضو مجموعه فوق باشد، آنگاه به ازای هر شرط اولیه  $x_0 \in \Omega$  که  $\Omega = \{x \in \mathcal{R}^n : |x| \leq \delta_s\}$  زیرمجموعه پایا<sup>۱۱</sup> از  $M$  باشد، مجموعه کفایت صدق  $S_b(x) \subset \mathcal{R}^m$  به ازای مقدار  $x$  غیرتهی خواهد بود اگر و تنها اگر  $b(x)$  در نامساوی اصلاح شده زیر صدق کند:

$$b(x) \geq \begin{cases} 0 & \text{if } V_x^T g = 0 \\ 2 \frac{V_x^T f + \sqrt{(V_x^T f)^2 + u_{\max}^4 q(x) V_x^T g R^{-1} g^T V_x}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x (1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x})} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

به علاوه، اگر  $S_b(x) \subset \mathcal{R}^m$  غیرتهی باشد، به شکل زیر قابل نمایش خواهد بود:

$$S_b(x) = \left\{ -\frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x \right\} \quad (18)$$

در این صورت، کنترل کننده موردنظر، به راحتی از مجموعه فوق انتخاب می‌گردد ( $u(x) \in S_b(x)$ ) و همچنین،  $q(x) = V_x^T g g^T V_x$

**اثبات:** اثبات بخش اول مجموعه کفایت صدق مشابه قضیه قبلی است [۸]. برای اثبات رابطه ۱۷، طبق رابطه ۱۸ خواهیم

که در این مجموعه، پارامتر  $0 < b(x) < \infty$  (شاخص انتخاب)، ضریبی است که به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مجموعه کفایت صدق تهی نباشد. کنترل کننده‌های این مجموعه نسبت به پاسخ بهینه صرفاً مبتنی بر  $L$  حالت ضعیف‌تری از بهینگی را دارند اما نقطه قوت آن‌ها سادگی محاسبه کنترل کننده و ساختار تحلیلی و بسته آن است. در اینجا، به ذکر قضیه اساسی در این روش که در [۸] ارائه شده و محتوای مجموعه فوق را نشان می‌دهد پرداخته می‌شود:

**قضیه ۱ [۸]:** اگر توابع قابلیت انتخاب و قابلیت حذف مطابق فوق انتخاب شوند آنگاه مجموعه کفایت صدق در مقدار حالت  $x$  غیرتهی خواهد بود اگر و تنها اگر  $b(x)$  در نامساوی هامیلتون ژاکوبی زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}q(x) + b(x) V_x^T (x) f(x) - \\ \frac{1}{4} b(x)^2 V_x^T (x) g(x) R^{-1} (x) g^T (x) V_x (x) < 0\end{aligned} \quad (9)$$

به علاوه، اگر  $S_b(x) \subset \mathcal{R}^m$  غیرتهی باشد، به شکل زیر قابل نمایش خواهد بود:

$$S_b(x) = \left\{ -\frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x + R^{-1/2} V \sqrt{\frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - q - b V_x^T f} : \|V\| < 1 \right\} \quad (10)$$

که در آن، پارامتر  $v$  یک پارامتر آزاد است که در ناحیه تعریف شده خود (کره باز به شعاع واحد) تعریف می‌شود،  $R > 0$  و

$$q(x) \leq \frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - b V_x^T f \text{ for } \forall x \in \mathcal{R}^n$$

نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$b(x) \geq \begin{cases} -\frac{q}{V_x^T f} & \text{if } V_x^T g = 0 \\ 2 \frac{V_x^T f + \sqrt{(V_x^T f)^2 + q V_x^T g R^{-1} g^T V_x}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

**اثبات:** به مرجع [۸] مراجعه شود.

بنابراین مجموعه فوق، مجموعه‌ای از مقادیر کنترلی است که در هر حالت  $x$  تعریف شده و شرط زیر را اجابت می‌کند:

$$-V_x^T (f + gu) > \frac{1}{b} (q + u^T R u) \quad (12)$$

در این صورت، کنترل کننده موردنظر، به راحتی از مجموعه فوق انتخاب می‌گردد ( $u(x) \in S_b(x)$ ). به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned}u(x) &= -\sigma_1 + v \sigma_2 \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x,\end{aligned} \quad (13)$$

$$\sigma_2 = R^{-1/2} \sqrt{\frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - q - b V_x^T f}.$$

مزیت مجموعه فوق به شرط غیرتهی بودن آن، این است که رابطه صریحی را برای کنترلر فراهم می‌سازد.

$$0 \leq V_x^T f + \sqrt{(V_x^T f)^2 + u_{\max}^4 \cdot R^{-1} (V_x^T g g^T V_x)^2}$$

$$\leq V_x^T f + \left( |V_x^T f| + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1/2} g^T V_x \right) = u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1/2} g^T V_x$$

آنگاه به دست می آید:

$$u(x) \leq \frac{u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1/2}}{1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x}} \leq u_{\max} \quad (20)$$

رابطه فوق، یک کران بالا برای کنترل کننده فراهم می سازد.

در صورتی که  $V_x^T f > 0$ ، با استفاده از رابطه (۱۸) خواهیم داشت:

$$0 \leq V_x^T f + \sqrt{(V_x^T f)^2 + u_{\max}^4 \cdot R^{-1} (V_x^T g g^T V_x)^2}$$

$$< u_{\max} V_x^T g + \sqrt{u_{\max}^2 V_x^T g g^T V_x + u_{\max}^4 \cdot R^{-1} (V_x^T g g^T V_x)^2}$$

$$= u_{\max} V_x^T g \left( 1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)$$

آنگاه به دست می آید:

$$u(x) \leq \frac{u_{\max} V_x^T g \left( 1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)}{V_x^T g \left( 1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)} = u_{\max} \quad (21)$$

بنابراین در هر حالت، یک کران بالا برای کنترل کننده فراهم شده و مقید بودن کنترل کننده اثبات می گردد.

در خصوص رابطه ۱۸ که متناظر با رابطه ۱۰ است می توان گفت که با توجه به اینکه عبارات داخل رادیکال رابطه ۱۰ بر اساس فرمول  $b(x)$  رابطه ۱۱ به دست آمده و عبارت داخل رادیکال عملاً صفر می گردد، در اینجا نیز طبق استفاده از رابطه ۱۷ می توان نوشت:

$$b \geq \frac{2a + \sqrt{a^2 + \xi^4 c^2}}{c(1 + \sqrt{1 + \xi^2 c})} \quad (22)$$

که پس از انجام برخی عملیات ریاضی و ساده سازی خواهیم داشت:

$$(\xi^4 c^8) b^4 + (8a \xi^2 c^4) b^3 - (16a^2 \xi^2 c^2 + 8l \xi^6 c^4 + 16l \xi^4 c^2) b^2 + (32a \xi^4 l) b + 16 \xi^4 l \geq 0$$

که در آن  $a = V_x^T f$ ،  $c = V_x^T g$ ،  $l = q(x)$  و  $\xi = u_{\max}$  هستند. این رابطه، مشابه نامساوی هامیلتون-ژاکوبی (رابطه ۹) قضیه اول است و از آنجایی که صفر می شود، لذا عملاً عبارت داخل رادیکال رابطه ۱۰ ناچیز شده و صفر بودن پارامتر  $v$ ، تأثیر چندانی در عبارت کنترل کننده نخواهد گذاشت. بنابراین رابطه ۱۸ اثبات شده و در نهایت، اثبات قضیه کامل می گردد.

### ۳-۱- ملاحظات قضیه ۲

قضیه فوق علاوه بر اینکه استراتژی صریحی از طراحی کنترلر را پیشنهاد می کند، توصیفی از ناحیه ای در فضای حالت که پایداری حلقه بسته و ردیابی مسیر مرجع را به صورت مقید تضمین می کند، ارائه می دهد. این توصیف در نامساوی (۱۶) آمده است. به عبارت دیگر، نامساوی (۱۶) بزرگترین ناحیه ای را که معین منفی بودن مشتق تابع

داشت:  $u(x) = -\frac{1}{2} b(x) R^{-1} g^T V_x$  با جایگذاری (۱۷) در تابع  $u(x)$ .

می توان دید که تابع مزبور نسبت به  $g^T V_x$  فرد است و لذا فرض می کنیم  $g^T V_x \geq 0$ . واضح است که ارزیابی مشتق تابع لیپانوف برای اثبات پایداری فرمول فوق کافی است. لذا با بسط مشتق  $V(x)$  و استفاده از قانون کنترلی فوق خواهیم داشت:

$$\dot{V} = V_x^T f + V_x^T g u$$

$$= V_x^T f - V_x^T g \left( \frac{V_x^T f + \sqrt{(V_x^T f)^2 + u_{\max}^4 \cdot R^{-1} (V_x^T g g^T V_x)^2}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x \left[ 1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right]} \right) R^{-1} g^T V_x$$

$$= \frac{V_x^T f \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x} - \sqrt{(V_x^T f)^2 + u_{\max}^4 \cdot R^{-1} (V_x^T g g^T V_x)^2}}{\left[ 1 + \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right]}$$

واضح است که تساوی اخیر به ازای  $V_x^T f \leq 0$  منفی می شود.

در صورتی که  $V_x^T f > 0$ ، با استفاده از شرط مسئله (نامساوی ۱۶)، خواهیم داشت  $(V_x^T f)^2 < u_{\max}^2 V_x^T g g^T V_x$  و لذا صورت کسر عبارت فوق می شود:

$$\sqrt{(V_x^T f)^2 + u_{\max}^4 \cdot R^{-1} (V_x^T g g^T V_x)^2} \geq V_x^T f \sqrt{1 + u_{\max}^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x}$$

و لذا با قراردادی نامساوی اخیر، شرط منفی شدن مشتق تابع

لیپانوف تحقق می یابد.

به منظور تضمین این که متغیرهای حالت سیستم، نامساوی (۱۶) را برای همه زمان ها محقق می کند، شرایط اولیه بایستی داخل زیرمجموعه پایای  $\Omega$  که داخل مجموعه فشرده  $M$  قرار دارد تعریف شود. بنابراین با شروع از هر شرط اولیه  $x(0) \in \Omega$ ، نامساوی (۱۶) برقرار می گردد. به عبارت دیگر، در صورتی که شرط (۱۶) برقرار شود، پایداری بر اساس تابع لیپانوف کنترل تضمین می گردد. می توان اثبات نمود که طبق قضیه LaSalle، فقط جواب بدیهی سیستم است که به ازای آن مشتق تابع لیپانوف صفر می گردد، چراکه برای تابع CLF داریم: به ازای  $x=0$ ،  $V(0)=0$  و به ازای  $x \neq 0$ ،  $V(x) \neq 0$  (این مسئله طبق تعریف سیستم (۱۴) که  $f(0)=0$  و  $h(0)=0$  و همچنین تعریف  $b(x)$  در رابطه (۱۷) قابل حصول است).

در نتیجه، طبق دیدگاه پایداری ورودی به حالت<sup>۱۲</sup>، تابع  $\beta$  از کلاس  $KL$  وجود خواهد داشت به طوری که نامساوی زیر به ازای متغیر حالت  $x$  سیستم (۱۴) برقرار می گردد:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0), t|), \forall t \geq 0 \quad (19)$$

لذا مبدأ سیستم فوق در صورتی که نامساوی (۱۶) تأمین شود، به صورت مجانبی پایدار می گردد.

برای اثبات مقید بودن قانون کنترلی فوق، می توان گفت که اگر  $V_x^T g = 0$  آنگاه  $u(x) = 0$  و نتیجه بدیهی است. بنابراین فرض می شود که  $V_x^T g \neq 0$ . ابتدا فرض می کنیم  $V_x^T f \leq 0$ . با استفاده از رابطه زیر:

هرگاه هیچ جوابی برای آن به‌طور همسان در مجموعه  $\{h(x)=0\}$  قرار نگیرد مگر جواب بدیهی  $x(t) \equiv 0$ .

قضیه زیر، ایده اساسی کنترل‌کننده‌های مبتنی بر پسیویتی را یادآوری می‌کند:

**قضیه ۳[۳]:** هرگاه سیستم (۱۴) اولاً با یک تابع ذخیره مثبت معین و بیکران شعاعی، پسیو باشد و ثانیاً رؤیت‌پذیر حالت-صفر باشد آنگاه مبدأ  $x=0$  توسط قانون کنترلی  $u=-\varphi(y)$  به‌صورت فراگیر پایدار می‌گردد، که تابع  $\varphi$  به‌صورت محلی لپ‌شیتز است،  $\varphi(0)=0$  و برای تمامی  $y \neq 0$  داریم  $y^T \varphi(y) > 0$ .

**اثبات:** به مرجع [۳] مراجعه شود.

کاربرد قضیه فوق موقعی افزایش می‌یابد که سیستم‌های غیرپسیو را بتوان با راهکارهایی به سیستم‌های پسیو تبدیل نمود. به‌عنوان مثال برای سیستم (۱۴)، هرگاه تابع مثبت معین، بیکران شعاعی، پیوسته و دیفرانسیل‌پذیر  $V(x)$  وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر  $x$  داشته باشیم  $V_f^T f(x) \leq 0$ ، آنگاه با تعریف خروجی به‌صورت  $y = h(x) = V_x^T g(x)$ ، می‌توان سیستم را نسبت به ورودی  $u$  و خروجی  $y$  پسیو نمود. در صورتی که رؤیت‌پذیری حالت-صفر برقرار باشد قضیه فوق برای استخراج قانون کنترلی موردنظر نیز کارساز خواهد شد.

حال، بر اساس اینکه تابع  $V(x)$  مورد نظر قضیه ۲، CLF است، شرط  $V_f^T f(x) \leq 0$  برقرار بوده و لذا با تعریف خروجی  $y = V_x^T g$ ، همان‌گونه که قبلاً عنوان شد، می‌توان دید که قانون کنترلی  $u(x) = -\frac{1}{2}b(x)R^{-1}g^T V_x$  با  $b(x)$  تعریف‌شده طبق رابطه ۱۷، تابعی فرد نسبت به  $V_x^T g$  است؛ یعنی  $u(x) = -\varphi(V_x^T g(x))$  که در شرایط قضیه فوق می‌گنجد. ضمن اینکه به‌صورت مشابه طبق قضیه لاسالو با اندکی بررسی می‌توان دریافت که رؤیت‌پذیر حالت-صفر نیز هست. بنابراین، پایداری مجانبی سیستم موردنظر تحت شرایط قضیه ۲ و نتایج آن از دیدگاه پسیویتی نیز قابل اثبات خواهد بود.

#### ۴- شبیه‌سازی عددی

**مثال ۱:** سیستم غیرخطی تک‌ورودی-تک‌خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = x^2 - u$$

با انتخاب تابع لیپانوف  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، شرط CLF را کنترل می‌کنیم:

$$\text{if } x < 0: \inf_{u>0} (V_x^T f + V_x^T g u) = \inf_{u>0} (x^3 - xu) = x^3 < 0$$

$$\text{if } x > 0: \inf_{u>0} (V_x^T f + V_x^T g u) = \inf_{u>0} (x^3 - xu) = -\infty < 0$$

مشاهده می‌شود که  $V$  یک CLF است. ابتدا قانون کنترلی طبق قضیه ۱ در حالت بدون محدودیت ورودی به دست می‌آید. مسئله در حالت ردگیری بررسی می‌شود. لذا ورودی مرجع به‌عنوان ورودی سینوسی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

لیپانوف را تحت محدودیت‌های ورودی سیستم برای پایداری مجانبی فراهم می‌سازد، ارائه می‌دهد. از طرف دیگر، با توجه به اینکه مبدأ (نقطه تعادل) داخل مجموعه  $M$  قرار دارد، هر مسیر حلقه‌بسته‌ای که از داخل مجموعه فوق شروع شود تضمین می‌شود که تحت کنترل‌کننده مزبور به سمت مبدأ خواهد رفت. در حقیقت، خیلی مشکل نیست که دیده شود نامساوی مزبور، ارتباط نزدیکی با شرط پایداری لیپانوف کلاسیک به فرم  $\dot{V} = V_x^T f + V_x^T g u \leq 0$  دارد در صورتی که الزام اضافی  $\|u\| \leq u_{\max}$  نیز به آن تحمیل شود. لذا نامساوی (۱۶)، راهنمایی مناسبی را برای یافتن شرط اولیه قابل قبول که با شروع از آن، سیستم حلقه‌بسته با ورودی مقید پایدار باشد را فراهم می‌سازد. این مسئله مهم است چراکه در سیستم‌های کاربردی برای اپراتور مهم است که مسئله را تحت چه شرایط اولیه‌ای پیاده‌سازی نماید تا پایداری سیستم تضمین شده باشد.

از طرف دیگر، نامساوی (۱۶)، وابستگی اندازه ناحیه پایداری حلقه‌بسته را با مقدار حداکثر اشباع ( $u_{\max}$ ) نشان می‌دهد؛ هرچقدر مقدار حداکثر اشباع کم‌تر باشد (ورودی محدودتر شود) ناحیه پایداری حلقه‌بسته کوچک‌تر می‌شود. بدیهی است که بزرگ‌ترین اندازه ناحیه پایداری در غیاب اشباع صورت می‌پذیرد ( $u_{\max} \rightarrow \infty$ ).

در شرایط خاصی که ترم  $V_x^T f$  منفی باشد، پایداری حلقه‌بسته و خصوصیات عملکردی تعیین‌شده در قضیه ۲ در حضور محدودیت‌های ورودی، فراگیر خواهد شد. دلیل این مسئله به نامساوی (۱۶) بازمی‌گردد که در شرایط  $V_x^T f < 0$ ، نامساوی مزبور به ازای هر شرط اولیه‌ای برقرار خواهد بود و این همان طبیعت فراگیر بودن نتایج حاصله است.

#### ۳-۲- اثبات قضیه ۲ از دیدگاه نظریه اتلاف<sup>۱۳</sup>

در سیستم‌های غیرخطی، مفهوم اتلاف‌شوندگی (پسیویتی) که به تئوری سیستم‌های پراکنده‌ساز (اتلاف‌کننده) مربوط می‌شود مفهومی است که بین ورودی و خروجی سیستم تعریف می‌شود. مباحث اولیه این تئوری توسط ویلمز [۱۳] به‌صورت یک نامساوی شامل تابع ذخیره<sup>۱۴</sup> و نرخ تغذیه<sup>۱۵</sup> ارائه شد. در اواخر دهه هفتاد، هیل و مویلان تئوری فوق را به سیستم‌های غیرخطی affine گسترش دادند [۱۴].

در این تئوری فرض می‌شود که انرژی پراکنده‌شده در یک سیستم دینامیکی کم‌تر از انرژی کل داده‌شده به آن سیستم است. برای یک سیستم دینامیکی به فرم زیر، مفهوم پسیویتی بدین‌صورت بیان می‌شود [۳]:

**تعریف:** سیستم غیرخطی (۱۴) پسیو است (نسبت به ورودی  $u$  و خروجی  $y$ ) اگر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر و مثبت نیمه‌معین  $V(x)$  به‌عنوان تابع ذخیره وجود داشته باشد به قسمی که:

$$u^T y \geq \dot{V}(x) \quad (25)$$

و اکیداً پسیو است اگر علامت مساوی از نامساوی فوق برداشته شود. همچنین سیستم (۱۴) رؤیت‌پذیر حالت-صفر<sup>۱۶</sup> نامیده می‌شود

**مثال ۲:** معادله سینماتیک شتاب- موقعیت یک پرنده بدون سرنشین را به صورت  $\ddot{x} = u$  در نظر بگیرید که در آن  $x$  حالت موقعیت پرنده و  $u$  ورودی شتاب در سه جهت است. با توجه به این که ردگیری مسیر مرجع مدنظر است، با در نظر گرفتن ورودی مرجع به صورت مشابه  $\dot{x}_d = 4\cos(2t)$  و  $x_d = 2\sin(2t)$ ، معادله فوق به صورت زیر برحسب خطای ردگیری بازنویسی می شود:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = u - \ddot{x}_d \end{cases}$$

$$e = [e_1 \quad e_2]^T = [x - x_d \quad \dot{x} - \dot{x}_d]^T$$

$$\therefore f(e) = \begin{bmatrix} e_2 \\ -\ddot{x}_d \end{bmatrix}, g(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون جهت طراحی کنترل کننده، تابع CLF به شکل زیر انتخاب می شود:

$$V(e) = e^T \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & \lambda \end{bmatrix} e$$

که در آن  $m$  و  $\lambda$  دو درجه آزادی هستند و به منظور نزدیک تر شدن به مقدار بهینه سیستم لحاظ شده اند. واضح است که برای مثبت معین بودن  $V$  بایستی نامساوی های  $\lambda > 0$  و  $\lambda - m^2 > 0$  برقرار باشد. لذا با انتخاب فوق، عبارات سازنده کنترل کننده به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$V_x^T f(e) = 2e_1 e_2 + 2me_2^2 - 2me_1 \ddot{x}_d - 2\lambda e_2 \ddot{x}_d$$

$$V_x^T g(e) = 2me_1 + 2\lambda e_2$$

شرط لازم جهت ادامه کار آن است که در نقاطی که  $V_x^T g = 0$  است،  $V_x^T f < 0$  باشد. لذا:

$$V_x^T g = 0 \Rightarrow e_2 = -\frac{m}{\lambda} e_1$$

$$\therefore V_x^T f = \left( \frac{2m^3}{\lambda^2} - \frac{2m}{\lambda} \right) e_1^2 < 0 \Rightarrow m^2 < \lambda$$

این همان شرط مثبت معین بودن تابع فوق است که اگر رعایت شود تابع CLF خواهد بود. سپس باید دو پارامتر  $m$  و  $\lambda$  چنان تنظیم شوند تا کمترین مقدار تابع هزینه حاصل شود.

بنابراین با توجه به برقراری شرایط، کنترل کننده تحت روندی که در قضایای ۱ و ۲ آمد، ساخته می شود. مقادیر پارامترهای موردنظر به صورت  $m = 0.23$ ،  $\lambda = 0.1$ ،  $\nu = 0.1$ ،  $R = 0.5$  و ضمناً به صورت  $q = (V_x^T g)^2$  و  $u_{\max} = 9$  در نظر گرفته می شوند. جهت انجام مقایسه ای کامل، طراحی به ازای چند شرط آغازین متفاوت انجام پذیرفت. جدول ۱، مقادیر مربوط به توابع هزینه دو روش را به ازای شرایط آغازین بررسی شده با یکدیگر مقایسه می نماید و نشان می دهد که هزینه روش پیشنهادی به دلیل مقید نمودن ورودی کنترلی، قدری بیش تر حاصل شده هرچند که پایداری سیستم، تأمین شده است. شکل های ۴ و ۵، نتایج حاصله به ازای شرط آغازین (۲ و ۱) را نشان می دهند. شکل ۴ نشان می دهد که روش اول به ازای ورودی مقید

$$x_d = 2\sin(2t), \quad \dot{x}_d = 4\cos(2t)$$

معادله خطا به صورت زیر بسط داده می شود:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (e + x_d)^2 - u - \dot{x}_d, \quad e = x - x_d \\ \therefore f(e) &= (e + x_d)^2 - \dot{x}_d, \quad g(e) = -1. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$V_x^T f(e) = e \left[ (e + x_d)^2 - \dot{x}_d \right]$$

$$V_x^T g(e) = -e$$

$$J = \int (q(e) + u^T(e)Ru(e))dt$$

برای مثال فوق، مقادیر  $R=0.1$ ،  $\nu=0.1$  و  $q=(V_x^T g)^2$  در نظر گرفته شده اند. ابتدا، قانون کنترلی مطابق روش اول (رابطه ۱۳) و با استفاده از رابطه ۱۱ به صورت زیر حاصل می گردد به گونه ای که پایداری مجانبی را بدون در نظر گرفتن محدودیت های ورودی ارائه می دهد:

$$b(e) = \begin{cases} 0 & \text{if } e = 0 \\ 2 \frac{(e + x_d)^2 - \dot{x}_d + \sqrt{[(e + x_d)^2 - \dot{x}_d]^2 + R^{-1}e^2}}{R^{-1}e^3} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u(e) = -\sigma_1 + \nu\sigma_2$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}b(e)R^{-1}e,$$

$$\sigma_2 = R^{-1/2} \sqrt{\frac{1}{4}b(e)^2 R^{-1}e^2 - e^2 - e[(e + x_d)^2 - \dot{x}_d]b(e)}.$$

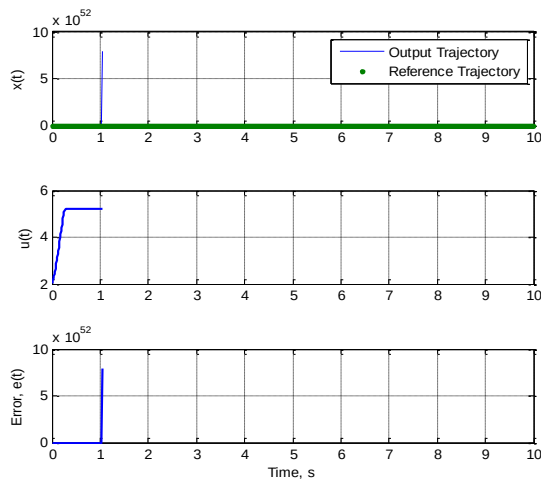
شکل ۱، تغییرات متغیرهای حالت خطا و ورودی کنترلی را با مقدار اولیه  $x_0=2$  برحسب زمان نمایش می دهد. در صورتی که محدودیت در ورودی وجود داشته باشد، با استفاده از قضیه ۲، نامساوی (۱۶) ایجاب می کند که:

$$V_x^T f \leq u_{\max} |V_x^T g| \Rightarrow x^3 \leq u_{\max} x \text{ or } x_0^2 \leq u_{\max} \text{ for } x_0 \geq 0.$$

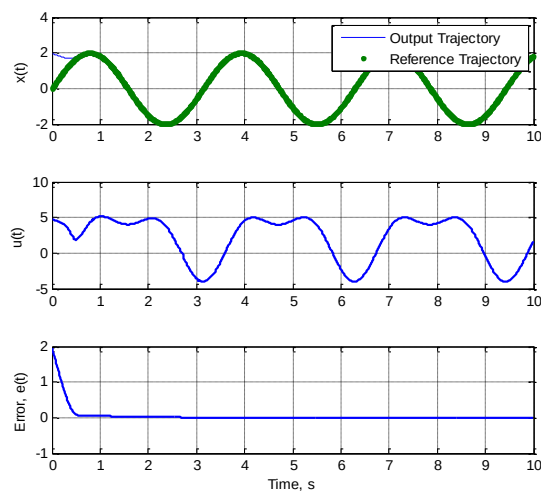
یعنی  $x_0$  مجاز بایستی کمتر از جذر  $u_{\max}$  باشد. شکل ۲، تغییرات متغیرهای حالت خطا و ورودی کنترلی را با استفاده از روش اول پس از اعمال اشباع  $u_{\max}=5$  برحسب زمان نمایش داده و نشان می دهد که در این حالت، سیستم ناپایدار شده است.

حال با استفاده از قضیه ۲ (روش پیشنهادی) و با استفاده از شرایط اولیه مسئله در حالت مشابه و اعمال محدودیت ورودی، قانون کنترلی حاصل گشته است (شکل ۳). بر اساس نتایج حاصله، می توان دید که قانون کنترلی فوق، به خوبی توانسته با وجود محدودیت در ورودی، مبادرت به پایداری و ردگیری مسیر نماید. در این حالت، حداکثر میزان ورودی حدود ۵ به دست آمده است.

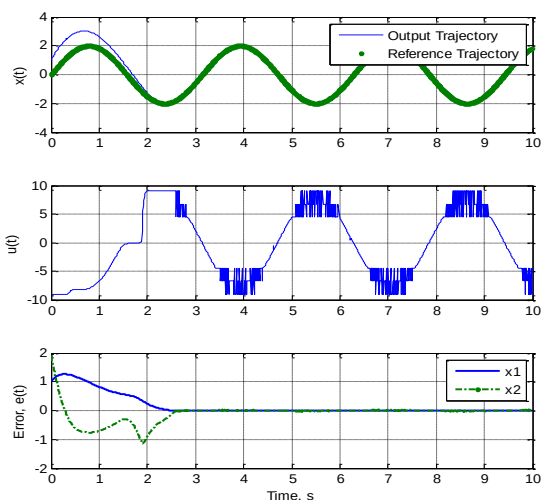
از طرف دیگر، با مشاهده نمودار زمانی خطای خروجی، می توان میل نمودن خطای خروجی به سمت صفر را دید و نتیجه گرفت که عملکرد پاسخ سیستم مناسب است. لازم به ذکر است که مقدار تابع هزینه در روش اول و بدون محدودیت ورودی  $J=132$  و در روش دوم  $J=134$  واحد به دست آمده که حاکی از افزایش اندکی هزینه به دلیل مقید شدن ورودی کنترلی در روش دوم است.



شکل ۲: خروجی شبیه‌سازی در حالت نرمال پس از اعمال اشباع برای مثال اول



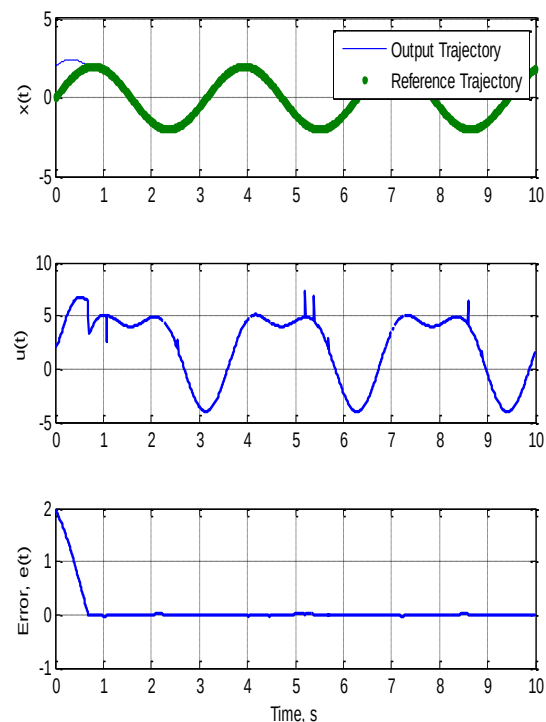
شکل ۳: خروجی شبیه‌سازی سیستم با ردگیر اصلاح شده و محدودیت ورودی برای مثال اول



شکل ۴: خروجی پارامترهای حاصل از روش اول برای مثال دوم

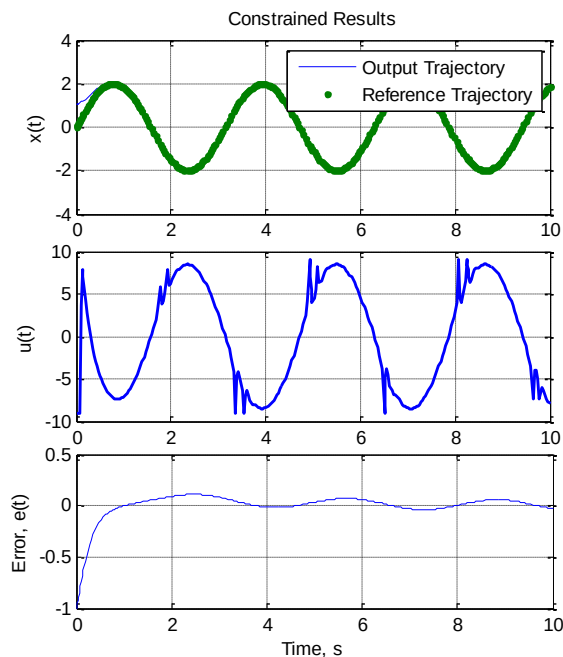
دچار لرزش و نوسانات شده حال آن که در روش دوم مطابق شکل ۵، مسیر مرجع دنبال شده و ورودی کنترلی نیز مقید مانده است. همچنین به منظور صحت‌گذاری نتایج، مثال دوم با استفاده از کنترل‌کننده کلاسیک PID نیز مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، مدل مزبور در محیط MATLAB-Simulink پیاده‌سازی گردید و از ابزارهای استاندارد آن برای تنظیم بهینه بهره‌های کنترل‌کننده استفاده شد که با توجه به ورودی سینوسی با دامنه ۲ و فرکانس ۲ رادیان بر ثانیه، مقادیر بهره به صورت  $K_p = 145/4$ ،  $K_I = 45/5$  و  $K_D = 42/2$  محاسبه گردیدند. نتایج به ازای شرط آغازین (۱ و ۲) در دو حالت ورودی نامقید و مقید ( $u_{\max} = 9$ ) حاصل شد که در شکل‌های ۶ و ۷ قابل مشاهده است. دیده می‌شود که در حالت بدون مقید، سیستم مزبور ورودی بالایی را در لحظات ابتدایی مطالبه نموده تا ردگیری سینوسی را انجام دهد و در حالت مقید، مشابه مثال‌های قبلی، سیستم دچار نوسان شده است.

## ۵- شکل‌ها و جدول‌ها



شکل ۱: نمودارهای حالت، کنترلر و خطا بدون محدودیت ورودی برای مثال اول





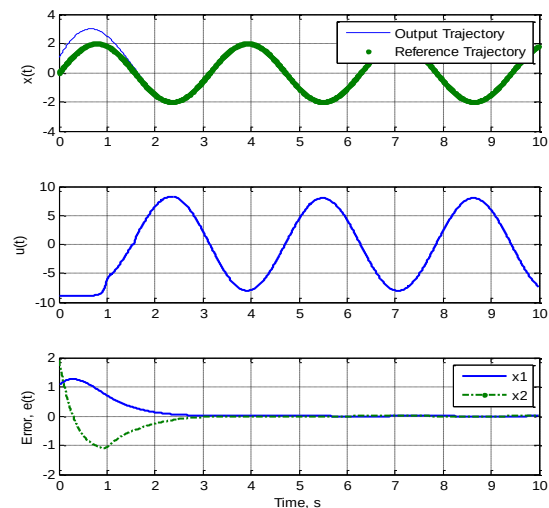
شکل ۷: خروجی پارامترهای حاصل از روش PID در حالت مقید

## ۶- نتیجه

در این مقاله، طراحی ردگیری مسیر مرجع با رویکرد غیرخطی مبتنی بر CLF مورد بررسی قرار گرفت. ویژگی اصلی این نوع کنترل کننده‌ها، وجود حل تحلیلی و اثبات پایداری مجانبی آن‌ها است. نسخه‌های پایه مبتنی بر CLF در عین سادگی دارای بهینگی و تقید نیستند. نسخه کفایت صدق روش تحلیلی پیچیده‌تری را ارائه داده و بهینگی را لحاظ نموده ولی به‌کارگیری در سیستم‌های با ورودی مقید را تضمین نمی‌کند. روش پیشنهادی که نسخه مقیدشده روش کفایت صدق است، این مشکل را حل نموده است به‌طوری‌که پایداری و مقید بودن آن نسبت به ورودی هم به روش استاندارد و هم با دیدگاه پسیویتی اثبات شده است. با بررسی نتایج عددی حاصل از روش اول و همچنین روش کلاسیک PID نیز مشاهده گردید که در صورت مقید نمودن ورودی، سیستم موردنظر ناپایدار شده و یا باعث نوسان می‌شود و لذا کنترل کننده‌هایی که بدون در نظر گرفتن ورودی مقید طراحی می‌شوند نمی‌توانند پایداری سیستم را تضمین نمایند؛ این در حالی است که روش پیشنهادی، توانسته این نقیصه را برطرف نماید. روش مزبور می‌تواند روش کارآمدی باشد به‌شرط اینکه فرضیات قضیه ۲ (نامساوی ۱۶) مدنظر قرار گیرد به‌گونه‌ای که مقادیر شرایط اولیه متغیرهای حالت به‌گونه‌ای انتخاب شوند که در محدوده فوق‌الذکر قرار گیرند.

## مراجع

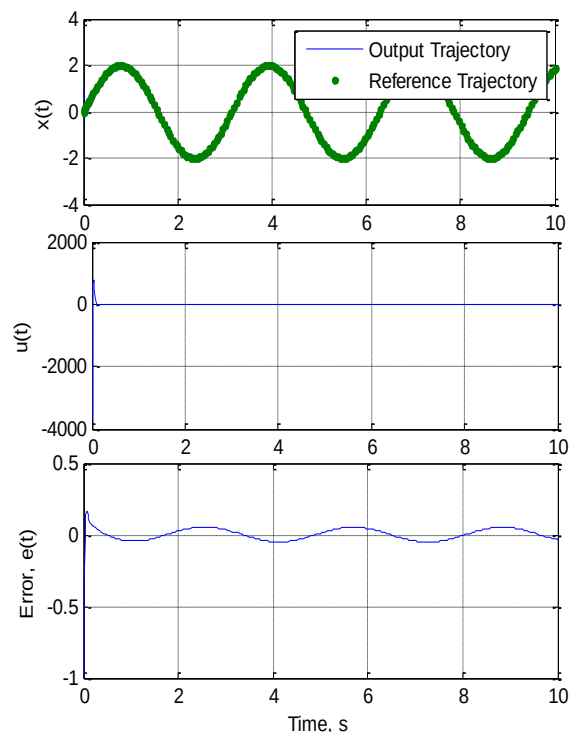
- [1] David Saussié, Lahcen Saydy, Ouassima Akhrif, and Caroline Bérard, "Gain Scheduling with Guardian Maps for Longitudinal Flight Control", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 34, No. 4, July–August 2011.
- [2] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Berlin Springer, 1989.



شکل ۵: خروجی پارامترهای حاصل از روش دوم برای مثال دوم

جدول ۱: مقایسه هزینه به‌دست‌آمده از دوروش کنترلی

| شرایط آغازین       | مقدار تابع هزینه |           |           |
|--------------------|------------------|-----------|-----------|
|                    | (۱ و ۲)          | (۱/۵ و ۲) | (۲ و ۰/۵) |
| روش کفایت صدق      | ۳/۹۲۸۸           | ۴/۲۵۴۶    | ۳/۸۱۸۸    |
| روش کفایت صدق مقید | ۴/۵۳۳۸           | ۵/۵۵۲     | ۳/۹۶۴۶    |



شکل ۶: خروجی پارامترهای حاصل از روش PID در حالت نامقید

- [3] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2003.
- [4] E. D. Sontag, "A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization," *Syst. Control Lett.*, vol. 13, pp. 117–123, 1989.
- [5] Y. Lin, E.D. Sontag, "A universal formula for stabilization with bounded controls", *Systems Control Lett.* 16 (1991) 393–397.
- [6] Y. Lin and E. Sontag, "Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs," *Control-Theory Adv. Technol.*, vol. 10, no. 4, pp. 1981–2004, Dec. 1995.
- [7] Freeman, R.A. and Primbs, J.A., "Control Lyapunov Functions: New Ideas from an Old Sources", *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control Kobe, Japan December 1996*.
- [8] J. Willard Curtis, and Randal W. Beard, "Satisficing: A New Approach to Constructive Nonlinear Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 7, July 2004.
- [9] W. Stirling, "Satisficing Games and Decision Making: With Applications to Engineering and Computer Science". Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [10] Takanori Pukao, Takeshi Kanzawa, Koichi Osuka, "Inverse Optimal Tracking Control of an Aerial Blimp Robot", *Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*, June 23-25, 2005.
- [11] Fernando Ornelas, Edgar N. Sanchez , Alexander G. Loukianov, "Discrete-time Inverse Optimal Control for Nonlinear Systems Trajectory Tracking", *49th IEEE Conference on Decision and Control*, December 15-17, 2010.
- [12] Fernando Ornelas, Edgar N. Sanchez , Alexander G. Loukianov, "Discrete-time Nonlinear Systems Inverse Optimal Control: A Control Lyapunov Function Approach", *2011 IEEE International Conference on Control Applications (CCA), Part of 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, Denver, CO, USA. September 28-30, 2011.
- [13] Willems, J. C., *Dissipative dynamical systems part I: general theory*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 45, No. 1, pp. 321–351, 1972.
- [14] Hill, D., P. Moylan, "The stability of nonlinear dissipative systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 21, pp. 708–711, October 1976.

## زیر نویس ها

---

<sup>\</sup>Path Following  
<sup>^</sup> Trajectory Tracking  
<sup>^</sup> Gain scheduling  
<sup>^</sup> Linear Parameter-Varying  
<sup>^</sup> Control Lyapunov Function  
<sup>^</sup> Satisficing Method  
<sup>^</sup> Aerial Blimp Robot  
<sup>^</sup> Hamilton-Jacobi-Bellman  
<sup>^</sup> Passivity  
<sup>^</sup> Chattering  
<sup>^</sup> Invariant Set  
<sup>^</sup> Input to State Stable  
<sup>^</sup> Passivity (Dissipativity) theorem  
<sup>^</sup> Storage Function  
<sup>^</sup> Supply Rate  
<sup>^</sup> Zero-State observable