

## ارائه روشی جهت طراحی کنترل کننده برای هدایت مسیر بازوی غیرهولونومیک روبات لاپاروسکوپی

امیر امین زاده قوی فکر<sup>۱</sup>، کارشناسی ارشد محمدعلی بادامچی زاده<sup>۲</sup>، دانشیار، قاسم علیزاده<sup>۳</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه تبریز- تبریز- ایران - a\_aminzadeh89@ms.tabrizu.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه تبریز- تبریز- ایران - mbadamchi@tabrizu.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه تبریز- تبریز- ایران - alizadeh@tabrizu.ac.ir

**چکیده:** روبات لاپاروسکوپی ابزاری برای جراحی، با حداقل دخالت دست جراح می‌باشد. در این روبات دستیابی به اهدافی چون ردیابی دقیق، تضمین پایداری و حذف اغتشاشات بسیار مهم بوده و همین امر باعث گردیده که انتخاب یک کنترل کننده مناسب برای آن به یکی از موضوعات مهم در حوزه کنترل این سیستم‌ها تبدیل گردد. در این مقاله در ابتدا مراحل طراحی و شبیه‌سازی روبات گرسپر لاپاروسکوپی بیان گردیده و دلایل استفاده از مواد در نظر گرفته شده برای قطعات به کار رفته تشریح می‌گردد. در ادامه مسأله‌ی مسیریابی غیرهولونومیک و بررسی هولونومیک یا غیرهولونومیک بودن محدودیت‌های فافین معرفی شده، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس با توجه به ساختار غیرهولونومیک روبات، با استفاده از تقریب ریتز به طراحی کنترل کننده‌ای برای هدایت بهینه‌ی گرسپر، بر مبنای دستورات داده شده توسط جراح پرداخته شده است. لازم است این بخش از روبات، که وظیفه اصلی انجام عملیات جراحی را بر عهده دارد، بر اساس ویژگی‌های بافت بدن بیمار که به صورت نامعینی می‌باشد، کنترل گردد. شبیه‌سازی‌های انجام شده نیز، توانایی روش به کار رفته را در دستیابی به مسیریابی بهینه نشان می‌دهند.

**واژه‌های کلیدی:** تقریب ریتز، جراحی از راه دور، ردیابی مطلوب، لاپاروسکوپی، محدودیت غیرهولونومیک

## Designing a Controller for Optimal Steering of Nonholonomic Laparoscopic Robotic Manipulators

A. Aminzadeh ghavifekr<sup>1</sup>, M.A. Badamchizadeh<sup>2</sup>, G. Alizadeh<sup>3</sup>

1, 2, 3- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

**Abstract:** Robotic laparoscopic grasper is a surgical tool with minimal invasion. In this robot, achieving the goals like precise tracking, stability and disturbance rejection is very important and this makes selecting a suitable controller to be one of the most important issues in these systems. In this paper, first the stages of modeling and simulating of laparoscopic robot will be discussed and the reasons for selecting the appropriate materials for different parts of it will be explained. Then the problem of nonholonomic trajectory planning and conditions for proposed pffian constraint to be holonomic or nonholonomic will be studied. With regard to the nonholonomic structure of explained robot, using the Ritz estimation, a controller for optimal steering of grasper will be designed. This part of the robot, which performs the main part of the surgery, be controlled based on the uncertain properties of the tissues of patients body. Simulation results validate the efficiency of the proposed method for steering and controlling of the robot.

**Keywords:** Ritz Approximation, Remote Surgery, Desired tracking, Laparoscopy, nonholonomic constrains

تاریخ ارسال مقاله: ۹۱/۷/۲۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۹۲/۳/۲۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۲/۳/۲۸

نام نویسنده‌ی مسئول: محمدعلی بادامچی زاده

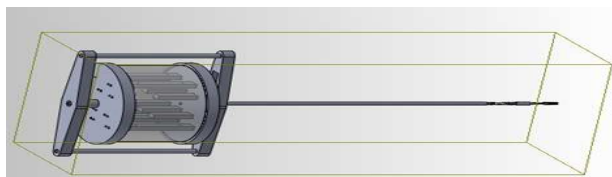
نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران- تبریز- بلوار ۲۹ بهمن- دانشگاه تبریز - دانشکده- مهندسی برق و کامپیوتر

## ۱- مقدمه

تنها در باب وجود مسیر مطلوب اظهار نظر می‌کند و روشی برای تولید آن را ارائه نمی‌دهد. چندین روش برای هدایت این سیستم‌ها معرفی گردیده است، که از جمله آن‌ها می‌توان به هدایت سیستم توسط سینوسی‌ها [۸]، تکنیک‌های فوریه و تبدیل به صورت زنجیر شده [۹] نام برد. در این مقاله و در قسمت ۴-۴ با معرفی تابع هزینه مناسب، مدل دینامیکی قسمت گرسپر روبات جراح در نظر گرفته شده و از تقریب ریتز برای هدایت سیستم از هر شرط اولیه به هر شرط نهایی داده شده توسط جراح استفاده می‌شود. در انتها نیز شبیه‌سازی‌های مربوطه عملکرد سیستم و توانایی به‌کارگیری آن در دستیابی به مسیر مورد نظر را نشان خواهند داد.

## ۲- طراحی روبات گرسپر لاپاروسکوپی

در قسمت طراحی روبات، در ابتدا یک مدل اولیه از مکانیک روبات طراحی شده و مواد و ابزار مورد نیاز برای ساخت آن انتخاب می‌شوند. سپس با توجه به نیروها و گشتاورهای مورد نیاز برای قسمت‌های متحرک روبات و با ضریب اطمینان خوبی، موتورها (از نوع سروو موتور) انتخاب می‌گردند. شکل ۱ یک شبیه‌سازی از ساختار مکانیکی روبات گرسپر لاپاروسکوپی را نشان می‌دهد.



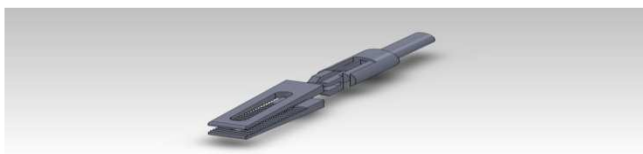
شکل ۱: شبیه‌سازی ساختار مکانیکی روبات گرسپر لاپاروسکوپی

## ۲-۱- طراحی گریپر

گریپرها، endeffector روبات‌های جراح می‌باشند که شکل‌ها و کاربردهای گوناگون داشته و از آن‌ها برای انجام عملیات پزشکی استفاده می‌شود. شکل ۲ و شکل ۳ به ترتیب انواع گریپرها متداول در ابزار جراحی و مدل گریپر استفاده شده در این مقاله را نشان می‌دهند.



شکل ۲: انواع گریپرها متداول در ابزار جراحی



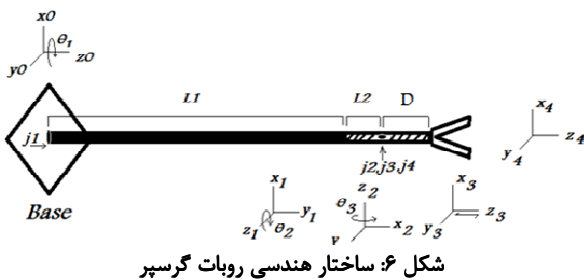
شکل ۳: مدل گریپر شبیه‌سازی شده

در زمینه جراحی از راه دور مطالعات زیادی انجام گرفته و مقالات متعددی ارائه گردیده است [۱،۲]. دانشمندان طی ۳۰ سال گذشته تلاش‌های زیادی را برای ساخت روبات جراح انجام داده‌اند. استفاده از روبات‌های جراح موجب کاهش نیروهای انسانی متخصص گردیده و خطای فرایندهای جراحی را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهد. یکی از روش‌های مطرح در این زمینه عمل لاپاروسکوپی می‌باشد [۳]. در این روش از طریق یک سوراخ کوچک، دوربین و ادوات جراحی به داخل بدن بیمار فرستاده شده و به وسیله مانیتورهای مخصوص، مسیر حرکت آن کنترل می‌گردد. هر چند در این حالت به علت کوچکی سوراخ ایجاد شده، دوره نقاهت و بستری بودن بیمار کم است ولی مشکلات ناشی از نبود ارتباط فیزیکی بین جراح و بیمار باعث شده تا توجه به ساختارهای رباتیک مورد تاکید قرار گیرد تا علاوه بر دقیق‌تر و ساده‌تر شدن فرایند جراحی، به کمک ساختار هپتیک و فیدبک‌گیری از نیرو، از بروز صدمات ناخواسته به بافت بدن اجتناب گردد [۴،۵]. یکی از قسمت‌های مهم در روبات‌های جراح، گرسپر آن‌ها می‌باشد که با بافت‌های بدن بیمار در تماس است. هوشمند کردن گرسپر روبات‌های جراح نقش مهمی در کاهش خطای عمل جراحی ایفا کرده و به پزشکان این امکان را می‌دهد که در حین عمل درک بیشتری از منطقه تحت عمل داشته باشند. این روبات‌ها بر اساس حرکت دست جراح، اعمالی مانند برش بافتی را بسیار دقیق انجام داده و تصاویر هنگام عمل را نیز به صورت واضح و شفاف در اختیار جراح قرار می‌دهند [۶].

در قسمت اول این مقاله، مراحل طراحی و شبیه‌سازی روبات گرسپر لاپاروسکوپی بیان شده و دلایل استفاده از مواد در نظر گرفته شده برای قطعات طراحی شده تشریح می‌گردد. در ادامه مقاله به این پرسش پاسخ داده می‌شود که برای دو نقطه دلخواه  $q_0, q_f \in R^3$  از روبات لاپاراسکوپ، چه زمانی می‌توان مسیر مطلوب  $q(t)$  را توسط جراح تولید کرد که محدودیت‌های فافین را ارضا کرده و  $q_0$  را به  $q_f$  متصل نماید. محدودیت‌های فافین در بخش ۴-۱ معرفی می‌گردند. مجموعه‌ی تمام نقاط  $q_f$  که می‌توانند از طریق یک مسیر  $q(t)$  که محدودیت‌های فافین را ارضا می‌کند، به  $q_0$  وصل شوند مجموعه‌ی نقاط دسترس‌پذیر متناظر با  $q_0$  گفته می‌شود. بنابراین تمایل داریم بدانیم که تحت چه شرایطی، ناحیه‌ی دسترس‌پذیر، کل  $R^3$  خواهد بود. یک شرط لازم برای آن که این ناحیه کل  $R^3$  باشد این است که تمام محدودیت‌ها غیرهولونومیک باشند [۷]. بررسی هولونومیک و یا کاملاً غیرهولونومیک بودن یک مجموعه از محدودیت‌های فافین کار پیچیده‌ای است. بنابراین در قسمت ۴-۲ و ۴-۳ ریاضیات و الگوریتم‌های لازم برای بررسی آسان‌تر این موضوع بر مبنای نظریه‌ی هندسه دیفرانسیل ارائه خواهد شد. از قضیه چاو، برای بررسی کنترل‌پذیری محلی استفاده شده و مشاهده می‌گردد که این قضیه

### ۳- مدل دینامیکی و محاسبات هندسی گرسپر

برای اینکه بتوان محل قرارگیری endeffector روبات را در هر لحظه در فضای مختصات کارتزین و نسبت به زمین به دست آورد، می توان از جدول پارامترهای دناویت-هارتینبرگ [۷] استفاده کرد. به این منظور و صرفاً برای انجام محاسبات، فنر گرسپر با سه مفصل جایگزین شده است. همان طور که در شکل ۶ نشان داده شده است، دو عدد از این مفاصل، دورانی در نظر گرفته شده اند تا دوران حول محورهای  $Z_1$  و  $Z_2$  را تأمین کنند. از آنجایی که طول فنر هنگام دوران به مقدار  $L_2$  ثابت می ماند و دچار کشیدگی و فشردگی نمی گردد، در محاسبات این فاصله ( $L_2$ ) به مقدار طول میله رابط ( $L_1$ ) اضافه می گردد و مفاصل دورانی و خطی در فاصله  $L_2$  از ابتدای فنر در نظر گرفته می شوند.



رابطه (۱) معادله دینامیکی روبات را نشان می دهد.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (1)$$

در این رابطه،  $M(q)$  ماتریس جرم-اینرسی،  $C(q, \dot{q})$  ماتریس کوریولیس و  $g(q)$  بردار گرانشی می باشند. همچنین دو ویژگی اساسی زیر نیز برای آن وجود دارد [۷]:

$$\alpha_1 I \leq M(q) \leq \alpha_2 I \quad (2)$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})a_d \quad (3)$$

که در آن  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  ماتریس رگرسور دینامیکی و  $a_d$  پارامترهای دینامیکی و  $\alpha_1, \alpha_2$  ضرایب مثبت ثابتی می باشند.

از طرفی موقعیت endeffector را می توان بر اساس رابطه (۴) بدست آورد:

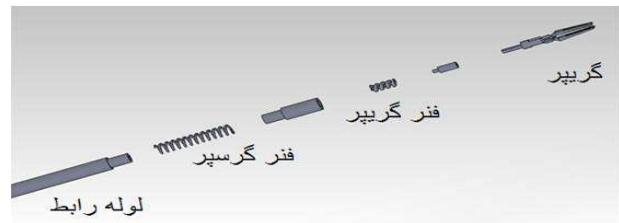
$$x = h(q) \quad (4)$$

در این رابطه  $h(\cdot)$  در حالت کلی یک تبدیل غیرخطی است که رابطه بین فضای مفصلی و فضای کاری را مشخص می کند و  $q$  نیز بردار زوایای مفاصل می باشد.

### ۴- بررسی رفتار محدودیت های غیرهولونومیک

در این بخش اثر محدودیت های غیرهولونومیک بر رفتار سیستم، مورد مطالعه قرار می گیرد. ابتدا به روش تشخیص نوع محدودیت ها اشاره شده و سپس ابزار ریاضی لازم را توضیح داده و الگوریتم طراحی شده برای هدایت مسیر بازوی غیرهولونومیک روبات گرسپر لاپاراسکوپ

لوله رابط از جنس استیل ۳۱۶ می باشد. سیم های انتقال قدرت از درون لوله رابط عبور کرده و حرکت مورد نیاز را به گریپر منتقل می کنند. یک سر لوله رابط به محفظه استوانه ای شامل موتورها و سر دیگر آن به گریپر متصل است. لوله رابط توسط روکشی لاستیکی پوشانده شده است. انتقال دهنده های حرکت به گریپر شامل فنر و سیم بکسل ها می باشند. فنر گریپر را به لوله رابط متصل می کند و قابلیت حرکت گریپر توسط فنر حول لوله رابط امکان پذیر می گردد. همچنین ۵ عدد سیم بکسل (از نوع سیم های تابیده به قطر ۰/۸ میلی متر) قدرت را از موتورهای سروو به گریپر انتقال می دهند، بدین صورت که دوران موتورها به چپ و راست موجب کشش سیم ها می گردد و با کشش سیم ها حرکت های مختلف گریپر انجام می پذیرد. شکل ۴ ساختار کلی انتقال دهنده حرکت به گریپر و شکل ۵ مدل اسمبل شده گرسپر را نشان می دهد.



### ۲-۲- محرک های روبات

برای به حرکت درآوردن لوله رابط از سه چرخ دنده استفاده می شود که دو عدد از آن ها مستقیماً به سروموتور متصلند و چرخ دنده وسطی هرزگرد می باشد. حرکت دورانی لوله رابط، یکی از درجات آزادی در نظر گرفته شده برای روبات را تأمین می کند. با ثابت شدن بازوهای نگه دارنده بالا و پایین، کل استوانه به همراه لوله رابط، دوران می کند. در شکل ۱ نیز می توان این مخزن استوانه ای حاوی موتورهای محرک را مشاهده کرد. از آنجا که هدف هدایت مسیر بازوی غیرهولونومیک گرسپر لاپاراسکوپ می باشد، آن را به صورت روباتی با دو درجه آزادی در نظر می گیریم که این موضوع در شکل ۶ بهتر نمایان می گردد.

است. فرض می‌شود  $g_i(q)$ ها برای  $j=1, \dots, m$  فضای پوچی را اسپین کنند، یعنی

$$Null(w(q)) = span\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \quad (10)$$

آن گاه  $w_i(q)\dot{q} = 0$  معادل با وجود اسکالرهای  $u_j \in R$  است به گونه‌ای که:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m = \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j \quad (11)$$

از نقطه نظر سیستمی، وجود مسیر  $q(t)$  که محدودیت  $w(q)\dot{q} = 0$  را ارضا کند معادل وجود قوانین کنترلی  $u_j(t)$  برای رابطه (۱۱) است.

### ۳-۴- ابزارهای ریاضی ارائه شده بر مبنای نظریه هندسه

#### دیفرانسیلی و کنترل غیرخطی

در قسمت قبل مشاهده گردید که بررسی هولونومیک و غیرهولونومیک بودن یک مجموعه از محدودیت‌های فافین کار پیچیده‌ای است. هدف این بخش ارائه ریاضیات و الگوریتم‌های لازم برای بررسی آسان‌تر این موضوع است. ابزارهای ارائه شده بر مبنای نظریه هندسه دیفرانسیل و کنترل غیرخطی توسعه یافته‌اند [۸].

#### ۳-۴-۱- میدان‌های برداری و شارها

برای خمینه  $M$ ، فضای مماسی در نقطه  $x \in M$  به صورت  $T_x M$  نمایش داده می‌شود. باندل مماسی خمینه  $M$  نیز اجتماع فضاهای مماسی  $M$  در نقاط  $M$  است. اکنون توجه خود را به  $R^n$  محدود می‌کنیم. فضای مماسی بر  $R^n$  در  $q \in R^n$  در نظر گرفته می‌شود. یک میدان برداری بر  $R^n$ ، قانونی است که به هر  $q \in R^n$ ، بردار مماسی  $f(q) \in T_q R^n$  را تخصیص می‌دهد. فرض بر آن است مؤلفه‌های  $f$  یعنی  $f_i$ ها هموار باشند. برای معادله دیفرانسیلی  $\dot{q} = f(q)$  نرخ تغییرات تابع هموار  $V$  در راستای حل آن عبارت است از:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q}(q)\dot{q} = \frac{\partial V}{\partial q}(q)f(q) \quad (12)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i}(q)f_i(q) = L_f V$$

که در آن  $L_f V$  مشتق لی در راستای  $f$  است.

یک توزیع در هر نقطه‌ی  $q \in R^n$  یک زیر فضا از فضای مماس  $T_q R^n$  اختصاص می‌دهد. یک حالت خاص، توزیع‌هایی است که به کمک یک مجموعه از میدان‌های برداری هموار تعریف می‌شوند، در این حالت

$$\Delta(q) := Span\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \subset T_q R^n \quad (13)$$

که در آن با فرض این که برای هر  $q \in R^n$  رتبه ماتریس  $w(q)$  در رابطه  $\lambda$  برابر با  $k$  باشد،  $m$  به صورت  $m=n-k$  تعریف می‌شود.

بیان می‌گردد. محدودیت‌های غیرهولونومیک در سیستم‌هایی همچون دست‌های روبات با انگشتان، روبات‌های چرخ‌دار و سیستم‌هایی که پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای در آن‌ها وجود دارد دیده می‌شوند.

### ۴-۱- معرفی محدودیت‌های فافین

محدودیت‌های فافین به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۱۰]:

$$w_i(q)\dot{q} = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (5)$$

که در آن  $w_i$ ها بردارهای سطری هستند. فرض می‌شود که  $w_i$ ها برای هر  $q \in R^n$  مستقل خطی باشند. اگر چنین نباشد مؤلفه‌های وابسته را بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان حذف کرد. هر  $w_i$  بیانگر یک محدودیت است که به سیستم اعمال می‌شود.  $k$  تعداد محدودیت‌های فافین را نشان می‌دهد.

**تعریف:** یک محدودیت هولونومیک است اگر حرکت سیستم مکانیکی را به یک ابرسطح هموار در فضای پیکربندی محدود کند. به عبارت دقیق‌تر، یک محدودیت هولونومیک می‌تواند به صورت یک مجموعه از محدودیت‌های جبری در فضای پیکربندی بیان شود، یعنی

$$h_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (6)$$

در این حالت بعد خمینه‌ای که حرکت سیستم به آن محدود می‌شود برابر  $n-k$  است که در آن  $n$  درجه آزادی سیستم محسوب می‌شود.

تعریف: یک مجموعه از  $k$  محدودیت فافین انتگرال پذیر است اگر توابع

$$h_i: R^n \rightarrow R, \quad i = 1, \dots, k$$

$$h_i(q(t)) = 0 \Leftrightarrow w_i(q(t))\dot{q}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (7)$$

بنابراین، یک مجموعه از محدودیت‌های فافین انتگرال پذیر است اگر معادل با یک مجموعه از محدودیت‌های هولونومیک باشد. یک مجموعه از محدودیت‌های فافین غیرهولونومیک است اگر معادل با یک مجموعه از محدودیت‌های هولونومیک نباشد. برای سادگی، گاهی محدودیت‌های فافین انتگرال پذیر را محدودیت‌های هولونومیک نیز می‌گویند.

### ۴-۲- تبدیل سیستمی با محدودیت‌های فافین به یک

#### سیستم کنترلی

$k$  محدودیت فافین  $w_i(q)\dot{q} = 0$  به ازای  $i = 1, \dots, k$  در نظر گرفته می‌شوند. فرض می‌شود برای هر  $q \in R^n$ ،  $w_i$ ها مستقل خطی باشند. با فرض  $k < n$

$$w(q) = \begin{bmatrix} w_1(q) \\ \vdots \\ w_k(q) \end{bmatrix} \in R^{k \times n} \quad (8)$$

آنگاه محدودیت‌های فافین را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$\dot{q} \in Null(w(q)) \quad (9)$$

که در آن  $Null(w(q))$  فضای پوچی ماتریس  $w(q)$  است. با فرض  $rank(w(q)) = k$  برای هر  $q \in R^n$ ، فضای پوچی  $m=n-k$  بعدی

**قضیه:** اگر توزیع  $\Delta = \Omega^\perp$  گسترده باشد، آنگاه از قضیه فروبنیوس [۷] انتگرال پذیر است. یعنی توابع مستقل  $h_i: R^n \rightarrow R$  برای  $i = 1, \dots, k$  موجودند به طوری که

$$L_{g_j} h_i = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m \quad (19)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial q} \dot{q} = \sum_{j=1}^m L_{g_j} h_i u_j = 0$$

و لذا محدودیت‌های فافین انتگرال پذیرند. در این رابطه  $L_{g_j} h_i$  مشتق لی در راستای  $g_j$  را نشان می‌دهد [۱۱].

#### ۴-۳-۳- کنترل پذیری غیرخطی

مسأله مسیریابی در سیستم مورد مطالعه، معادل با هدایت یک سیستم کنترلی است. بنابراین توجه خود را به سیستم‌هایی به صورت  $\Sigma: \dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m, \quad q \in IR^n, u \in IR^m$  معطوف می‌کنیم.

**تعریف:** سیستم  $\Sigma$  کنترل پذیر است اگر برای هر  $q_0, q_f \in R^n$  زمان محدود  $T > 0$  و قانون  $u: [0, T] \rightarrow U$  موجود باشند به طوری که شرایط  $\Sigma$  شرایط  $q(0) = q_0, q(T) = q_f$  را ارضا کند. که در آن  $U$  مجموعه‌ی قوانین کنترلی قابل قبول می‌باشد.

گفته می‌شود  $\Sigma$  در نقطه  $q_0 \in R^n$  به صورت زمان-کوچک و محلی کنترل پذیر است اگر بتوان در یک زمان دلخواه کوچکی، به نقاط همسایگی رسید. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع می‌توان از قضیه چاو [۷] استفاده نمود.

قضیه چاو: سیستم کنترلی  $\dot{q} = \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j$  در  $q \in R^n$  به صورت زمان کوچک و محلی کنترل پذیر است اگر  $\bar{\Delta}(q) = T_q R^n$ ، که در آن  $\bar{\Delta}(q) := \text{Span}\{g_j(q)\}_{j=1}^m$  این قضیه بیان می‌کند که سیستم بدون انحراف [۷]  $\Sigma$  کنترل پذیر است اگر رتبه جبر لی کنترل پذیری  $\bar{\Delta} = L(g_1, \dots, g_m)$  برابر  $n$  باشد. که کوچک‌ترین توزیع دربرگیرنده  $\bar{\Delta}$  است که گسترده است، یعنی برای هر  $f, g \in \bar{\Delta}$  داریم  $[f, g] \in \bar{\Delta}$ . این شرط، شرط بررسی رتبه‌ی جبر لی کنترل پذیری است.

#### ۴-۴- هدایت بهینه‌ی بازوی غیرهولونومیک گرسپر

قضیه چاو، شرط کافی برای کنترل پذیری را ارائه می‌دهد ولی سازنده نیست، یعنی مسیری که نقطه اولیه را به ثانویه متصل کند، تولید نمی‌نماید. برای برخی از سیستم‌های غیرهولونومیک خاص مانند سیستم‌های براکت [۱۲] که دسته خاصی از سیستم‌های کنترل پذیر مرتبه‌ی اول می‌باشند و سیستم‌های کنترل پذیر مرتبه دوم، استفاده از سینوسی‌ها برای هدایت فرم‌های کانونیکال پیشنهاد گردیده است [۸]. برای فرم‌های غیرکانونیکال خاص نیز از تکنیک فوریه و یا تبدیل به

مشاهده می‌شود که  $\Delta(q)$  برای هر  $q \in R^n$  یک زیر فضای خطی از  $T_q R^n$  تخصیص می‌دهد.

**تعریف:** یک شبه توزیع، برای هر  $q \in R^n$  یک زیر فضای تخصیص می‌دهد. این زیرفضا به نوعی متناظر با فضای مماسی  $T_q R^n$  بوده و فضای دوگان آن محسوب می‌گردد و آن را با  $T_q^* R^n$  نشان می‌دهیم. به عنوان یک حالت خاص می‌توان از شبه توزیع‌هایی نام برد که توسط یک مجموعه از محدودیت‌ها اسپن می‌شوند، یعنی  $\Omega(q) := \text{Span}\{w_1(q), \dots, w_k(q)\} \subset T_q^* R^n$  و رتبه شبه توزیع  $\Omega$  برابر بعد  $\Omega(q)$  است. همچنین گفته می‌شود شبه توزیع  $\Omega$  منظم است اگر رتبه آن برای  $q \in R^n$  ثابت باشد.

**تعریف:** گفته می‌شود توزیع  $\Delta$  گسترده است اگر تحت عمل گر کروشه‌ی لی بسته باشد یعنی

$$\forall f, g \in \Delta, [f, g] \in \Delta \quad (14)$$

که  $[f, g]$  کروشه لی دو میدان برداری بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q}(q)f(q) - \frac{\partial f}{\partial q}(q)g(q) \quad (15)$$

#### ۴-۳-۲- توزیع خنثی کننده محدودیت‌ها

برای مؤلفه‌های  $w_i(q)$  و  $i = 1, \dots, k$  دلخواه، میدان‌های برداری مستقل خطی و هموار  $g_j(q)$  ها برای  $j = 1, \dots, m$  که در آن  $m := n - k$  تعداد ورودی‌های کنترلی  $g_j$  است، موجودند، به طوری که  $g_j(q)w_i(q) = 0$  برای  $i = 1, \dots, k$  و  $j = 1, \dots, m$ . که  $n$  و  $k$  به ترتیب بیانگر تعداد درجات آزادی و تعداد محدودیت‌های فافین می‌باشند.

به زبان توزیع‌ها و شبه توزیع‌ها نتایج این گزاره با تعاریف

$$\Omega(q) := \text{Span}\{w_1(q), \dots, w_k(q)\} \subset T_q^* R^n \quad (16)$$

$$\Delta(q) := \text{Span}\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \subset T_q R^n$$

به صورت

$$\Delta = \Omega^\perp \quad (17)$$

قابل بیان است که در آن  $\Delta = \Omega^\perp$  فضای خنثی کننده‌ی شبه توزیع  $\Omega$  است. به عبارت دیگر توزیع  $\Delta$  خنثی کننده‌ی شبه توزیع  $\Omega$  است. همچنین سیستم کنترلی متناظر با توزیع  $\Delta$  عبارت است از:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m = \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j \quad (18)$$

**تعریف:** یک مجموعه از محدودیت‌های فافین انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر توزیع خنثی ساز محدودیت‌ها گسترده باشد. این مفهوم را می‌توان به صورت قضیه نیز بیان کرد:

این معادله به صورت ماتریسی زیر قابل بیان است:

$$\dot{u} = \Omega(p, q)u \quad (26)$$

که در آن

$$\Omega(p, q) = \begin{bmatrix} 0 & p^T [g_1, g_2] & \dots & p^T [g_1, g_m] \\ -p^T [g_1, g_2] & 0 & \dots & p^T [g_2, g_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p^T [g_1, g_2] - p^T [g_2, g_m] & \dots & 0 & \end{bmatrix} \in SO(m) \quad (27)$$

که  $SO(m)$  فضای ماتریس‌های پادمتقارن است.

لذا  $\dot{u}(t) = \Omega(t)u(t)$  و چون  $\Omega(t)$  پادمتقارن است  $u(t) = U(t)u(0)$  که در آن  $U(t)$  ماتریس متعامد یکه است چرا که

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u^T(t)u(t) &= 2u^T(t)\Omega(t)u(t) = 0 \\ \Rightarrow \|u(t)\|_2^2 &= \|u(0)\|_2^2 \\ \|u(t)\|_2^2 &= u^T(t)u(t) \\ &= u^T(0)U^T(t)U(t)u(0) = u^T(0)u(0) \\ \Rightarrow U^T(t)U(t) &= I_{m \times m} \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین جواب مسأله کم‌ترین مربعات ورودی، برای سیستمی به صورت  $\dot{q} = \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j$  که شرط رتبه‌ی کنترل‌پذیری را ارضا می‌کند، قانون کنترلی با نرم ۲ ثابت است، یعنی:

$$\|u(t)\|_2 = \|u(0)\|_2 \quad ; \forall t \in [0, 1] \quad (29)$$

در حالت کلی پیدا کردن جواب برای مسأله‌ی کم‌ترین مربعات ورودی برای هدایت  $\Sigma$  از هر شرط اولیه به هر شرط نهایی پیچیده است اما می‌توان یک جواب تقریبی برای مسأله را با استفاده از روش تقریب ریتز پیدا کرد. برای روشن شدن موضوع، یک سری پایه‌ی متعامد یکه، برای فضای توابع دارای انرژی محدود بر بازه‌ی  $[0, 1]$  در نظر گرفته می‌شود. این فضا با  $\mathcal{L}^2[0, 1]$  نشان داده می‌شود، یعنی

$$\mathcal{L}^2[0, 1] = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow R \mid \int_0^1 f^2(t) dt < \infty \right\} \quad (30)$$

یک پایه می‌تواند به صورت توابع مثلثاتی  $\{\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{2k}(t)\}$  بیان شود که در آن

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= 1 \\ \psi_{2k-1}(t) &= \sqrt{2} \cos 2k \pi t \quad ; \forall t \in [0, 1] \\ \psi_{2k}(t) &= \sqrt{2} \sin 2k \pi t \quad ; \forall t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (31)$$

برای عدد صحیح  $N$  یک تقریب ریتز برای مؤلفه‌ی  $i$ ام قانون کم‌ترین مقدار مربعات، عبارت است از

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_{ik} \psi_k(t) \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad t \in [0, 1] \quad (32)$$

همچنین داریم:

صورت زنجیر شده می‌توان استفاده نمود [۹]. در این بخش از تقریب ریتز [۱۳] برای هدایت بهینه‌ی سیستم غیرهولونومیک مورد مطالعه استفاده خواهد شد. [۱۴]. هدف این است که حالت سیستم

$\dot{q} = \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j$  را از هر  $q(0) = q_0$  به  $q(t) = q_f$  در یک بازه زمانی محدود انتقال دهیم به گونه‌ای که تابع هزینه

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t \|u(t)\|_2^2 dt \quad (21)$$

کمینه شود. با فرض  $\bar{\Delta}(q) = T_q R^n$  و با توجه به قضیه‌ی چاو، سیستم به صورت زمان کوچک و محلی کنترل‌پذیر است. فرض می‌شود  $p \in R^n$  بردار شبه حالت باشد و همیلتین به فرم زیر تعریف شود

$$\begin{aligned} H : IR^n \times IR^n \times IR^m &\rightarrow IR \\ H(q, p, u) &= \frac{1}{2} u^T u + p^T \sum_{j=1}^m g_j(q)u_j \\ &= \frac{1}{2} u^T u + p^T G(q)u \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن  $G(q) := [g_1(q), \dots, g_m(q)]$ . شرایط لازم مرتبه اول عبارتند از:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H^T}{\partial p}(q, p, u) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H^T}{\partial q}(q, p, u) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(q, p, u) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

پس بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u}(q, p, u) = u^T + p^T G(q) = 0 &\rightarrow u = -G(q)^T p \\ \rightarrow u = - \begin{bmatrix} g_1^T(q) \\ \vdots \\ g_m^T(q) \end{bmatrix} p &\rightarrow u_i = -g_i^T(q) p = -p^T g_i(q) \end{aligned} \quad (24)$$

از طرفی از معادلات شبه حالت نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H^T}{\partial q_k}(q, p, u) = -\sum_{j=1}^m p^T \frac{\partial g_j}{\partial q_k}(q)u_j \\ \rightarrow \dot{p}^T &= -\sum_{j=1}^m p^T \frac{\partial g_j}{\partial q}u_j \\ \dot{u}_i &= \sum_{j=1}^m p^T \frac{\partial g_j}{\partial q}(q)u_j g_i(q) - p^T \frac{\partial g_i}{\partial q}(q)\dot{q} \\ &= \sum_{j=1}^m p^T \left( \frac{\partial g_j}{\partial q}(q)g_i(q) - \frac{\partial g_i}{\partial q}(q)g_j(q) \right) u_j \\ &= \sum_{j=1}^m p^T [g_i, g_j](q)u_j \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (25)$$

که با محاسبات انجام گرفته داریم:

$$\begin{aligned} a_{13} &= ml^2 + mrl \cos \psi_1 \\ a_{23} &= ml^2 + mrl \cos \psi_2 \\ a_{33} &= I + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrl \cos \psi_1 + 2mrl \cos \psi_2 \end{aligned} \quad (39)$$

$P_m$  ممثوم زاویه‌ای سیستم مکانیکی می‌باشد. اگر مقدار اولیه آن برابر صفر باشد، از قانون پایستگی ممثوم زاویه‌ای نتیجه می‌شود که مقدار آن صفر باقی خواهد ماند و منجر به معادله محدودیت زیر خواهد شد:

$$a_{13}\dot{\psi}_1 + a_{23}\dot{\psi}_2 + a_{33}\dot{\theta} = 0 \quad (40)$$

ورودی‌ها به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$u_1 = \dot{\psi}_1, \quad u_2 = \dot{\psi}_2 \quad (41)$$

با جایگذاری این ورودی‌ها در معادله (۴۰) و تعریف  $q = (\psi_1, \psi_2, \theta)^T$  می‌توان معادله سیستم را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\Sigma: \dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 \quad (42)$$

که در آن

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a_{13}(\psi) / a_{33}(\psi) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$g_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_{23}(\psi) / a_{33}(\psi) \end{bmatrix}$$

در حالت کلی یافتن پاسخ برای مسأله کنترل بهینه (۳۵) دشوار است. همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، در این مقاله از تقریب ریتز برای یافتن پاسخ مسأله استفاده گردیده است. یک پایه مثلثاتی به فرم  $\{\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t)\}$  در نظر گرفته می‌شود که در معادله (۳۱) تعریف شده‌اند.

حال برای یک عدد صحیح  $N$  تقریب ریتز برای ورودی بهینه نام را می‌توان از معادله زیر به دست آورد:

$$u_i(t, \alpha) = \sum_{k=0}^N \alpha_{ik} \psi_k(t), \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

مسأله را می‌توان به این شکل بیان نمود که می‌خواهیم ورودی (۳۴) را به سیستم اعمال کرده و ضرایب  $\alpha = (\alpha_{10}, \dots, \alpha_{1N}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{2N})^T$  را به گونه‌ای به دست آوریم که تابع هزینه زیر مینیمم شود:

$$\min J := \frac{1}{2} \int_0^1 \|u(t; \alpha)\|_2^2 dt \quad (45)$$

$$s.t. \quad q(1; \alpha, q_0) = q_f$$

همچنین می‌توان مسأله بهینه‌سازی را به صورت غیرمقید در نظر گرفت و به دنبال مینیمم کردن تابع هزینه زیر بود:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_i^2(t) dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^N \alpha_{ik} \psi_k(t) \sum_{j=0}^N \alpha_{ij} \psi_j(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ik} \alpha_{ij} \int_0^1 \psi_k(t) \psi_j(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^N \alpha_{ik}^2 \int_0^1 \psi_k^2 dt = \sum_{k=0}^N \alpha_{ik}^2 \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن  $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iN}) \in R^{N+1}$  که  $N$  تعداد جملات تقریب ریتز می‌باشد.

لذا

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \|u(t)\|_2^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^N \alpha_{ik}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|_2^2 \quad (34)$$

اکنون  $\alpha_i$  ها برای  $i=1, \dots, m$  چنان بدست می‌آیند که  $\sum$  از  $q_0$  به  $q_f$  در  $t=1$  منتقل شود.

بنابراین باید مسأله‌ی بهینه‌سازی مقید زیر حل گردد:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|_2^2 \quad (35)$$

$$s.t. \quad q(1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = q_f$$

برای رهایی از وجود قیدهای تساوی در رابطه‌ی (۳۵)، مسأله‌ی بهینه‌سازی غیرمقید در رابطه‌ی (۳۶) در نظر گرفته می‌شود که در آن  $\gamma > 0$  جمله‌ی جریمه‌ای برای رسیدن به  $q(1) = q_f$  است.

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|_2^2 + \gamma \|q(1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) - q_f\|_2^2 \quad (36)$$

بدیهی است که برای  $N$  و  $\gamma$  بسیار بزرگ انتظار تقریب خوبی از جواب هدایت‌کننده‌ی  $\Sigma$  به  $q_f$  می‌رود.

## ۵- شبیه‌سازی‌ها و نتایج

در این قسمت با توجه به شکل ۶ فرض می‌گردد که  $M$  و  $I$  جرم و اینرسی مفصل نهایی روبات لاپاراسکوپ و  $m$  و  $r$  به ترتیب جرم و فاصله از مرکز جرم دو بازوی گریپر متصل شده به آن باشد. طول این لینک‌ها برابر  $l$  در نظر گرفته می‌شوند.  $\theta$  زاویه مفصل نهایی روبات لاپاراسکوپ نسبت به سطح افقی و  $\psi_1, \psi_2$  زوایای بازوهای گرسپر نسبت به مفصل نهایی روبات لاپاراسکوپ تعریف می‌شوند.

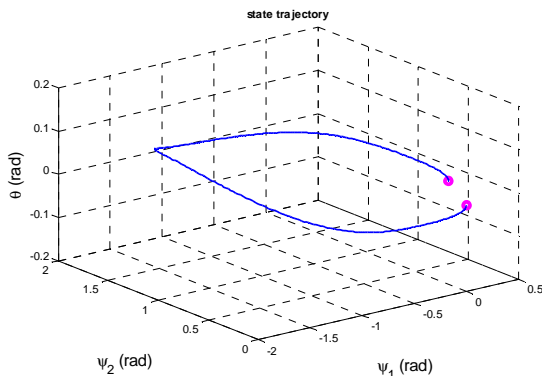
با محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل و تابع لاگرانژین با استفاده از معادلات اولر-لاگرانژ می‌توان نشان داد که

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (37)$$

و در نتیجه

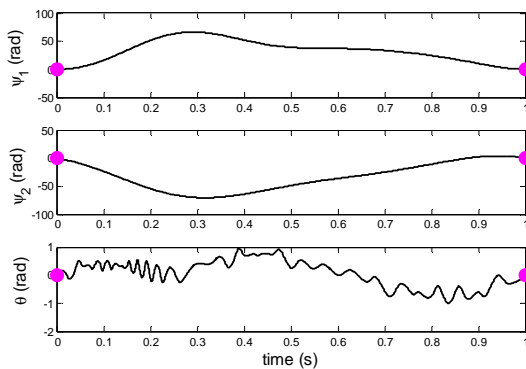
$$P_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = a_{13}\dot{\psi}_1 + a_{23}\dot{\psi}_2 + a_{33}\dot{\theta} \quad (38)$$

در شکل ۹ مسأله مسیریابی بهینه برای حالت‌های مشخص شده در گرسپر دیده می‌شود.



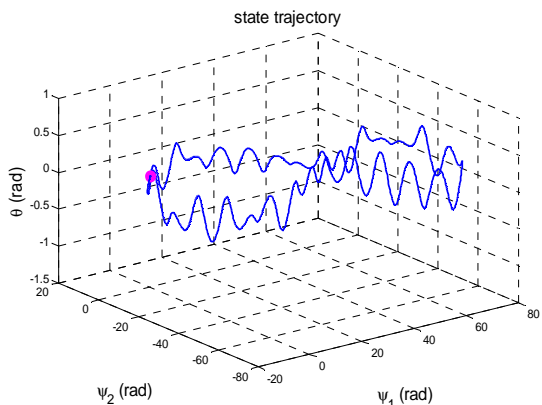
شکل ۹: مسیریابی مسأله بهینه برای حالت‌های مشخص شده در گرسپر

حال می‌توان اثر انتخاب یک  $\alpha_0$  نامناسب را به دور دقیق‌تر مورد مطالعه قرار داد. شکل ۱۰ نمودار حالت‌های سیستم را در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$  و تصادفی نشان می‌دهد.



شکل ۱۰: حالت‌های سیستم در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$  و  $\alpha_0$  نامناسب

همان‌طور که دیده می‌شود در پارامتر  $\theta$  نوسان وجود دارد که این برای مسأله بهینه‌سازی شده مطلوب نمی‌باشد. در شکل ۱۱ مسأله مسیریابی برای حالت‌های مشخص شده در گرسپر در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$  و تصادفی دیده می‌شود.



شکل ۱۱: مسیریابی مسأله بهینه برای حالت‌های مشخص شده در گرسپر به ازای  $N=7$  و  $\alpha_0$  تصادفی

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} J_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|_2^2 + \lambda \|q(1; \alpha_1, \dots, \alpha_m) - q_f\|_2^2 \quad (46)$$

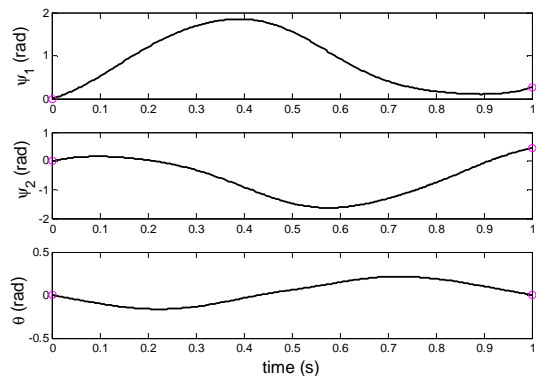
ابتدا تابع هزینه اولیه را در نظر گرفته و به دنبال یک جواب مناسب برای  $\alpha$  می‌گردیم. منظور از جواب مناسب برای  $\alpha$  آن است که  $q(1; \alpha, q_0) = q_f$ . جواب به دست آمده در این مرحله، به عنوان یک حدس اولیه برای مینیمم کردن تابع هزینه  $J$  استفاده می‌شود. جدول (۱) مقادیر عملی به کار رفته برای گرسپر روبات لاپاروسکوپي را نشان می‌دهد.

جدول ۱: پارامترهای نامی گرسپر روبات لاپاروسکوپي برای شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار نامی / واحد
r	1(m)
l	0.5(m)
m	2(kg)
I	1kgm <sup>2</sup>

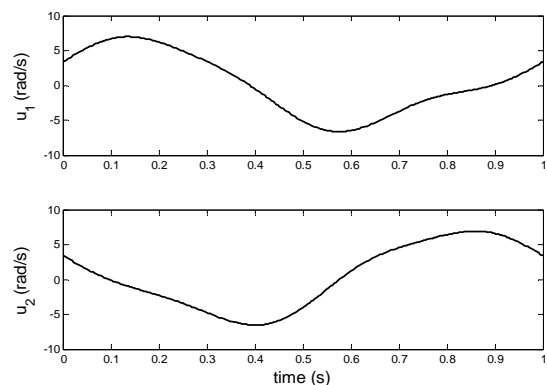
### ۵-۱- مسأله بهینه‌سازی مقید

شکل ۷ نمودار حالت‌های سیستم را در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$  نشان می‌دهد.



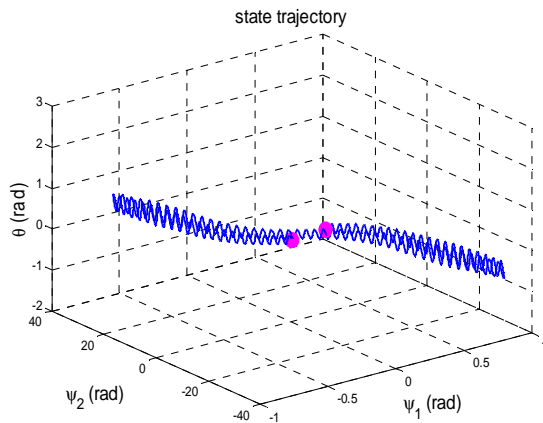
شکل ۷: نمودار حالت‌های سیستم در بازه زمانی یک ثانیه برای  $N=7$

در شکل ۸ نیز نمودار ورودی‌های کنترلی بهینه برای سیستم به ازای  $N = 7$  نشان داده شده است.



شکل ۸: ورودی‌های کنترلی مسأله بهینه‌سازی برای سیستم در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$





شکل ۱۴: مسأله مسیریابی به ازای N=1

در جدول ۲ مقایسه‌ای بین N و تعداد تکرار و مقدار تابع هزینه نهایی انجام گرفته است. مشاهده می‌گردد که هر چه تعداد جملات (N) بیشتر شود تابع هزینه کمتر خواهد شد.

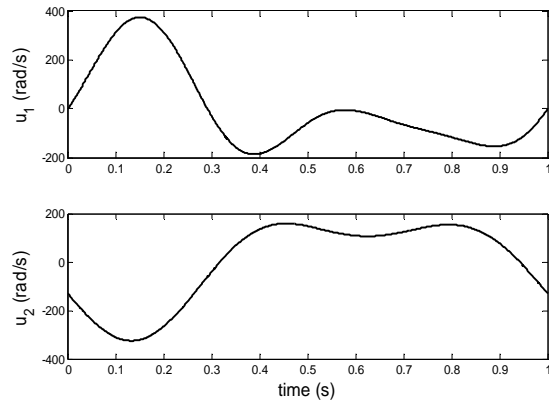
جدول ۲: مقایسه‌ای بین N و تعداد تکرار و مقدار تابع هزینه نهایی

N	تعداد تکرار	پاسخ بهینه
1	122	273252
2	66	26403.8
3	42	20.0611
4	42	20.0392
5	64	19.8298
6	27	19.8283
7	22	18.6959
8	68	18.6959
9	46	18.6951
10	65	18.6507

### ۵-۳- مسأله بهینه‌سازی غیرمقید

مشابه نمودارهای فوق را برای مسأله بهینه‌سازی غیرمقید معادله (۳۶) در نظر می‌گیریم. نمودارهای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ به ازای N=5، به ترتیب مسیر بهینه را برای  $\gamma = 5000$  و  $\gamma = 10000$  و  $\gamma = 15000$  نشان می‌دهند.

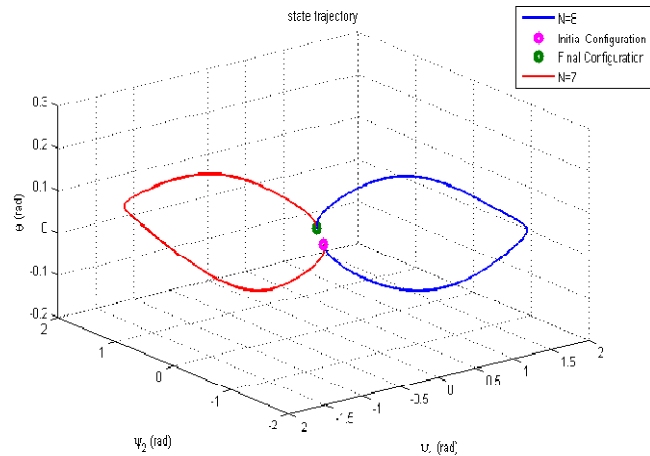
در شکل ۱۲ نیز نمودار ورودی‌های کنترلی بهینه برای سیستم در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$  و  $\alpha_0$  تصادفی نشان داده شده است.



شکل ۱۲: ورودی‌های کنترلی مسأله بهینه‌سازی برای سیستم در بازه زمانی یک ثانیه و به ازای  $N = 7$  و  $\alpha_0$  نامناسب

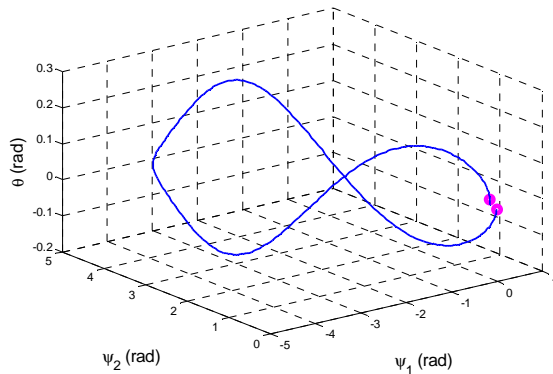
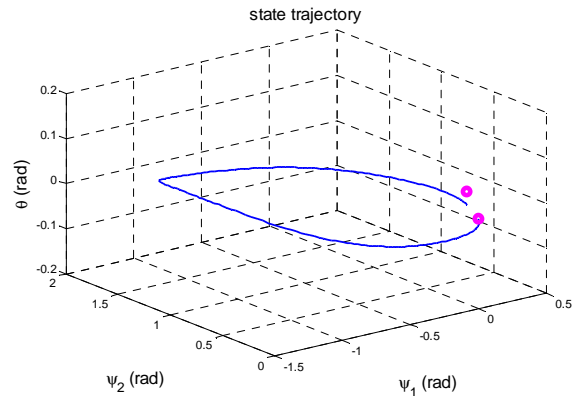
### ۵-۲- تأثیر تعداد عبارات تقریب زننده در مسأله بهینه‌سازی

واضح است که هر چه تعداد جملات (N) بیشتر شود تابع هزینه کمتر خواهد شد. همچنین جواب به دست آمده یکتا نمی‌باشد و با تغییر دادن N به شکل قابل ملاحظه‌ای تغییر خواهد کرد. به عنوان مثال در شکل ۱۳ مقایسه‌ای بین مسیریابی برای N های مختلف انجام یافته است.



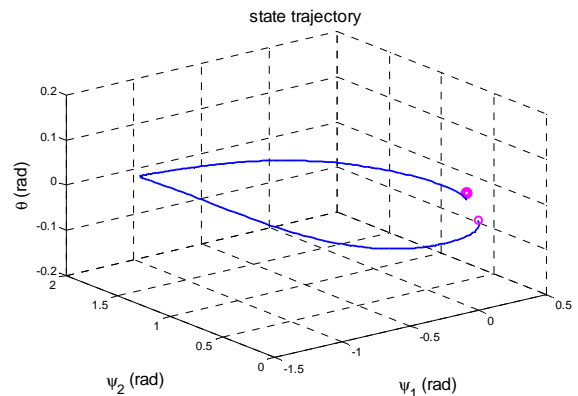
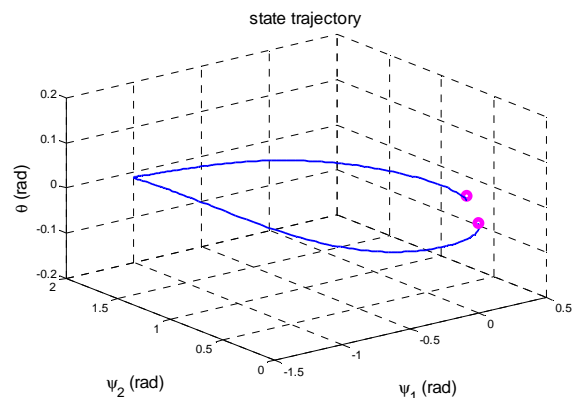
شکل ۱۳: مقایسه مسأله مسیریابی برای N های مختلف

همچنین نمودار ۱۴ که مربوط به N=1 می‌باشد، نشانگر آن است که به ازای آن پاسخ مسیریابی مناسب نخواهد بود.

شکل ۱۸: مسأله بهینه‌سازی غیرمقید به ازای  $N=2$  و  $\gamma=20000$ شکل ۱۵: مسأله بهینه‌سازی غیرمقید به ازای  $N=5$  و  $\gamma=5000$ 

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا ساختار فیزیکی و جزئیات طراحی روبات گرسپر لاپاروسکوپی تشریح گردید. گرسپر مورد استفاده و ساختار فیزیکی انتقال‌دهنده حرکت و نیرو به آن مورد بررسی قرار گرفت و معادلات دینامیکی مربوطه به دست آمد. با این روش می‌توان ضمن به حداقل رساندن مشکلات جراحی لاپاراسکوپیک، سیستم کنترل پایداری را با قدرت ردیابی بالا به دست آورد. در ادامه با توجه به ساختار غیرهولونومیک روبات مربوطه، با استفاده از تقریب ریتز به طراحی کنترل‌کننده‌ای برای هدایت بهینه‌ی گرسپر، بر مبنای دستورات داده شده توسط جراح پرداخته شد. مسأله بهینه‌سازی به دو دسته مقید و غیر مقید تقسیم‌بندی شده و اثر تعداد جملات تقریب ریتز مورد مطالعه قرار گرفت. در حالت کلی مشاهده گردید که مسأله بهینه‌سازی غیرمقید پاسخ مطلوب‌تری را به دنبال دارد. شبیه‌سازی‌های انجام گرفته بر روی نمونه طراحی شده نیز دقت و عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده را در ردیابی بهینه نشان می‌دهند.

شکل ۱۶: مسأله بهینه‌سازی غیرمقید به ازای  $N=5$  و  $\gamma=10000$ شکل ۱۷: مسأله بهینه‌سازی غیرمقید به ازای  $N=5$  و  $\gamma=15000$ 

## مراجع

- [1] R. Muradore, D. Bresolin, L. Geretti, P. Fiorini, T. Villa, "Robotic surgery" *Robotic and Automation Magazine, IEEE*, Volume 18, Issue 3, 2011, Pages 24-32
- [2] C.G.L Cao, E. Danahy, "Increasing accessibility to medical robotics education" in *Proceedings IEEE conf. on Technologies for Practical Robot Applications*, 2011, Pages 49-53
- [3] M. Catenacci, R.L. Flyckt, T. Falcone, "Robotics in reproductive surgery: Strengths and limitations" *Placenta*, Volume 32, Supplement 3, September 2011, Pages S232-S237.
- [4] M. Hadavand, A. Mirbagheri, H. Salarieh, F. Farahmand "Design of a force-reflective master robot for haptic telesurgery applications: Robomaster1" *Engineering in Medicine and Biology Society, Annual International Conference of the IEEE*, 2011, Pages 305-310
- [5] Kim, K.-Y.; Song, H.-S.; Suh, J.-W.; Lee, J.-J., "A Novel Surgical Manipulator with Workspace-Conversion Ability for Telesurgery" *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions*, Volume 18, Issue 1, 2013, Pages 200-211
- [6] M. Tavakoli, R V. Patel, M. Moallem, A. Aziminejad, *Haptics for Teleoperated Surgical Robotics Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2008.
- [7] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*. Wiley Press, 2006.

از مقایسه شکل‌های فوق نتیجه می‌شود که هرچه مقدار جمله‌ی جریمه‌ای افزایش یابد پاسخ‌ها مطلوب‌تر شده و با دقت بیشتری به نقطه نهایی میل می‌کنند. همچنین در حالت کلی استفاده از مسأله بهینه‌سازی غیرمقید توصیه می‌گردد چرا که به عنوان مثال برای  $N=2$  و  $\gamma=20000$  حل این مسأله منجر به یافتن پاسخی مناسب برای حل مسأله بهینه‌سازی بین نقاط ابتدایی و انتهایی می‌گردد که در شکل ۱۸ نشان داده شده است، در حالی که مسأله بهینه‌سازی مقید پاسخی بسیار نامناسب برای  $N=2$  دارد.

- 
- [8] R.M. Murray, S.S Sastry, "Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids." *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume 38, Issue 5, 1993, Pages 700-716
- [9] Tan. Yuegang, Jiang Ziqing, Zhou Zude, "A Nonholonomic Motion Planning: and Control Based on Chained Form Transformation." *IEEE Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006, Pages 3149-3153.
- [10] A.M. Block, P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden, R.M. Murray "Nonholonomic Systems with Symmetry". Springer-verlag, 1996.
- [11] H. Khalil, Nonlinear systems, Third edition, Prentice hall, 2001
- [12] R.W. Brockett, *Control Theory and Singular Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 1981, pp 11-27.
- [13] C. Fernandes, L. Gurvits, Li. Zexiang "Near-optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume 39, Issue 3, 1994, Pages 450-463.
- [14] Y. Chitour, F. Jean, Long Ruixing "A global steering method for general dynamical nonholonomic systems" *IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, Pages 27-32.