

رویکردی جدید در طراحی کنترلرهای تطبیقی مدل آزاد

سعید پزشکی، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران

saeedpezeshki88@ms.tabrizu.ac.ir

محمد علی بادامچی زاده، استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران mbadamchi@tabrizu.ac.ir

چکیده: در این مقاله رویکرد جدیدی جهت طراحی کنترل کننده‌های تطبیقی مدل آزاد بر اساس روش تطبیقی - فازی به عنوان خطی‌ساز فیدبک و چند قانون وابسته به خطای خروجی معرفی شده است. اساس کار این کنترل کننده به این صورت است که توسط یک الگوریتم، سیگنال کنترلی به یک سطح مناسب رفته و سپس توسط قوانین وابسته به خطای خروجی سیستم، سیگنال کنترلی در حول این سطح تغییر پیدا می‌کند. این کنترل کننده روی سه سیستم که هر کدام دارای یک سری عوامل غیرخطی هستند، پیاده شده است. نتایج نشان دهنده عملکرد خوب این کنترل کننده در مقابل سیستم‌های متفاوت غیرخطی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: کنترل مدل آزاد، کنترل فازی تطبیقی، کنترل تطبیقی مدل آزاد، خطی‌سازی با فیدبک

A New Approach for Designing of Adaptive Model Free Controllers

Saeed Pezeshki, Mohammad Ali Badamchizadeh

Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract: In this paper a new approach on designing of Model Free Adaptive Controller (MFAC) using adaptive - fuzzy procedure as a feedback linearization and some rules depended on output error is introduced. Basic idea in this controller is based on transferring control signal to an appropriate surface and then by using of some rules, depends on the output error of system, control signal changes around of this surface. This controller is applied on three systems that each of them has some different nonlinear factors. Results show good performance of this controller for stabilizing of different nonlinear systems.

Keywords: Model free control, Adaptive-Fuzzy control, Model free adaptive control, Feedback linearization

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۰/۳/۳

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۰/۸/۲۸

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۰/۹/۳۰

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر محمدعلی بادامچی‌زاده

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران - تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

۱- مقدمه

ایراد عمده تئوری کنترل تطبیقی سنتی، وابستگی آن به مدل ریاضی سیستم می‌باشد که این امر سبب می‌شود دینامیک مدل نشده بر روی عملکرد سیستم تأثیر فراوانی بگذارد. به عنوان قسمتی از تئوری کنترل مدرن، کنترل مدل آزاد یک استراتژی کنترلی پیشرفته است که در مقایسه با روش‌های کنترلی که بر اساس مدل^۱ کار می‌کنند، یک روش ابتکاری محسوب می‌شود.

همان طور که از اسم کنترل تطبیقی مدل آزاد^۲ برمی‌آید، این روش کنترل تطبیقی نیازی به شناخت فرآیند مدل ندارد و فقط داده‌های ورودی - خروجی سیستم کنترل شده، در طراحی کنترلر استفاده می‌شوند. در حقیقت می‌توان گفت کنترل تطبیقی مدل آزاد یک کنترل‌کننده غیرخطی طراحی شده بر اساس روشی است که در آن قانون کنترلی بدون نیاز به مدل ریاضی سیستم کنترل شده، طراحی شده است.

در سال ۱۹۹۴، Han [۱] تحقیقات ابتدایی روی موضوع کنترل مدل آزاد را آغاز کرد، او توانست پایداری کنترل تطبیقی مدل آزاد را اثبات کند. در سال ۱۹۹۳-۹۴، Hou [۲] در تز دکترای خود کاربردها و تئوری کنترل مدل آزاد را بیان کرد. در سال ۱۹۹۴، Wang [۳] پایداری کلاس‌های مختلف کنترل تطبیقی مدل آزاد را اثبات نمود. Yin و Lee [۴] در سال ۱۹۹۵ یک کنترل تطبیقی مدل مرجع فازی پیوسته زمان را بر اساس توابع پایه فازی پیشنهاد دادند.

در همان سال Jagannathan et al [۵] یک کنترل‌کننده فازی را برای کلاس محدودی از سیستم‌های غیرخطی به فرم $x(k+1)=f(x(k))+u(k)$ که در آن تابع غیرخطی ناشناخته است همراه با آنالیز پایداری پیشنهاد نمودند. در سال ۱۹۹۶ این کنترل‌کننده همراه با آنالیز پایداری برای سیستم‌های غیرخطی به فرم عمومی $x(k+1)=f(x(k))+g(x(k))u(k)$ طراحی شد [۶].

ایده دیگر توسط George Cheng [۷] در سال ۲۰۰۰ پیشنهاد داده شد که در آن از شبکه‌های عصبی به عنوان یک کنترل‌کننده تطبیقی برای پایداری سیستم استفاده گردیده است. این الگوریتم نیاز به تنظیم دستی پیچیده برای پارامترها ندارد و قابل اعمال به هر نوع سیستم چند ورودی کنترل پذیر پایدار است.

مزایای کنترل مدل آزاد را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

- نیاز به شناخت دقیق از فرآیند نیست.
- هیچ مکانیزم شناسایی فرآیند یا شناسایی کننده در کنترل‌کننده وجود ندارد.

- نیاز به طراحی کنترلر برای هر فرآیند خاص نیست.

کنترل‌کننده فازی - تطبیقی جهت خطی‌سازی با

فیدبک

در روش خطی‌سازی با فیدبک، قانون کنترلی به گونه‌ای تعیین می‌گردد که قسمت‌های غیرخطی سیستم حذف شده و در عوض ورودی مرجع مناسب جایگزین می‌گردد:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \rightarrow u(t) = g^{-1}(x)(-f(x) + v(t)) \quad (1)$$

روش خطی‌سازی با فیدبک تطبیقی^۳ از لحاظ مفهومی مانند نوع غیرتطبیقی آن می‌باشد ولی با این تفاوت که از یک قانون تطبیقی یا به عبارتی از یک معادله به‌روزرسانی برای بروز کردن پارامترهای کنترلر به منظور بهبود عملکرد آن استفاده می‌شود. توجه کنید که در روش فوق می‌بایست دینامیک کامل سیستم برای طراحی کنترلر در دست باشد. بنابراین در این مقاله سعی شده است از روشی استفاده گردد که نیازی به دینامیک سیستم نداشته باشد.

در روش کنترل تطبیقی - فازی^۴ روند طراحی مشابه روش خطی‌سازی با فیدبک می‌باشد، یعنی کنترلر طوری طراحی می‌شود که بتواند ترم‌های غیرخطی معادله دینامیکی سیستم را از بین ببرد. تفاوت این کنترلر با کنترلر عادی خطی ساز با فیدبک در این است که اطلاعاتی از دینامیک سیستم و فرآیند در دست نیست و یا حداقل بسیار کم می‌باشد. (بدین دلیل که معمولاً بدست آوردن مدل ریاضی سیستم سخت و همراه با یکسری تقریب‌ها می‌باشد). بنابراین هدف آن است که فقط با داشتن اطلاعات ورودی - خروجی سیستم بتوان سیستم را بدون شناسایی، به نحوی مناسبی کنترل نمود.

به این منظور، وظیفه اساسی در این نوع کنترلر تخمین توابع ناشناخته غیرخطی دینامیک سیستم یعنی $f(x)$ ، $g(x)$ با $\hat{f}(x)$ ، $\hat{g}(x)$ و یا تخمین قانون کنترلی $u(t)$ با $\hat{u}(t)$ می‌باشد. روش استفاده شده جهت تخمین در کنترلرهای تطبیقی - فازی، استفاده از توابع پایه فازی می‌باشد. به عنوان نمونه تخمین $f(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) \rightarrow \hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=0}^p c_i \mu_i}{\sum_{i=0}^p \mu_i} \quad (2)$$

که در اینجا p تعداد قوانین فازی برای این سیستم است، $\mu^i(x)$ تابع عضویت برای قانون فازی i ام برای حالت سیستم بوده و c^i نیز نتیجه

روش کنترل تطبیقی فازی (AFC) شامل دو روش مستقیم و غیرمستقیم [۸] است که در این مقاله از روند کلی روش غیر مستقیم استفاده شده است.

الف روش غیر مستقیم^۵: ابتدا سیستم affine زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\ \dot{x}(t) &= (\alpha(t) + \alpha(x)) + (\beta(t) + \beta(x)) * u(t) \end{aligned} \quad (۸)$$

$\alpha(x), \beta(x)$ قسمت شناخته شده از دینامیک سیستم (که به طور تجربی و عددی بدست آمده‌اند) و $\alpha(t), \beta(t)$ معادلات سیستم می‌باشند که توسط روش فازی شناسایی خواهند شد. با توجه به مطالب توضیح داده شده در روش AFC و روند خطی‌سازی با فیدبک داریم:

$$\alpha(x) = z_{\alpha}^T A_{\alpha}^* \xi_{\alpha} + d_{\alpha}(x) \quad (۹)$$

$$\beta(x) = z_{\beta}^T A_{\beta}^* \xi_{\beta} + d_{\beta}(x) \quad (۱۰)$$

$d_{\alpha}(x), d_{\beta}(x)$ خطاهای تقریب بین سیستم اصلی و فازی می‌باشند، که دارای کران بالای معلوم $|d_{\alpha}(x)| \leq D_{\alpha}(x)$ و $|d_{\beta}(x)| \leq D_{\beta}(x)$ می‌باشند. بنابراین می‌توان تخمینی از سیستم را به فرم زیر بیان نمود:

$$\hat{\alpha}(x) = z_{\alpha}^T A_{\alpha} \xi_{\alpha} \quad (۱۱)$$

$$\hat{\beta}(x) = z_{\beta}^T A_{\beta} \xi_{\beta} \quad (۱۲)$$

A_{α} و A_{β} ماتریس‌هایی هستند که به طور تطبیقی طبق معادلات زیر به‌روزرسانی خواهند شد:

$$\dot{A}_{\alpha}(t) = -Q^{-1} z_{\alpha} \xi_{\alpha}^T e s \quad (۱۳)$$

$$\dot{A}_{\beta}(t) = -Q^{-1} z_{\beta} \xi_{\beta}^T e s u(t) \quad (۱۴)$$

با توجه به معادلات فوق کنترل‌کننده با قانون کنترلی زیر تعریف می‌گردد:

$$u(t) = \frac{1}{\beta(t) + \hat{\beta}(x)} (-[\alpha(t) + \hat{\alpha}(x)] + v(t)) \quad (۱۵)$$

ب روش مستقیم^۶: در روش IAFC کنترلر بر اساس شناسایی دینامیک سیستم و استفاده از بهترین تخمین برای تولید قانون کنترل (ناشی از روش خطی‌سازی با فیدبک) تعیین می‌گردد، در حالی که در DAFC روش جستجو و تخمین، خود قانون کنترلی $u(t)$ می‌باشد به طوری که سیستم دارای tracking مناسب همراه با پایداری مجانبی و نیز قابلیت کاهش اثر اغتشاش و نویز باشد. با توجه به روش خطی‌سازی با فیدبک، $u(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

قانون λ م سیستم فازی می‌باشد، که معمولاً به صورت ترکیب خطی از یکسری توابع پیوسته مانند $z(x)$ در نظر گرفته می‌شود.

$$z_k(x) \in R, k=1,2,\dots,m-1$$

$$c_i = a_{i,0} + a_{i,1}z_1(x) + \dots + a_{i,m-1}z_{m-1}(x) \quad (۳)$$

$$z = [1 \ z_1(x) \ z_2(x) \ \dots \ z_{m-1}(x)]^T$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,0} & a_{p,1} & \dots & a_{p,m-1} \end{bmatrix}$$

$$c_i = z^T A \quad (۴)$$

می‌توان تابع $\hat{f}(x)$ را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\xi = \frac{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]}{\sum_{i=0}^p \mu_i}$$

$$f(x) = z^T A \zeta + \varepsilon(x) \Rightarrow \hat{f}(x) = z^T A \zeta \quad (۵)$$

که $\varepsilon(x)$ در اینجا خطای تقریب روش فازی می‌باشد. قانون به‌روزرسانی $A(t)$ توسط قانون تطبیقی زیر تعیین می‌شود:

$$\dot{A}(t) = -Q^{-1} z \xi^T e s \quad (۶)$$

Q یک ضریب ثابت که معمولاً کوچک انتخاب می‌شود و e_s اختلاف بین خروجی x و خروجی مرجع x_{ref} می‌باشد:

$$e s = x - x_{ref} \quad (۷)$$

توجه کنید که روش کنترل تطبیقی - فازی تضمین می‌کند که $A(t)$ به مقدار مطلوب خود یعنی $A^*(t)$ میل خواهد کرد. مقدار اولیه $A(t)$ می‌تواند به طور تصادفی مثلاً $A(0) = 0$ یا اینکه توسط اطلاعاتی که از دینامیک سیستم و یا حتی از یک روش کنترلی دیگر که در دست می‌باشد تعیین گردد؛ مثلاً ستون‌های $A(0)$ برابر k (فیدبک حالت $u = -kx$) و به عنوان مثال اگر هدف تخمین تابع $f(x)$ باشد، ستون‌های $A(0)$ شامل ضرایب حالت‌های سیستم در $f(x)$ خواهد بود [۸]. قوانین فازی نیز به فرم زیر نوشته می‌شوند:

$$\text{if } x \text{ is } F_i \text{ then } c_i = f_i(z)$$

که $f_i(z)$ متناسب با سطر λ م ماتریس $z^T A$ می‌باشد. بنابراین می‌توان تابع غیرخطی ناشناخته $f(x)$ را توسط روش فازی با $\hat{f}(x)$ تخمین زد.

$$\hat{u}_g(k+1) = \begin{cases} \hat{u}_g(k) + \beta u_c(k) r^T(k+1) & I = 1 \\ \hat{u}_g(k) & I = 0 \end{cases} \quad (۲۳)$$

α و β ضرایب ثابت و مثبت \hat{u}_g ، \hat{u}_f می‌باشند (لازم به ذکر است که معمولاً نیاز به تغییر آن‌ها با تغییر سیستم نیست). مقدار I و سیگنال کنترلی u_c نیز به ترتیب طبق رابطه‌های (۳۱) و (۲۹) تعیین می‌گردند. همچنین در رابطه فوق Γ معروف به filtered tracking error، مجموع یکسری از خطاها با تعریف زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} r(k) &= e_n(k) + \lambda_1 e_{n-1}(k) + \dots + \lambda_{n-1} e_2(k) + \lambda_n e_1(k) \quad (۲۴) \\ e_1(k) &= y(k) - y_d(k) \\ e_2(k) &= y(k) - y_d(k+1) \\ &\vdots \\ e_n(k) &= y(k) - y_d(k+n-1) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

در روابط فوق y_d خروجی مطلوب که در لحظه‌های مختلف اختلاف آن با خروجی سیستم سنجیده می‌شود. λ_i ضرایب مشتق خطا در زمان بعدی و به معنای دیگر ضرایب خطای پیش بین می‌باشد. برای از بین بردن قسمت‌های غیرخطی سیستم از روش خطی‌سازی با فیدبک استفاده شده است. برای این کار به فرم زیر عمل می‌گردد:

$$u(k) = \tilde{g}^{-1}(k)(\tilde{f}(k) + v(k)) \quad (۲۶)$$

که در اینجا v یک ورودی جدید می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(k) = k_v r(k) + y_d(k+n) - \sum_{i=0}^{p-2} \lambda_{i+1} e_{n-i}(k) \quad (۲۷)$$

k_v ماتریس بهره نامیده می‌شود؛ انتخاب مناسب k_v باعث همگرا شدن Γ (به سمت صفر رفتن) خواهد شد و در نهایت باعث محدود بودن v خواهد گردید به عبارت دیگر می‌توان گفت که هر چه قدر k_v بزرگ‌تر انتخاب شود باعث افزایش تأثیر آن در $v(k)$ (ورودی مرجع جدید) و بهتر شدن عملکرد خروجی (سریع‌تر میل کردن به مقدار مطلوب) و در نهایت اثر آن در سیگنال کنترلی u افزایش خواهد یافت. لازم به ذکر است که بیش از حد بزرگ انتخاب کردن آن باعث ناپایداری سیستم خواهد شد.

$$u(t) = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v(t)) \quad (۱۶)$$

هدف تخمین $u(t)$ به شکل $\hat{u}(t)$ و با توجه به توابع پایه فازی به صورت زیر است:

$$\hat{u}(t) = z_u^T A_u^* \xi_u + d_u(x) \quad (۱۷)$$

که $d_u(x)$ خطای بین u بیان شده توسط فازی و u^* مطلوب (مناسب) و محدود به کران بالای معلوم $|d_u(x)| \leq D_u(x)$ می‌باشد. لازم به ذکر است چون به طور عملی مشخص کردن کران $D_u(x)$ سخت می‌باشد، مقدار آن در تکرار فرآیندهای طراحی معلوم و تنظیم می‌شود و تا زمانی که عملکرد کنترل‌کننده نشان دهنده این باشد که $D_u(x)$ به مقدار صحیح خود نزدیک شده است این روند تنظیم ادامه می‌یابد. در نهایت قانون به‌روزرسانی $A_u(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{A}_u(t) = -Q_u^{-1} z_u^T \xi_u \cdot es \quad (۱۸)$$

مقدار اولیه $A_u(t)$ را می‌توان $A_u(t) = 0$ در نظر گرفت.

نکته: هر دو روش IAFC و DAFC مناسب plantهای مینیمم فاز می‌باشند و همچنین برای $\beta(x)$ داریم:

$$-\infty < \beta_1 < \beta(x) < \beta_2 < \infty$$

روش پیشنهادی

سیستم به فرم کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (۱۹)$$

برای کنترل سیستم می‌بایست ابتدا دو تابع f, g را با روشی تخمین زد (به فرم \tilde{f}, \tilde{g}) که به سیستم وابستگی نداشته باشد. روش پیشنهادی در این مقاله ترکیبی از روش فوق و قانونی ابتکاری می‌باشد. توجه شود که در این مقاله سیستم به صورت پیوسته فرض شده و از خروجی آن برای کنترلر نمونه‌برداری می‌گردد، به این ترتیب که:

$$\tilde{f}(k) = \hat{u}_f^T(k) \quad (۲۰)$$

$$\tilde{g}(k) = \hat{u}_g^T(k) \quad (۲۱)$$

مقادیر به‌روزرسانی شده \hat{u}_g ، \hat{u}_f نیز توسط معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{u}_f(k+1) = \hat{u}_f(k) + \alpha r^T(k+1) \quad (۲۲)$$

این قانون برای استفاده کردن از سیگنال کنترلی مطلوب مرحله قبل (در صورتی که خطا از مقداری به نام ε کمتر باشد) برای مرحله بعد می‌باشد. البته در صورتی که خطای این مرحله و مرحله قبل از ε کمتر باشد و همچنین خطای این مرحله از مرحله قبل بزرگ‌تر باشد در آن صورت کنترل‌کننده تطبیقی مدل آزاد پیشنهادی سیگنال کنترلی منفی مرحله قبلی را اعمال می‌کند. توجه کنید در کنترل‌کننده تطبیقی - فازی توسط الگوریتم فازی، توابع غیرخطی ناشناخته سیستم شناسایی یا به عبارت بهتر تخمین زده می‌شود و در هر بار که ورودی جدید به کنترلر وارد می‌شود این تخمین بهتر می‌گردد، ولی در کنترل‌کننده پیشنهاد شده در این مقاله، حساسیت خروجی سیستم نسبت به تخمین توابع غیرخطی ناشناخته کمتر بوده و این به دلیل نقش مهم و اساسی خطای خروجی در تعیین و تولید سیگنال کنترلی می‌باشد.

تنظیم پارامترهای اولیه کنترلر:

ε : این پارامتر آستانه‌ای برای تغییر سیگنال کنترلی نهایی u در قوانین فازی می‌باشد.

$\hat{u}_g(0), \hat{u}_f(0)$ مقادیر ابتدایی u_g, u_f می‌باشند. در [۶] اثبات شده است که $\hat{u}_g(0)$ در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\hat{u}(g) > g^{-1}(\bar{g})$$

لازم به ذکر است که خروجی به مقدار اولیه این دو پارامتر بسیار حساس می‌باشد.

پایداری لیاپانوف برای کنترل‌کننده مدل آزاد تطبیقی پیشنهادی

لم ۱: برای هر زمان k $x(k)$ کران‌دار است، اگر

$$\|x(k)\| \leq d_0 + d_1 \|r(k)\|$$

که $r(k)$ filtered tracking error بوده و d_0, d_1 مقادیر مثبت ثابت قابل محاسبه هستند [۹].

حال با فرض $x(k) \in U$ که U یک زیر مجموعه فشرده در R^n و با فرض $h(x(k)) \in C^\infty[U]$ بدین معنی که $h(x(k))$ تابعی هموار (smooth) از $R \rightarrow U$ می‌باشد، در این صورت بسط تیلور این تابع موجود می‌باشد. حال با استفاده از کران روی $x(k)$ و اینکه می‌توان تابع $h(x(k))$ را به صورت فرم خطی از پارامترها در زیر مجموعه فشرده نوشت، خواهیم داشت:

$$\|h(x(k))\| \leq c_0 + c_1 \|r(k)\|$$

با توجه به معادله (۲۶) تنها مشکل موجود زمانی پیش می‌آید که \bar{g} برابر صفر گردد که این باعث نامحدود شدن سیگنال کنترلی u می‌شود. برای رفع این موضوع کنترلر به دو بخش تقسیم شده است:

$$u(k) = \begin{cases} u_c(k) + .5(u_r(k) - u_c(k)) \exp(\gamma(\|u_c(k)\| - s)) & I=1 \\ u_r(k) - .5(u_r(k) - u_c(k)) \exp(-\gamma(\|u_c(k)\| - s)) & I=0 \end{cases} \quad (28)$$

s ثابتی است که افزایش و کاهش آن به ترتیب باعث افزایش و کاهش تأثیر u_r در سیگنال کنترلی نهایی u می‌شود. γ نیز ثابتی برای تعیین کران بالا برای سیگنال کنترلی تولید شده u_c توسط روش AFC می‌باشد؛ کوچک انتخاب کردن γ (بزرگ شدن $1/\gamma$) باعث ناپایداری سیستم می‌گردد. u_r, u_c نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_c(k) = \bar{g}^{-1}(k)(-\tilde{f}(k) + v(k)) \quad (29)$$

$$u_r(k) = -\mu \|u_c(k)\| \text{sign}(r(k)) / \bar{g} \quad (30)$$

μ ضریب سیگنال کنترلی مقاوم (u_r) می‌باشد که کاهش آن سبب کاهش سیگنال کنترلی نهایی u می‌شود. \bar{g} نیز ثابتی است که بزرگ بودن آن (نسبت به $\bar{g}(k)$) باعث کاهش تأثیر u_r در u نهایی خواهد شد. I نیز به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$I = \begin{cases} 1 & \|\bar{g}(k)\| > \bar{g} \ \& \ \|u_c(k)\| < s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

در اینجا \bar{g} کران پایینی برای $\bar{g}(k)$ می‌باشد که درست انتخاب کردن آن مانع singular شدن معکوس تابع $\bar{g}(k)$ می‌شود. s نیز پارامتر طراحی می‌باشد، که باعث می‌شود فقط u هایی با حداکثر دامنه مورد نظر برای تولید u استفاده شوند (به ازای $I=1$).

نکته: γ, s, μ پارامترهایی طراحی با رعایت شروط زیر هستند [۶]:

$$\gamma < \ln(2/s), \ \mu > 0, \ s > 0$$

نکته: در صورتی که u_c از $1/\gamma$ بیشتر شد برابر $1/\gamma$ فرض می‌گردد.

در حقیقت اساس کار کنترل‌کننده فوق با سه قانون زیر که باعث تولید سیگنال‌های کنترلی بهینه و لازم می‌شود، بنا شده است:

$$u(k) = \begin{cases} u(k-1) & |e_1(k)| < \varepsilon \ \& \ |e_1(k-1)| < \varepsilon \ \& \ |e_1(k)| \leq |e_1(k-1)| \\ -u(k-1) & |e_1(k)| < \varepsilon \ \& \ |e_1(k-1)| < \varepsilon \ \& \ |e_1(k)| > |e_1(k-1)| \\ -\eta u(k-1) & |e_1(k)| > |e_1(k-1)| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_f + \varepsilon_g u_c + d\| &\leq \|\varepsilon_f\| + \|\varepsilon_g\| \|u_c\| + \|d\| \\ &\leq \varepsilon_{Nf} + \varepsilon_{Ng} + d_M = \varepsilon_N \end{aligned} \quad (36)$$

و در نهایت با استفاده از رابطه‌های (۳۵) و (۳۶)

$$\begin{aligned} \|g(u - u_c) + \varepsilon_f + \varepsilon_g u_c + d\| &\leq \|g(u - u_c)\| + \|\varepsilon_f + \varepsilon_g u_c + d\| \\ &\leq c_{02} + c_{12} \|r(k)\| + \varepsilon_N \leq c_0 + c_1 \|r(k)\| \end{aligned} \quad (37)$$

بنابراین در ناحیه اول حکم اثبات شد.

ب ناحیه دوم: $I=0$ یا $\|u_c\| \geq s$ و $\|g(x)\| < \bar{g}$ و شرط داده شده در

$$\text{if } u_c > 1/\gamma \Rightarrow u_c = 1/\gamma$$

کنترل کننده پیشنهادی $u_c = 1/\gamma$ می‌توان نشان داد $\|g(x)\| \leq c_{01} + c_{11} \|r(k)\|$ که

با توجه به لم ۱ ماتریس‌های ثابت هستند.

با استفاده از رابطه (۳۳) و شرط داده شده در کنترل کننده پیشنهادی،

خواهیم داشت

$$\|u\| \leq \|u_r\| + \left\| \frac{u_r - u_c}{2} e^{-\gamma(\|u_c\| - s)} \right\| \quad (38)$$

با توجه به اینکه $\|u_c\| > s \rightarrow -\gamma(\|u_c\| - s) \leq 0$

$$\|u\| \leq \|u_r\| + \left\| \frac{u_r - u_c}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(3\|u_r\| + \|u_c\|) \leq d_2$$

با در نظر گرفتن رابطه (۳۸)

$$\begin{aligned} \|gu\| &\leq \|g\| \|u\| \leq d_2(c_{01} + c_{11} \|r(k)\|) = d_{02} + d_{12} \|r(k)\| \\ \|\hat{g}u_c\| &\leq \|\bar{g}\| \|1/\gamma\| \leq d_3 \end{aligned} \quad (39)$$

و در نهایت با استفاده از رابطه‌های (۳۶) و (۳۹)

$$\|gu - \hat{g}u_c\| \leq \|gu\| + \|\hat{g}u_c\| \leq d_{01} + d_{11} \|r(k)\| + d_3 \leq d_0 + d_1 \|r(k)\|$$

بدین صورت در ناحیه دوم نیز حکم اثبات شد. بنابراین در هر دو ناحیه،

نامساوی‌های (۳۲) صحیح می‌باشند.

بدست آوردن $r(k)$

با توجه به تعریف filtered tracking error در معادله (۲۵) داریم:

$$r(k+1) = \underbrace{e_n(k+1)}_I + \underbrace{\lambda_1 e_{n-1}(k+1) + \dots + \lambda_{n-1} e_1(k+1)}_{III} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (I) \quad e_n(k+1) &= x_n(k+1) - y_d(k+n) \\ &= f(x) + g(x)u(k) + d(k) - y_d(k+n) \end{aligned}$$

که c_0, c_1 مقادیر مثبت ثابت قابل محاسبه هستند [۹].

نکته ۱: $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ به ترتیب خطای تخمین تابع f, g و اغتشاش وارده به سیستم می‌باشد، این خطاها کران‌دار و دارای کران معلوم زیر می‌باشند.

$$\|\varepsilon_f\| \leq \varepsilon_{Nf}, \quad \|\varepsilon_g\| \leq \varepsilon_{Ng} \quad \text{و} \quad \|d\| \leq d_M$$

نکته ۲: طبق رابطه (۳۱) اگر $I=1$ باشد $\|u_c\| \leq s$ بنابراین u_c محدود است و اگر $I=0$ باشد $\|u_c\| > s$ ، ولی براساس این شرط که اگر u_c

بزرگ‌تر از $1/\gamma$ باشد، مقدار آن $1/\gamma$ فرض خواهد شد؛ در این صورت نیز محدود می‌گردد. بنابراین می‌توان گفت که u_c در هر دو ناحیه و در

تمام زمان‌ها محدود است، به عبارتی می‌توان نوشت

$$\|u_c\| \leq \begin{cases} s & I=1 \\ 1/\gamma & I=0 \end{cases}$$

لم ۲: با در نظر گرفتن لم ۱ و تقسیم الگوریتم کنترلی پیشنهادی به دو

ناحیه $I=0$ و $I=1$ ، می‌خواهیم اثبات کنیم که در هر دو ناحیه روابط

زیر برقرار است

$$\begin{cases} \|g(u - u_c) + \varepsilon_f + \varepsilon_g u_c + d\| \leq c_0 + c_1 \|r(k)\| & I=1 \\ \|gu - \hat{g}u_c\| \leq d_0 + d_1 \|r(k)\| & I=0 \end{cases} \quad (42)$$

اثبات:

الف ناحیه اول: $I=1$ یا $\|u_c\| \leq s$ و $\|g(x)\| > \bar{g}$

با توجه به لم ۱ می‌توان نشان داد $\|g(x)\| \leq c_{01} + c_{11} \|r(k)\|$ که

c_{01}, c_{11} ماتریس‌های ثابت هستند.

$$\|u_c\| \leq s \rightarrow \|u_r\| \leq \frac{\mu}{g} \|u_c\| \rightarrow \text{محدود } \|u_r\| \quad (43)$$

با استفاده از رابطه (۳۳) خواهیم داشت

$$\|u - u_c\| \leq \left\| \frac{u_r - u_c}{2} e^{\gamma(\|u_c\| - s)} \right\| \quad (44)$$

با توجه به اینکه $\|u_c\| \leq s \rightarrow \gamma(\|u_c\| - s) \leq 0$

$$\|u - u_c\| \leq \left\| \frac{u_r - u_c}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(\|u_r\| + \|u_c\|) \leq c_2$$

با در نظر گرفتن رابطه (۳۴)

$$\begin{aligned} \|g(u - u_c)\| &\leq \|g\| \|u - u_c\| \\ &\leq c_2(c_{01} + c_{11} \|r(k)\|) = c_{02} + c_{12} \|r(k)\| \end{aligned} \quad (45)$$

همچنین با توجه به نکته ۲ می‌توان نوشت

$$\tilde{u}_f = u_f - \hat{u}_f \Rightarrow$$

$$\tilde{u}_f(k+1) = (1-\alpha)\tilde{u}_f(k) - \alpha(k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + \varepsilon' + g u_d)^T$$

$$\tilde{u}_g = u_g - \hat{u}_g \Rightarrow$$

$$\tilde{u}_g(k+1) = (1-\beta)\tilde{u}_g^T(k)u_c - \beta(k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + \varepsilon' + g u_d)^T$$

با توجه به معادله (۴۳) مقادیر خطا، \tilde{u}_g و \tilde{u}_f در ناحیه دوم نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} r(k+1) &= k_v r(k) + (f(x) - \tilde{f}) + (g(x)u - \tilde{g}u_c) + d(k) \\ &= k_v r(k) + (f(x) - \tilde{f}) + \tilde{g}u_d + d(k) \end{aligned} \quad (47)$$

نکته ۴: با توجه به معادلات (۲۲) و (۲۳) در این ناحیه می‌توان نوشت:

$$\tilde{u}_f = u_f - \hat{u}_f \Rightarrow$$

$$\tilde{u}_f(k+1) = (1-\alpha)\tilde{u}_f(k) - \alpha(k_v r(k) + \tilde{g}u_d + \varepsilon')^T$$

$$\tilde{u}_g = u_g - \hat{u}_g \Rightarrow \tilde{u}_g(k+1) = \tilde{u}_g(k)$$

پایداری لیاپانوف

برای اثبات پایداری کنترلر ارائه شده تابع لیاپانوف V به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد [۹].

$$V = r^T(k)r(k) + \frac{1}{\alpha} \text{tr}(\tilde{u}_f^T(k)\tilde{u}_f(k)) + \frac{1}{\beta} \text{tr}(\tilde{u}_g^T(k)\tilde{u}_g(k)) \quad (48)$$

الف برای ناحیه اول I=1:

حال اختلاف این تابع را در دو مرحله k و $k+1$ را بدست می‌آوریم.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

$$\Delta V_1 = r^T(k+1)r(k+1) - r^T(k)r(k)$$

$$\Delta V_2 = \frac{1}{\alpha} \text{tr}(\tilde{u}_f^T(k+1)\tilde{u}_f(k+1) - \tilde{u}_f^T(k)\tilde{u}_f(k))$$

$$\Delta V_3 = \frac{1}{\beta} \text{tr}(\tilde{u}_g^T(k+1)\tilde{u}_g(k+1) - \tilde{u}_g^T(k)\tilde{u}_g(k)) \quad (49)$$

برای اینکه نشان دهیم مقدار r ، \tilde{u}_f ، \tilde{u}_g محدود است و سیستم را پایدار می‌کند، می‌بایست اثبات کنیم $\Delta V \leq 0$.

بدین منظور به ترتیب ΔV_1 ، ΔV_2 ، ΔV_3 را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= -r^T(k)(I - k_v^T k_v)r(k) \\ &+ 2(k_v r(k))^T(\tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c + g u_d + \varepsilon') \\ &+ (\tilde{u}_f^T)^T \tilde{u}_f^T + (\tilde{u}_g^T u_c)^T (\tilde{u}_g^T u_c) \\ &+ (g u_d)^T g u_d + \varepsilon'^T \varepsilon' + 2\tilde{u}_f^T (\tilde{u}_g^T u_c + g u_d + \varepsilon') \\ &+ 2(\tilde{u}_g^T u_c)^T (g u_d + \varepsilon') + 2(g u_d)^T \varepsilon' \end{aligned}$$

$$(II) \lambda_1 e_{n-1}(k+1) = \lambda_1 [x_{n-1}(k+1) - y_d(k+n-1)] = \lambda_1 e_n(k)$$

$$(III) \lambda_{p-1} e_1(k+1) = \lambda_{p-1} [x_1(k+1) - y_d(k-1)] = \lambda_{p-1} e_2(k)$$

بنابراین با جایگذاری d ، (II) و (III) در معادله (۴۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r(k+1) &= f(x) + g(x)u(k) + d(k) - y_d(k+P) \\ &+ \lambda_1 e_p(k) + \dots + \lambda_{p-1} e_2(k) \end{aligned} \quad (41)$$

می‌توان معادله (۲۹) را به صورت زیر نوشت:

$$v(k) = \tilde{g}(k)u_c(k) + \tilde{f}(k) \quad (42)$$

حال با استفاده از معادلات (۲۷)، (۲۹) و (۴۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r(k+1) &= v(k) - v(k) + f(x) + g(x)u(k) + d(k) \\ &- y_d(k+P) + \lambda_1 e_p(k) + \dots + \lambda_{p-1} e_2(k) \\ &= k_v r(k) - v(k) + f(x) + g(x) + d(k) \\ &= k_v r(k) + (f(x) - \tilde{f}) + (g(x)u - \tilde{g}u_c) + d(k) \end{aligned} \quad (43)$$

با توجه به معادله فوق مقادیر خطا، \tilde{u}_g و \tilde{u}_f در ناحیه اول به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{aligned} r(k+1) &= k_v r(k) + (f(x) - \tilde{f}) + (g(x)u_c - \tilde{g}u_c) \\ &+ d(k) + (g u - g u_c) \\ &= k_v r(k) + (f(x) - \tilde{f}) + (g(x)u_c - \tilde{g}u_c) \\ &+ d(k) + g u_d \end{aligned} \quad (44)$$

که $u_d = u - u_c$ فرض می‌گردد. با توجه به تعریفهای زیر از $f(x)$ ، \tilde{f} ، $g(x)$ و \tilde{g} می‌توان معادله (۴۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} f(x) &= u_f^T + \varepsilon_f(x) \Rightarrow \tilde{f} = \hat{u}_f^T \\ g(x) &= u_g^T + \varepsilon_g(x) \Rightarrow \tilde{g} = \hat{u}_g^T \\ \tilde{u}_f &= u_f - \hat{u}_f \quad \text{and} \quad \tilde{u}_g = u_g - \hat{u}_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(k+1) &= k_v r(k) + (u_f^T - \hat{u}_f^T) + (u_g^T u_c - \hat{u}_g^T u_c) \\ &+ \varepsilon_f + \varepsilon_g u + d(k) + g u_d \\ &= k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c + \varepsilon_f + \varepsilon_g u + g u_d \end{aligned} \quad (45)$$

همچنین با قرار دادن $\varepsilon' = \varepsilon_f + \varepsilon_g u_c + d$ در رابطه (۴۵) معادله نهایی خطا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$r(k+1) = k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c + \varepsilon' + g u_d \quad (46)$$

نکته ۳: در این ناحیه با توجه به معادلات (۲۲) و (۲۳)، می‌توان نوشت:

که در آن $a_1 = 1 + \eta + \frac{\eta}{1-\eta}$ ، $a_2 = \eta + \frac{\eta}{1-\eta}$ می‌باشد.

با توجه به لم ۲ می‌توان نوشت:

$$\|g(u - u_c) + \varepsilon_f + \varepsilon_g u_c + d\| = \|gu_d + \varepsilon'\| \leq c_0 + c_1 \|r(k)\| \quad (53)$$

با جایگزینی نامساوی (۵۳) در معادله (۵۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & -(I - a_1 k_{v\max}^2) \|r(k)\|^2 \\ & + 2a_2 k_{v\max} \|r(k)\| (c_0 + c_1 \|r(k)\|) \\ & + a_1 (c_0 + c_1 \|r(k)\|)^T (c_0 + c_1 \|r(k)\|) \\ & - (1-\eta) \left\| \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c - \frac{\eta}{1-\eta} (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \right\|^2 \end{aligned} \quad (54)$$

با ساده سازی نامساوی فوق به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & -(I - a_3) \|r(k)\|^2 + 2a_4 \|r(k)\| + a_5 \\ & - (1-\eta) \left\| \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c - \frac{\eta}{1-\eta} (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \right\|^2 \end{aligned} \quad (55)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 k_{v\max}^2 + 2a_2 c_1 k_{v\max} + a_1 c_1^2 \\ a_4 &= a_2 c_0 k_{v\max} + a_1 c_0 c_1, \quad a_5 = a_1 c_0^2 \end{aligned}$$

حال اگر مقدار $\eta < 1$ در نظر گرفته شود، عبارت زیر منفی می‌شود:

$$-(1-\eta) \left\| \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c - \frac{\eta}{1-\eta} (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \right\|^2 < 0$$

با توجه به اینکه $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ می‌باشد، $\eta > 0$ بوده و در نتیجه پارامترهای $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ خواهد بود، در این صورت عبارت $-(I - a_3) \|r(k)\|^2 + 2a_4 \|r(k)\| + a_5$ نامثبت می‌شود اگر ریشه آن شرط زیر را رعایت کند:

$$\|r(k)\| > \delta_{r1}$$

که در آن δ_{r1} از نامساوی زیر بدست آورده می‌شود:

$$\|\delta_{r1}\| > \frac{a_5 + \sqrt{a_5^2 + a_6(1-a_4)}}{(1-a_4)}$$

بدین صورت هر دو ترم نامساوی (۵۵) مقدار نامثبت دارند، بنابراین $\Delta V \leq 0$

(ب) برای ناحیه دوم $I=0$

$$\begin{aligned} \Delta V_2 = & -(2-\alpha)(\tilde{u}_f^T)^T \tilde{u}_f^T \\ & + \alpha(k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + gu_d + \varepsilon')^T (k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + gu_d + \varepsilon') \\ & - 2(1-\alpha)\tilde{u}_f (k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + gu_d + \varepsilon') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3 = & -(2-\beta)(\tilde{u}_g^T u_c)^T (\tilde{u}_g^T u_c) + \\ & \beta(k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + gu_d + \varepsilon')^T (k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + gu_d + \varepsilon') \\ & - 2(1-\beta)(\tilde{u}_g^T u_c)^T (k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + gu_d + \varepsilon') \end{aligned}$$

با ترکیب سه معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta V = & -r^T(k)(I - k_v^T k_v)r(k) - (1-\alpha)(\tilde{u}_f^T)^T \tilde{u}_f^T \\ & + 2(k_v r(k) + gu_d + \varepsilon')^T (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \\ & + \alpha(k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + gu_d + \varepsilon')^T \\ & \times (k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + gu_d + \varepsilon') \\ & + 2\alpha\tilde{u}_f (k_v r(k) + \tilde{u}_g^T u_c + gu_d + \varepsilon') \\ & - (1-\beta)(\tilde{u}_g^T u_c)^T (\tilde{u}_g^T u_c) \\ & + \beta(k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + gu_d + \varepsilon')^T \\ & \times (k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + gu_d + \varepsilon') \\ & + 2\beta(\tilde{u}_g^T u_c)^T (k_v r(k) + \tilde{u}_f^T + gu_d + \varepsilon') \end{aligned} \quad (50)$$

با ساده سازی معادله فوق، و قرار دادن

$$\eta = \begin{cases} \alpha + \beta \|u_c\|^2 & I = 1 \\ \alpha & I = 0 \end{cases}$$

نامساوی (۵۱) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & -r^T(k)(I - (1+\eta)k_v^T k_v)r(k) + 2\eta(k_v r(k))^T (gu_d + \varepsilon') \\ & + (1+\eta)(gu_d + \varepsilon')^T (gu_d + \varepsilon') \\ & - (1-\eta) \left\| \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c - \frac{\eta}{1-\eta} (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \right\|^2 \\ & + \frac{\eta}{1-\eta} (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon')^T (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \end{aligned} \quad (51)$$

با فرض اینکه $k_{v\max}$ ماکزیمم مقدار k_v باشد با دوباره ساده سازی رابطه (۵۱)، نامساوی (۵۲) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Delta V \leq & -(I - a_1 k_{v\max}^2) \|r(k)\|^2 + 2a_2 k_{v\max} \|r(k)\| (gu_d + \varepsilon') \\ & + a_1 (gu_d + \varepsilon')^T (gu_d + \varepsilon') \\ & - (1-\eta) \left\| \tilde{u}_f^T + \tilde{u}_g^T u_c - \frac{\eta}{1-\eta} (k_v r(k) + gu_d + \varepsilon') \right\|^2 \end{aligned} \quad (52)$$

با توجه به اینکه $\alpha > 0$, $\beta > 0$ می‌باشد، $\eta > 0$ بوده و در نتیجه پارامترهای $b_0, b_1, b_2 > 0$ خواهد بود، در این صورت عبارت $\|r(k)\|^2 + 2b_1\|r(k)\| + b_2 - (I - b_0)\|r(k)\|^2$ نامثبت می‌شود اگر ریشه آن شرط زیر را رعایت کند:

$$\|r(k)\| > \delta_{r_2}$$

که در آن δ_{r_2} از نامساوی زیر بدست آورده می‌شود:

$$\|\delta_{r_2}\| > \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2(1-b_0)}}{(1-b_0)}$$

بدین صورت هر دو ترم نامساوی (۵۸) مقدار نامثبت دارند، بنابراین $\Delta V \leq 0$.

پس با انتخاب $\|r(k)\| > \max(\delta_{r_1}, \delta_{r_2})$ شرط پایداری سیستم در هر دو حالت برآورده خواهد شد.

پیاده سازی روش پیشنهادی

مثال ۱: سیستم دو ورودی دو خروجی با معادلات زیر را در نظر بگیرید [۹]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + (1 + x_2(t)^2)u_1(t) + d_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - (0.1 - \exp(-x_1(t)^2 - x_2(t)^2))x_2(t) \\ &\quad + (1 + x_1(t)^2)u_2(t) + d_2(t) \end{aligned}$$

$$y_1(t) = x_1(t) + n_1(t), y_2(t) = x_2(t) + n_2(t)$$

$$n(t) = \text{اغتشاش } \Gamma = d_1(t), d_2(t) \text{ نویز اندازه گیری،} \quad (59)$$

پارامترهای کنترلر به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned} \mu &= 10; \alpha = 0.1, \beta = 0.1, s = 2; \gamma = 0.05 \\ \bar{g} &= 0.8; k_v = [10 \ 0; 0 \ 0]; \lambda_1 = 0.001; \varepsilon = 0.01; \eta = 0; \\ \hat{u}_f &= [0.1; 0.1]; \hat{u}_g = [1 \ 0; 0 \ 1]; \end{aligned}$$

نتایج شبیه سازی بدون در نظر گرفتن اغتشاش $d_1(t)$, $d_2(t)$ در شکل (۱) و در شکل (۲) با در نظر گرفتن اغتشاش گوسی با توان ۰/۴ و در شکل (۳) همراه نویز سفید گوسی با توان ۰/۰۰۰۱ و با اغتشاش نشان داده شده است و نهایتاً برای مقایسه در شکل (۴) سیستم بدون حضور اغتشاش با استفاده از روش ارائه شده توسط Cheng در مرجع [۷، ۱۲] شبیه سازی گردیده است. در تمامی این حالت‌ها، خروجی‌های مطلوب به صورت $y_{1d}(t) = 1$, $y_{2d}(t) = \cos(t)$ در نظر گرفته شده است.

در این ناحیه مقدار با توجه به تابع لیاپانوف پیشنهادی، ΔV_1 , ΔV_2 , ΔV_3 مانند معادلات (۴۸) محاسبه می‌شوند و مقدار آن‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= -r^T(k)(I - k_v^T k_v)r(k) \\ &\quad + 2(k_v r(k))^T (\tilde{u}_f^T + \bar{g}u_d + \varepsilon') + (\tilde{u}_f^T)^T \tilde{u}_f^T \\ &\quad + (\bar{g}u_d)^T \bar{g}u_d + \varepsilon'^T \varepsilon' + 2\tilde{u}_f^T (\bar{g}u_d + \varepsilon') + 2(\bar{g}u_d)^T \varepsilon' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= -(2 - \alpha)(\tilde{u}_f^T)^T \tilde{u}_f^T \\ &\quad + \alpha(k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon')^T (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon') \\ &\quad - 2(1 - \alpha)\tilde{u}_f^T (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon') \end{aligned}$$

$$\Delta V_3 = 0$$

با ترکیب سه معادله فوق (و با در نظر گرفتن پارامتر η) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta V &= -r^T(k)(I - k_v^T k_v)r(k) \\ &\quad + 2(k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon')^T (\bar{g}u_d + \varepsilon') \\ &\quad + \frac{1}{1 - \alpha} (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon')^T (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon') \\ &\quad - (1 - \eta) \left\| \tilde{u}_f^T - \frac{\eta}{1 - \eta} (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon') \right\|^2 \end{aligned} \quad (56)$$

با توجه لم ۲ می‌توان نوشت:

$$\|gu - \hat{g}u_c\| \leq d_0 + d_1 \|r(k)\| \quad (57)$$

با جایگزینی نامساوی (۵۷) در معادله (۵۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta V &\leq -(I - b_0)\|r(k)\|^2 + 2b_1\|r(k)\| + b_2 \\ &\quad - (1 - \eta) \left\| \tilde{u}_f^T - \frac{\eta}{1 - \eta} (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon') \right\|^2 \end{aligned} \quad (58)$$

که در آن:

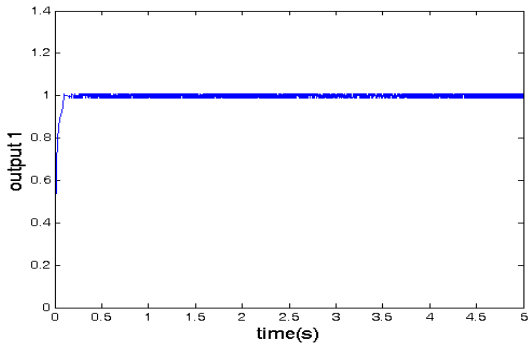
$$b_0 = k_{v\max}^2 + 2d_1(d_1 + k_{v\max}) + \frac{(d_1 + k_{v\max})^2}{1 - \alpha}$$

$$b_1 = 2(d_0 + \varepsilon')d_1 + \frac{4 - 2\alpha}{1 - \alpha} (d_0 + \varepsilon')(d_1 + k_{v\max})$$

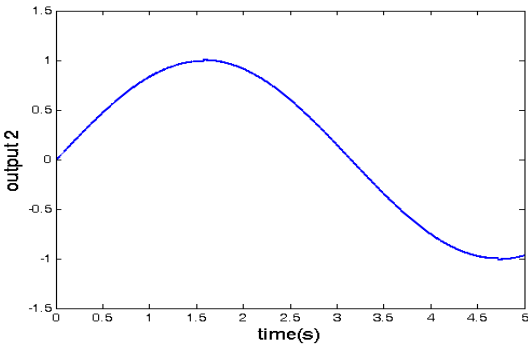
$$b_2 = \frac{3 - 2\alpha}{1 - \alpha} (d_0 + \varepsilon')^2$$

حال اگر مقدار $\eta < 1$ در نظر گرفته شود، عبارت زیر منفی می‌گردد:

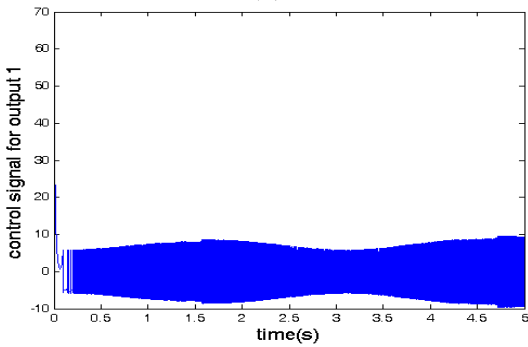
$$-(1 - \eta) \left\| \tilde{u}_f^T - \frac{\eta}{1 - \eta} (k_v r(k) + \bar{g}u_d + \varepsilon') \right\|^2 < 0$$



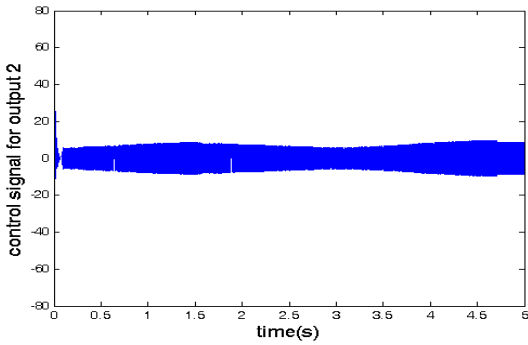
(a)



(b)



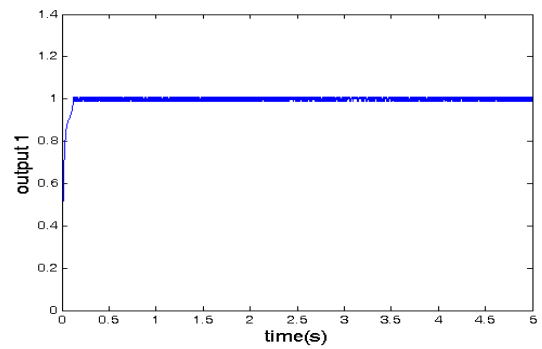
(c)



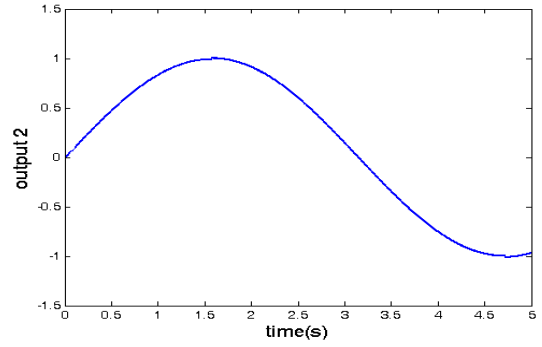
(d)

شکل (۲): (a) خروجی ۱ و (b) خروجی ۲ سیستم ۲ با حضور اغتشاش

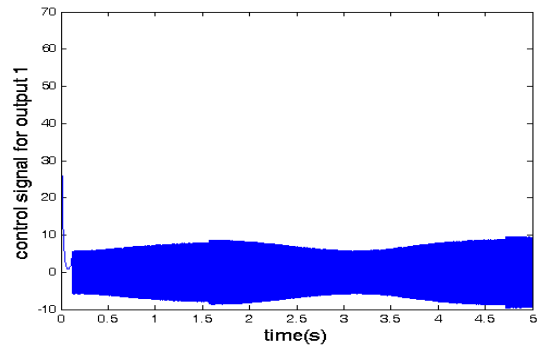
(c) و (d) سیگنال کنترلی u متناسب با ورودی ۱ و ۲



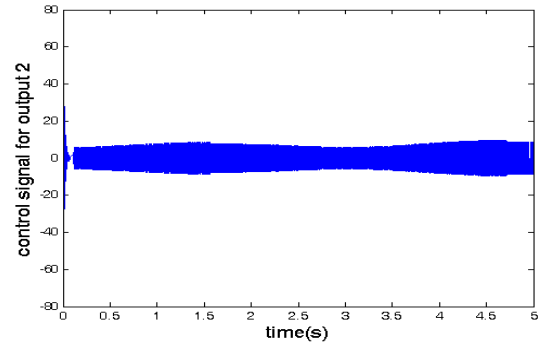
(a)



(b)



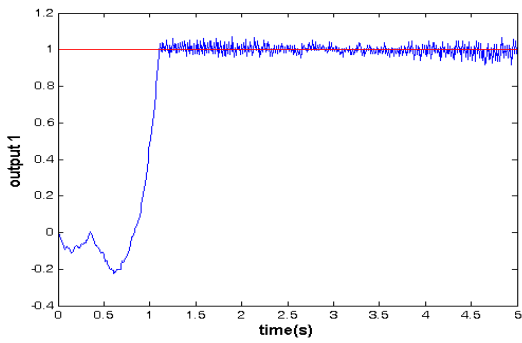
(c)



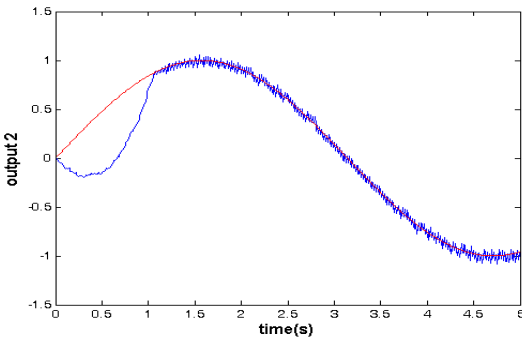
(d)

شکل (۱): (a) و (b) خروجی‌های سیستم بدون حضور اغتشاش

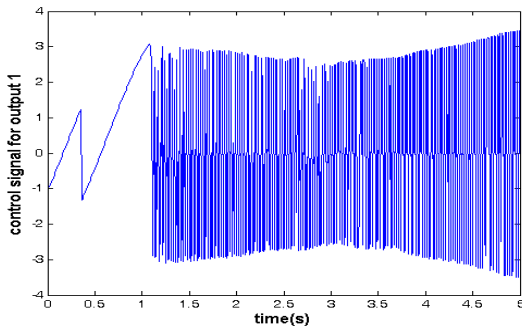
(c) و (d) سیگنال‌های کنترلی u متناسب با ورودی ۱ و ۲



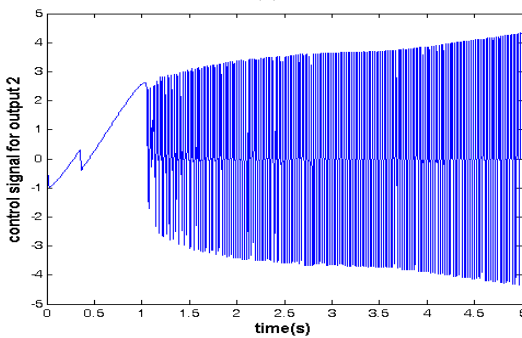
(a)



(b)



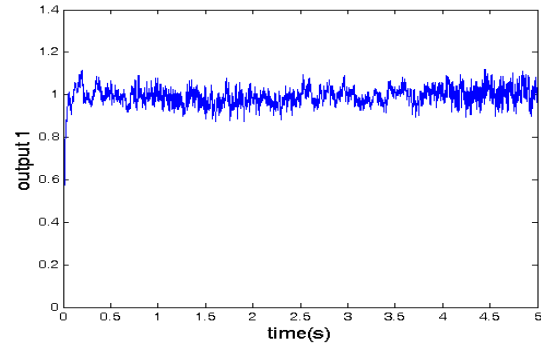
(c)



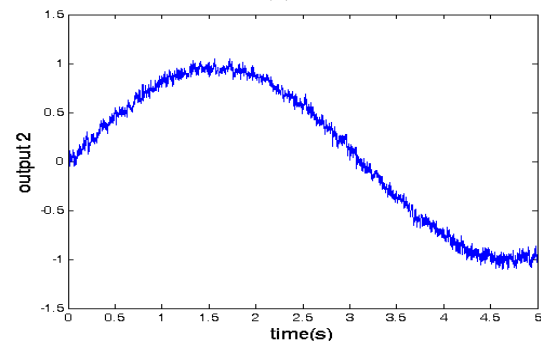
(d)

شکل (۴): خروجی ۱ (a) و خروجی ۲ (b) سیستم با حضور اغتشاش، با استفاده از روش عصبی [۷،۱۲]. (c) و (d) سیگنال‌های کنترلی متناسب با ورودی ۱ و ۲

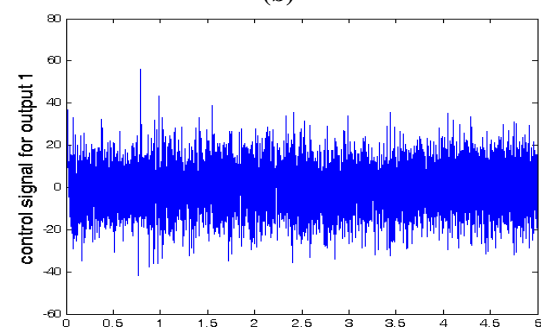
همان‌گونه که از معادلات سیستم مشاهده می‌گردد سیستم پیشنهادی دارای کویلینگ می‌باشد. با مقایسه نتایج کنترلر پیشنهادی در شکل (۱) با نتایج کنترلر تطبیقی - فازی [۹] مشاهده می‌شود که خروجی ناشی از کنترلر پیشنهادی دارای فراجهش نیست؛ در عین حال



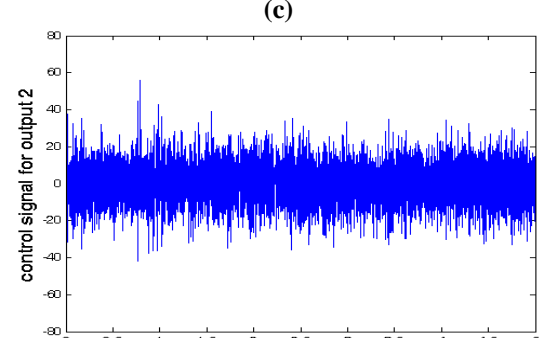
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل (۳): (a) خروجی ۱ و (b) خروجی ۲ سیستم با حضور اغتشاش و با وجود نویز، (c) و (d) سیگنال‌های کنترلی متناسب با ورودی ۱ و ۲

$$x(t) = [z(t) \quad \dot{z}(t) \quad i(t)]^T$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\mu_0 N^2 a_m}{4m} \left[\frac{x_3(t)}{x_1(t)} \right]^2 + \frac{1}{m} w + g$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{2R_m}{\mu_0 N^2 a_m} x_3(t)x_1(t) + \frac{x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \frac{2x_1(t)u(t)}{\mu_0 N^2 a_m}$$

$$y(t) = x_2(t) + n(t)$$

$$n(t) = \text{اغتشاش وزنی}, w(t) = \text{نویز اندازه گیری} \quad (۶۱)$$

در قطارهای مغناطیسی دو موضوع شناورسازی (Levitation) و نیروی محرکه یا پیش رانش (Propulsion) مطرح است، هدف کنترل کننده اولاً رساندن قطار به سطح مورد نظر (Levitation) همراه با تضمین پایداری در مقابل نامعینیهایی از قبیل باد یا تغییر جرم قطار در پیچها و ثانیاً تنظیم سرعت قطار (Propulsion) در فرکانس کاری مگنتها می باشد. (توجه کنید که در قطارهای EMS اگر فاصله ریل و قطار از یک مقداری کمتر یا بیشتر شود باعث ناپایدار شدن سیستم قطار می گردد) در این مقاله فقط قسمت شناورسازی آن بررسی شده است. فرض می شود قطار می خواهد از سطح ۱۰ میلی متر به سطح ۱۶ میلی متر برود. با در نظر گرفتن مقادیر ارائه شده در [۱۰] برای قطار و کنترل کننده خواهیم داشت:

$$m = 1.5 \text{ kg}, N = 280 \text{ turn}, a_m = 102.4 \text{ m}^2, R_m = 1.1 \Omega$$

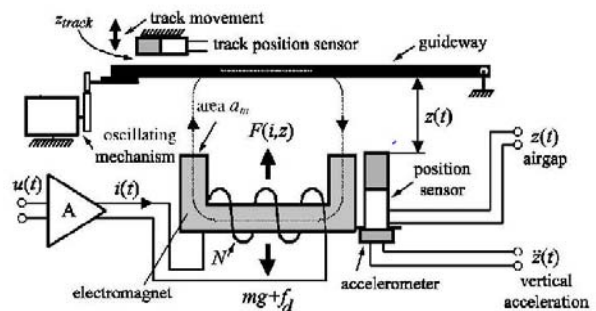
$$\mu = 32; \alpha = 0.1, \beta = 0.1, s = 140; \gamma = 0.01; \bar{g} = 0.9;$$

$$k_v = 1; \lambda_1 = 0; \varepsilon = 0.0001; \eta = 1; \hat{u}_f = 4; \hat{u}_g = 1;$$

نتایج شبیه سازی بدون در نظر گرفتن اغتشاش در شکل (۶) و در شکل (۷) با در نظر گرفتن اغتشاش به صورت پله و با دامنه $w(t)=1$ و در شکل (۸) برای نویزی سینوسی با دامنه ۱۰٪ ورودی اصلی، همراه با اغتشاش و همچنین در شکل (۹) برای نویز سفید گوسی با توان 8×10^{-9} (کوچک بودن توان نویز به خاطر کوچک بودن اندازه ورودی - خروجیها می باشد)، همراه با اغتشاش نشان داده شده است.

در شکل (۲) مشاهده می شود که کنترلر تطبیقی مدل آزاد پیشنهادی اغتشاش را بدون تغییر محسوسی در سیگنال کنترلی حذف کرده است؛ ولی همان طور که از شکل (۴) دیده می شود، روش عصبی ارائه شده توسط cheng [۷، ۱۲] نتوانسته است به خوبی کنترلر پیشنهادی عمل کند و در عرض ۱/۱ ثانیه نتوانسته خروجیهای سیستم را دنبال کند. همچنین می توان از شکل (۳) تأثیر شدید نویز اندازه گیری در خروجی سیستم و سیگنال کنترلی را مشاهده نمود ولی بایستی توجه کرد که همچنان کنترل کننده قادر به tracking و پایدار کردن خروجی می باشد. همان طور که از شکلها دیده می شود، ایراد این کنترلر را می توان نوسانی کردن سیگنال کنترلی عنوان کرد. از مزیت های این کنترلر، علاوه بر tracking سریع و پایدارسازی سیستم، کم بودن زمان نشست در خروجی می باشد.

مثال ۲ دومین سیستم مورد بحث، یک قطار مغناطیسی از نوع EMS (Electro Magnetic Suspension) با شمای نشان داده شده در شکل (۵) می باشد [۱۰]:



شکل (۵): شمای برش عمودی از شناور مغناطیسی و ریل در یک قطار

مغناطیسی [۱۰]

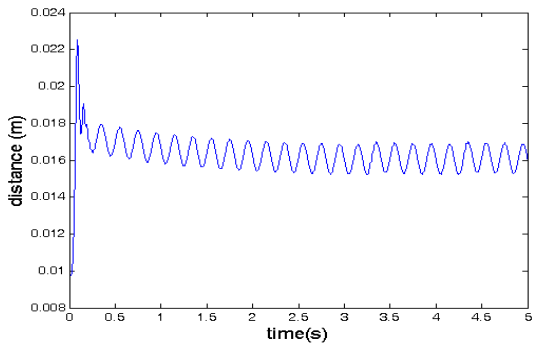
معادلات قطار به صورت زیر می باشد:

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -F(i, z, t) + f_d + mg$$

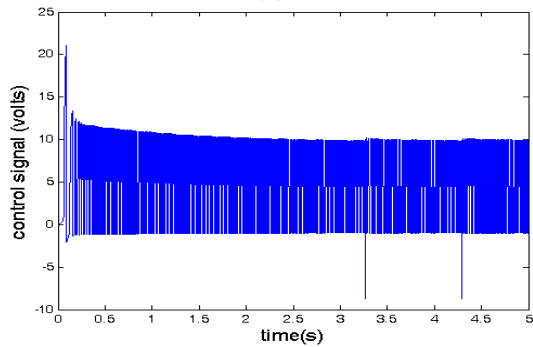
$$= -\frac{\mu_0 N^2 a_m}{4} \left[\frac{i(t)}{z(t)} \right]^2 + f_d + mg$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{i(t)}{z(t)} \frac{dz(t)}{dt} - \frac{2}{\mu_0 N^2 a_m} z(t) (R_m i(t) - u(t)) \quad (۶۰)$$

که در اینجا z فاصله بین ریل و قطار - i جریان سیم پیچها - m جرم قطار - f_d نیروی اغتشاش - μ_0 ضریب تراوایی خلأ برابر با $4\pi \times 10^{-7}$ - N تعداد دور سیم پیچ - a_m سطح مقطع سیم پیچها - R_m مقاومت سیم پیچها می باشد. معادلات حالت به صورت زیر تعریف می شوند:

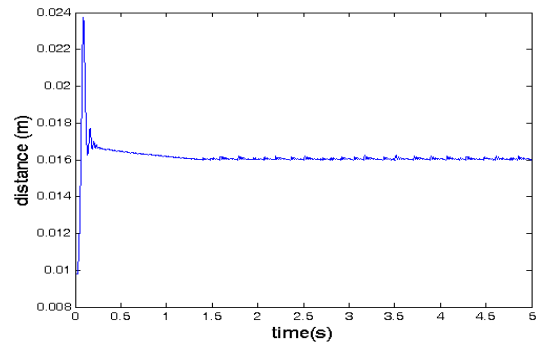


(a)

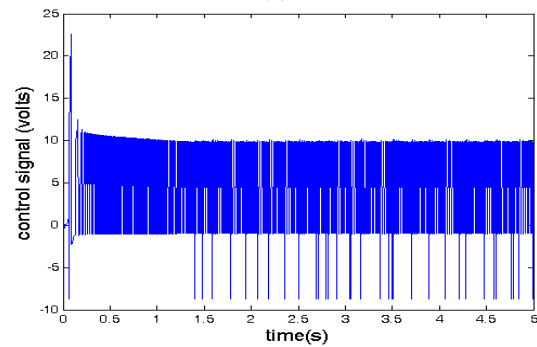


(b)

شکل (۸): (a) نتایج شبیه سازی برای قطار مغناطیسی همراه با اغتشاش و نویز سینوسی با فرکانس ۵ هرتز، (b) سیگنال کنترلی

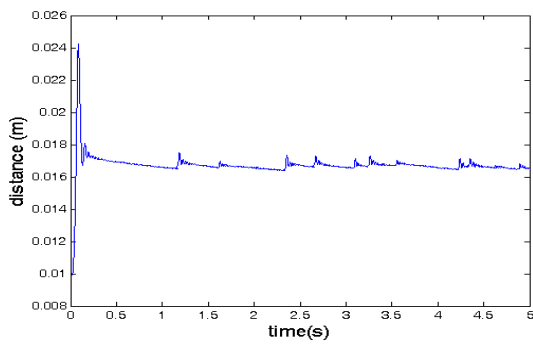


(a)

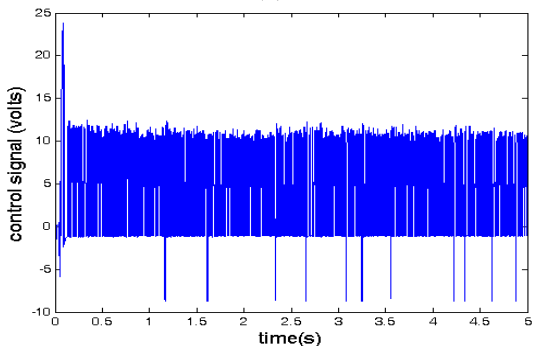


(b)

شکل (۶): (a) نتایج شبیه سازی برای قطار مغناطیسی از سطح ۸ میلی متر به ۱۶ میلی متر (b) سیگنال کنترلی

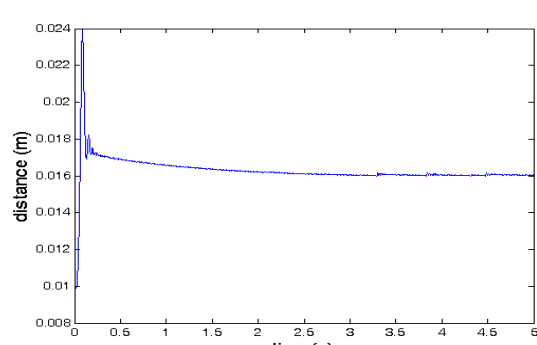


(a)

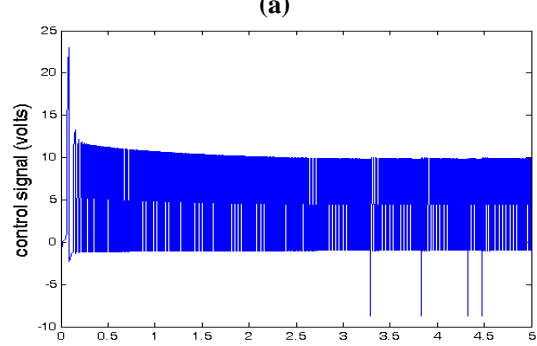


(b)

شکل (۹): (a) نتایج شبیه سازی برای قطار مغناطیسی همراه با اغتشاش و نویز سفید گوسی، (b) سیگنال کنترلی



(a)



(b)

شکل (۷): (a) نتایج شبیه سازی برای قطار مغناطیسی همراه با اغتشاش، (b) سیگنال کنترلی

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & \frac{B[-Fx_2(t) - Bx_2(t)x_4(t)\sin(2x_3(t) + C\sin(x_3(t))x_4(t)^2)]}{AB + B^2\sin^2(x_3(t)) - c^2\cos^2(x_3(t))} \\ & + \frac{C\cos(x_3(t))[-.5B\sin(2x_3(t))x_2(t)^2 + Ex_4(t)^2 + D\sin(x_3(t))]}{AB + B^2\sin^2(x_3(t)) - c^2\cos^2(x_3(t))} \\ & + \frac{Blv_i}{AB + B^2\sin^2(x_3(t)) - c^2\cos^2(x_3(t))} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) = & \frac{-C\cos(x_3(t))[-Fx_2(t) - Bx_2(t)x_4(t)\sin(x_3(t) + C\sin(x_3(t))x_4(t)^2)]}{AB + B^2\sin^2(x_3(t)) - c^2\cos^2(x_3(t))} \\ & + \frac{(A + B\sin^2(x_3(t)))[-5B\sin(2x_3(t))x_2(t)^2 + Ex_4(t)^2 + D\sin(x_3(t))]}{AB + B^2\sin^2(x_3(t)) - c^2\cos^2(x_3(t))} \\ & + \frac{Cl\cos(x_3(t))v_i}{AB + B^2\sin^2(x_3(t)) - c^2\cos^2(x_3(t))} \end{aligned} \quad (62)$$

که در اینجا v_i ورودی موتور (ولتاژ) - J_1 مرکز جرم بازو - J_2 مرکز جرم پاندول - b_1 تانسور لختی بازو - b_2 تانسور لختی پاندول می‌باشد. همچنین ضرایب معادلات فوق به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \hat{J}_2 &= J_2 + m_2l_2^2, \quad \hat{J}_0 = J_1 + m_1l_1^2 + m_2l_1^2 \\ A &= \hat{J}_0, \quad B = \hat{J}_2, \quad C = m_2l_1l_2, \quad D = gm_2l_2, \quad E = b_2 \\ F &= b_2 - k_1, \quad I = k_1 \\ \mu &= 50; \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = 0.01, \quad s = 5; \quad \gamma = 0.05; \\ \bar{g} &= 0.1; \quad k_v = 1; \quad \lambda_1 = 0.001; \quad \varepsilon = 0.01; \quad \eta = 1.5; \\ \hat{u}_f &= 1; \quad \hat{u}_g = 1; \end{aligned}$$

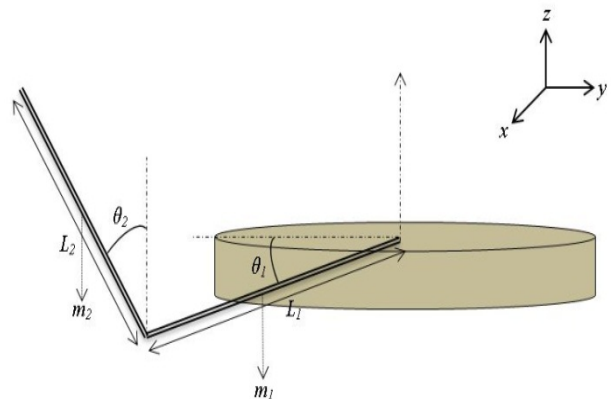
هدف کنترل کننده بالا بردن میله و نگه داشتن آن در بالا (به صورت معکوس نقطه تعادل پایدار) به عبارت دیگر در نقطه تعادل ناپایدار $(\theta_2 = 0)$ می‌باشد. با شبیه سازی این سیستم برای زاویه اولیه 75° درجه شکل (۱۱) بدست آمده است:

جدول (۱): پارامترهای سیستم RIP

Parameters	Value
A	0.1266
B	0.0118
C	0.4683
D	422.5586
E	7.0836
F	-11.1964
I	8.877

سیستم قطار مغناطیسی، سیستم عملی نسبتاً پیچیده (در حالت عادی ناپایدار) و دارای یکسری ترم‌های غیرخطی نظیر وجود خروجی (Z) در مخرج رابطه (۶۰) (که تأثیر مستقیم در ناپایداری سیستم دارد) می‌باشد. همان‌طور که از شکل (۶)-(a) دیده می‌شود، خروجی سیستم یعنی فاصله بین ریل و قطار دارای فراجش نسبتاً بزرگی می‌باشد، قطار ابتدا از سطح ۱۰ میلی‌متر به $23/8$ میلی‌متر رفته و سپس بعد از 0.25 ثانیه به 16 میلی‌متر میل می‌کند؛ در شکل (۷) دیده می‌شود که وجود اغتشاش تأثیری روی سیگنال کنترلی و زمان نشست نداشته است؛ در شکل (۸) نیز مشاهده می‌گردد که نویز اندازه‌گیری سینوسی با همان دامنه در خروجی ظاهر شده، بدون آنکه تغییر قابل توجهی در سیگنال کنترلی دیده شود و یا اینکه سیستم ناپایدار گردد. در نهایت در شکل (۹) تأثیر نامحسوس نویز سفید گوسی در خروجی و سیگنال کنترلی مشاهده می‌گردد. می‌توان در این مثال نیز چند مزیت این کنترلر چون پایداری سیستم، tracking خوب و سریع، حذف اغتشاش، زمان نشست کوتاه (در حدود 0.2 ثانیه) را عنوان نمود.

مثال ۳ سومین سیستم مورد بررسی یک پاندول معکوس چرخشی (Rotary inverted Pendulum) می‌باشد [۱۱]. شمای سیستم در شکل (۱۰) نشان داده شده است.



شکل (۱۰): شمای پاندول معکوس چرخشی [۱۱]

با در نظر گرفتن $x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2$ به عنوان حالت‌های سیستم که در آن θ_1 زاویه چرخشی بازو - θ_2 زاویه چرخشی پاندول - l_1 طول بازو - l_2 طول پاندول - m_1 جرم بازو - m_2 جرم پاندول می‌باشد. معادلات حالت سیستم به صورت زیر می‌باشد.

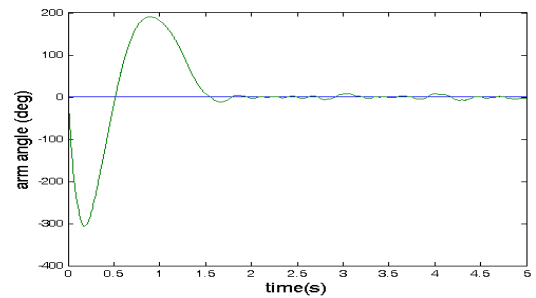
با توجه به شکل‌های (۱۱)-(a) و (۱۱)-(b) معلوم می‌شود که این سیستم بعد از حدود ۵ ثانیه میله پاندول را از زاویه اولیه ۷۵ درجه به سمت زاویه صفر برده (بالا می‌برد) و بعد از حدود ۲ ثانیه زاویه بازو نیز به سمت صفر میل می‌کند و به عبارتی می‌توان گفت که سیستم به حالت تعادل خود می‌رسد. شکل‌های (۱۱)-(c) و (۱۱)-(d) که به ترتیب مشتقات θ_1, θ_2 هستند، نیز موید این مطلب می‌باشند که کنترلر بعد از حدود ۲ ثانیه تمام حالت‌های سیستم را به پایداری رسانده است. بنابراین مانند دو مثال قبل مزایایی از قبیل پایدار کردن سریع سیستم و tracking مناسب را می‌توان برای کنترل MFA پیشنهادی نام برد.

نتیجه گیری

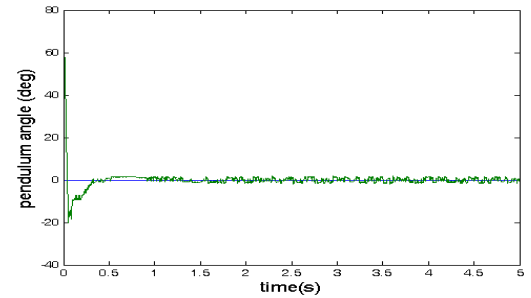
کنترل مدل آزاد تطبیقی یک کنترل‌کننده تطبیقی است که فقط با استفاده از خروجی سیستم می‌تواند عملکرد قابل قبولی به عنوان یک کنترل‌کننده از خود نشان دهد در عین حال این کنترلر دارای ویژگی‌هایی چون پایداری خوب، tracking مناسب، مقاومت در برابر نامعینی‌ها، حذف اغتشاش، دکوپله سازی خوب و مهم‌تر از همه عدم نیاز به دینامیک سیستم و حتی عدم نیاز به تجربه قبلی از سیستم می‌باشد.

مراجع

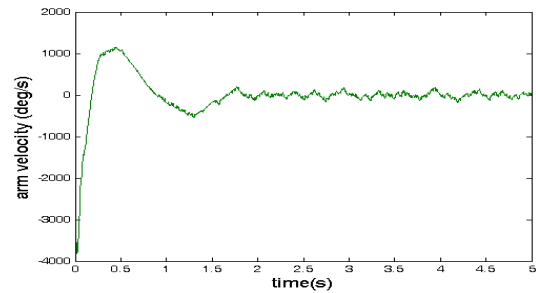
- [1] Zhigang Han and Dejin Wang, "Controller without Model", Journal of Natural Science of Heilong-Jiang University, 1994.
- [2] Zhong Sheng Hou, The Parameter Identification, Adaptive Control and Model Free Learning Adaptive Control for Nonlinear Systems, Shenyang: North-Eastern University, 1994.
- [3] L. X. Wang, Adaptive Fuzzy Systems and Control Design and Stability Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [4] T. K. Yin, and C. S. G. Lee, "Fuzzy Model-Reference Adaptive Control", IEEE Systems Man Cybernet, Vol. 25 No. 12, pp.1606-1615, 1995.
- [5] M. W. Vandegrift, F. L. Lewis, S. Jagannathan and K. Liu, "Adaptive Fuzzy Logic Control of Discrete-Time Dynamical System", Proceedings of the 1995 IEEE International Symposium on Intelligent Control, pp.395-401, 1995.
- [6] S. Jagannathan, "Adaptive Fuzzy Logic Control of Feedback Linearizable Discrete-Time Nonlinear Systems", Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium on Intelligent Control, Dearborn, pp.133-138, 1996.
- [7] Cheng Shuxing George, Model-Free Adaptive Process Control, United States Patent, 6055524 [P]. Washington:



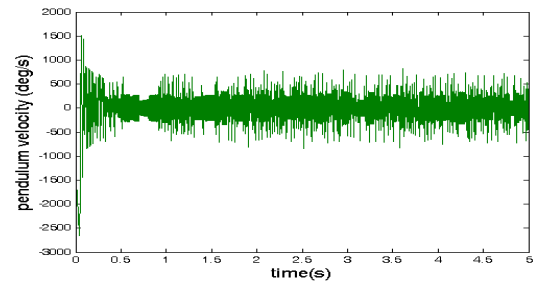
(a)



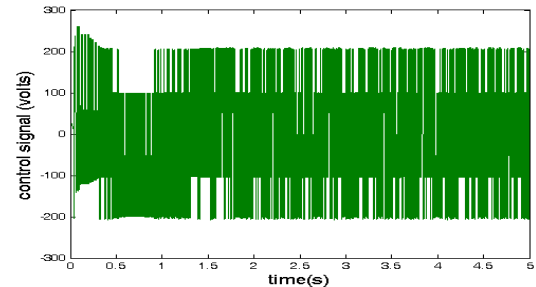
(b)



(c)



(d)



(e)

شکل (۱۱): نتایج شبیه سازی برای $\theta_2 = 75^\circ$
 (a) زاویه چرخشی بازو θ_1 ، (b) زاویه چرخشی پاندول θ_2 ،
 (c) سرعت زاویه چرخشی بازو θ_1 ، (d) سرعت زاویه چرخشی
 پاندول θ_2 ، (e) سیگنال کنترلی

- United States Patent and Trademark Office of the United States Department of Commerce April 25, 2000.
- [8] Raúl Ordóñez, Jon Zumberge, Jeffrey T. Spooner, and Kevin M. Passino. "Adaptive Fuzzy Control: Experiments and Comparative Analysis", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 5, No. 2, pp. 167-188, 1997.
- [9] S. Jagannathan, "Adaptive Fuzzy Logic Control of Feedback Linearizable Discrete-Time Dynamical Systems under Persistence of Excitation", Automatica, Vol. 34, No. 11, pp. 1295-1310, 1998.
- [10] P. K. Sinha and A. N. Pechev, "Nonlinear H-infinity Controllers for Electromagnetic Suspension Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No. 4, pp. 563-568, 2004.
- [11] Samira Mir Mazhari Anvar, Iraj Hassanzadeh, Ghasem Alizadeh, "Design and Implementation of Sliding Mode-State Feedback Control for Stabilization of Rotary Inverted Pendulum", International Conference on Control, Automation and Systems, Korea, pp. 1952-1957, 2010.
- [12] Xu Aidong, Zheng Yangbo, Song Yan and Liu Mingzhe, "An Improved Model Free Adaptive Control Algorithm", Fifth International Conference on Natural Computation, pp.70-74, 2009.

زیرنویس‌ها

- ¹. Model Base
- ². Model Free Adaptive Control (MRAC)
- ³. Adaptive Feedback Linearization
- ⁴. Adaptive Fuzzy Controller (AFC)
- ⁵. Indirect Adaptive Fuzzy Controller (IAFC)
- ⁶. Direct Adaptive Fuzzy Controller (DAFC)