

Simultaneous design of H_∞ model predictive controller and persistent dwell time switching signal for a class of nonlinear switched systems with unstabilizable sub-systems

Ali Rahdan, Mostafa Abedi*

Department of Electrical Engineering, Shahid Beheshti university, Velenjak, Tehran, Iran
E-mails: mo_abedi@sbu.ac.ir; a_rahdan@sbu.ac.ir

Short Abstract

In this paper, the simultaneous design of model predictive control and persistent dwell time switching signal for the Lipschitz switched systems is investigated. In the proposed design, the assumption of stabilizability of all sub-systems is removed. Also, the H_∞ performance is guaranteed against external disturbances. To guarantee stability despite the mentioned features, a multiple Lyapunov function is defined. Also, two different types of cost functions have been proposed, including a cost function with the finite predictive horizon for unstabilizable sub-systems and a cost function with the infinite predictive horizon for stabilizable sub-systems. The developed control problem is formulated as an optimization problem in the form of linear matrix inequalities, by solving which the control gain is obtained. Due to the existence of many constraints due to cost functions and stability conditions in the aforementioned linear matrix inequalities, a solution sequence has been considered for the optimization problem, in which a number of these constraints are applied at each step in such a way that the rate of energy variation in different sub-systems can be adjusted and the asymptotic stability of the whole system is guaranteed. Finally, to validate the proposed design, a chemical system with proposed controller is evaluated.

Keywords

Nonlinear switched system, model predictive control, persistent dwell time, multiple Lyapunov function, unstabilizable sub-systems, H_∞ performance.

1- Short Introduction

By reviewing the research papers about model predictive control in different switched systems, it is concluded that most of them are under arbitrary switching signal which is very conservative and all sub-systems should be stabilizable. On the other hand, in model predictive control designs that have a time-dependent switching signal, the sub-systems are assumed to be linear and stabilizable. Also, some practical requirements such as H_∞ performance are not included in the design process. Therefore, a simultaneous design of the model predictive control and persistent dwell time switching signal is developed for the Lipschitz switched systems, so that the conservatism is reduced and the assumption of stabilizability of all sub-systems is removed.

2- Proposed Work and Methodology

In this paper, simultaneous design of the model predictive control and persistent dwell time switching signal is investigated for a class of discrete-time nonlinear switched systems. Compared to the model predictive designs that have been presented so far, the proposed design is robust against unstabilizable sub-systems and disturbances. By simulating a chemical system in MATLAB software and applying the proposed design and other model predictive designs, it is shown that the performance of other designs is greatly reduced in the presence of the mentioned challenges, while the proposed design performs. Also, in the proposed design, by defining the cost function in the unstabilizable sub-systems, the optimality of the whole system will be guaranteed.

3- Conclusion

A simultaneous design of model predictive control and persistent dwell time switching signal was investigated for the Lipschitz switched systems through multiple Lyapunov functions. In the proposed design, by removing the assumption of stabilizability of all sub-systems, the H_∞ performance was guaranteed against disturbances. Also, this design reduces the conservative aspects of other model predictive schemes in which the switched Lyapunov function has been used. Finally, to validate the proposed method, a chemical system was developed, and the performance of the proposed design was evaluated. The development of the model predictive control to asynchronous switched systems is suggested as a future work.

4- References

- I. Nodozi and M. Rahmani M, "LMI-based model predictive control for switched nonlinear system", Journal of Process Control, vol. 59 pp. 49-58, 2017.
- M. Aminsafae and M. Shafiei, "Stabilization of uncertain nonlinear discrete-time switched systems with state delays: A constrained robust model predictive control approach", Journal of Vibration and Control, vol. 25, no. 14, pp. 2079-2090, 2019.
- Y. Qi, W. Yu, J. Huang and Y. Yu, "Model predictive control for switched systems with a novel mixed time/event-triggering mechanism", Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 42, pp. 101081, 2022.

طراحی همزمان کنترل کننده پیش‌بین مدل H^∞ و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار برای کلاسی از سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی با زیرسیستم‌های پایدارناپذیر

علی راهدان

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

مصطفی عابدی

دانشیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، طراحی همزمان کنترل پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار برای سیستم‌های کلیدزنی لیبیشیتز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در طرح پیشنهادی، فرض پایداری تمامی زیرسیستم‌ها حذف می‌شود. همچنین، عملکرد H^∞ در برابر اغتشاشات خارجی تضمین می‌گردد. برای تضمین پایداری با وجود ویژگی‌های مذکور، یک تابع لیاپانوف چندگانه تعریف می‌گردد. همچنین، دو نوع تابع هزینه متفاوت شامل تابع هزینه با افق محدود برای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر و تابع هزینه با افق نامحدود برای زیرسیستم‌های پایدارپذیر پیشنهاد گردیده است. مسأله کنترل توسعه داده شده به یک مسأله بهینه‌سازی در قالب ناتساوی‌های ماتریسی خطی جمع‌بندی می‌گردد که با حل آن، بهره کنترل به دست آورده می‌شود. با توجه به موجود بودن محدودیت‌های متعدد ناشی از توابع هزینه و شرایط پایداری در ناتساوی‌های ماتریسی خطی مذکور، یک توالی حل برای مسأله بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است که در هر مرحله تعدادی از این محدودیت‌ها اعمال می‌گردند به گونه‌ای که نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌های مختلف قابل تنظیم باشد و پایداری مجانبی کل سیستم تضمین گردد. در نهایت، برای اعتبارسنجی طرح پیشنهادی، یک سیستم شیمیایی با کنترل کننده پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی

سیستم کلیدزنی غیرخطی، کنترل پیش‌بین مدل، زمان اقامت ماندگار، تابع لیاپانوف چندگانه، زیرسیستم‌های پایدارناپذیر، عملکرد H^∞ .

نام نویسنده مسئول: مصطفی عابدی

ایمیل نویسنده مسئول: mo_abedi@sbu.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۵/۱۶

تاریخ(های) اصلاح مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۰۴

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۲۵

۱- مقدمه

کلیدزنی مقید، سیگنال کلیدزنی وابسته به زمان بیشتر مورد توجه قرار گرفته است و دارای ساختارهای مختلف از جمله زمان اقامت^۱، زمان اقامت میانگین^۲ و زمان اقامت ماندگار^۳ است [۹]. مسأله پایداری تحت هر یک از سیگنال‌های کلیدزنی ذکر شده معمولاً با استفاده از رویکرد لیاپانوف از جمله تابع لیاپانوف مشترک^۴، تابع لیاپانوف کلیدزنی^۵ و تابع لیاپانوف چندگانه^۶ انجام می‌شود [۷]. به طور کلی، تابع لیاپانوف چندگانه اجازه می‌دهد تا انرژی سیستم در بعضی بازه‌های زمانی افزایش یابد. بنابراین، برای پایداری سیستم‌های کلیدزنی با زیرسیستم‌های ناپایدار مناسب است.

در بسیاری از مطالعات، مسأله پایداری با سیگنال کلیدزنی برای سیستم‌های کلیدزنی خطی و غیرخطی مورد توجه قرار گرفته است [۱۰-۱۵]. بر اساس این مطالعات، اکثر طرح‌های کنترل دارای رویکردی قطع-خط هستند. بنابراین، حل چالش‌های مهم از جمله وجود زیرسیستم‌های پایدارناپذیر و تضمین عملکرد H^∞ منجر به قیدهای بیشتر و ناحیه امکان‌پذیری کوچک‌تر می‌شود. بنابراین، باید به سمت یک رویکرد برخط رفت که فقط برخی از محدودیت‌ها را در هر گام زمانی اعمال کند و در نتیجه، ناحیه امکان‌پذیری افزایش یابد. یکی

سیستم‌های کلیدزنی به عنوان یک دسته مهم از سیستم‌های ترکیبی به دلیل توصیف قوی رفتار سیستم‌های پیچیده، در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. آن‌ها از چندین زیرسیستم و یک سیگنال کلیدزنی که زیرسیستم فعال را تعیین می‌کند، تشکیل شده‌اند [۱]. از منظر عملی، سیستم‌های با انواع عیب‌ها و عدم قطعیت‌ها [۲]، سیستم‌های غیرخطی پیچیده [۳-۴] و سیستم‌های در معرض تغییر ساختار و پارامتر [۵-۶] را می‌توان به صورت سیستم‌های کلیدزنی مدل‌سازی نمود.

یکی از مهمترین مسائل در سیستم‌های کلیدزنی، حفظ پایداری کل سیستم با وجود کلیدزنی‌های متعدد در زمان‌های مختلف است. از نقطه نظر سیگنال کلیدزنی، مسأله پایداری عمدتاً به دو دسته کلی شامل پایداری تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه و پایداری تحت سیگنال کلیدزنی مقید تقسیم می‌شوند [۷-۸]. اگر سیگنال کلیدزنی به صورت دلخواه فرض شود، یک کنترل کننده با محافظه‌کاری زیاد طراحی می‌شود [۷]. بنابراین، منطقی است که قیودی روی سیگنال کلیدزنی در نظر گرفته شوند. در میان سیگنال‌های

^۴ Common Lyapunov function

^۵ Switched Lyapunov function

^۶ Multiple Lyapunov function

^۱ Dwell time

^۲ Average dwell time

^۳ Persistent dwell time

تضمین گردیده و توابع هزینه درجه دوم در نظر گرفته شده برای زیرسیستم‌ها حداقل گردد. بر این اساس، نوآوری‌های اصلی مقاله به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

- در این مقاله، یک طرح همزمان کنترل پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار برای تضمین پایداری مجانبی یکنواخت محلی کلاسی از سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی لپیشیتز توسعه می‌یابد، به گونه‌ای که بر خلاف کارهای پیشین [۵، ۶، ۲۲-۱۷]، فرض پایداری پذیر بودن همه زیرسیستم‌ها و محدودیت محافظا کارانه اکیدا نزولی بودن تغییرات انرژی در همه زیرسیستم‌ها حذف شده است. همچنین، با به کارگیری ساختار زمان اقامت ماندگار، محدودیت زمان اقامت مربوط به ساختار زمان اقامت میانگین مورد استفاده در کارهای پیشین [۱۹، ۲۰، ۲۲] کاهش می‌یابد و مقاوم بودن کنترل‌کننده در برابر کلاس بزرگتری از سیگنال‌های کلیدزنی اثبات می‌شود.

- در طرح پیشنهادی، علاوه بر تعریف یک تابع هزینه با افق پیش‌بین نامحدود در زیرسیستم‌های پایداری‌پذیر که از کارهای پیشین الهام گرفته است [۵، ۶، ۱۷-۲۲]، یک تابع هزینه با افق پیش‌بین محدود برای زیرسیستم‌های پایداری‌ناپذیر نیز تعریف می‌شود تا بهینه‌سازی هزینه و انرژی نیز در این زیرسیستم‌ها انجام شود.

- در طرح پیشنهادی، یک چارچوب برخط برای کاهش تعداد قیود در مسأله بهینه‌سازی بر اساس زیرسیستم فعال و لحظه کلیدزنی ارائه می‌شود. به کمک این چارچوب، مشکلات امکان‌پذیری جهت حل مسأله در مقایسه با روش‌های مشابه کاهش می‌یابد.

- در کارهای پیشین که روی سیستم کلیدزنی غیرخطی لپیشیتز مطالعه گردیده است [۶، ۱۷، ۱۸، ۲۱]، ورودی‌های اغتشاش نادیده گرفته شده است. در طرح پیشنهادی، ورودی اغتشاش به دینامیک سیستم اضافه و عملکرد H_∞ در حضور محدودیت‌های ورودی تضمین می‌گردد.

- ساختار مقاله به شکل زیر می‌باشد. در بخش ۲، مسأله اصلی مقاله و همچنین مفروضات و مقدمات ریاضی مورد نیاز شرح داده می‌شوند. در بخش ۳، طرح پیشنهادی ارائه می‌شود. در بخش ۴، عملکرد طرح پیشنهادی روی یک سیستم شیمیایی نشان داده می‌شود. در نهایت، در بخش ۵، جمع‌بندی مقاله بیان می‌گردد.

جدول ۱- فهرست اصطلاحات

نمابه‌ها و مجموعه‌ها	
i	نمابه زیرسیستم‌ها
M	مجموعه زیرسیستم‌ها
M_S	مجموعه زیرسیستم‌های پایداری‌پذیر
M_{US}	مجموعه زیرسیستم‌های پایداری‌ناپذیر
n	نمابه رأس‌های عدم قطعیت چندوجهی
پارامترها و ثابت‌ها	
T	دوره ماندگاری
r_{sw}	فرکانس کلیدزنی در بخش T
t_T	زمان اقامت ماندگار
t_{\min}^-	حداقل زمان اجرای زیرسیستم‌های پایداری‌پذیر در بخش T

از طرح‌های کنترل محبوب با رویکرد برخط، کنترل پیش‌بین مدل است که به دلیل در نظر گرفتن محدودیت‌های فیزیکی و کاهش دادن انرژی و هزینه، به‌طور گسترده در صنعت مورد استفاده قرار گرفته است. به‌طور کلی، تحقیقات کمی در مورد کنترل پیش‌بین مدل در زمینه سیستم‌های کلیدزنی انجام شده است. در مرجع [۱۶]، یک طرح همزمان پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت میانگین برای سیستم‌های کلیدزنی زمان پیوسته از طریق تابع لیاپانوف چندگانه توسعه پیدا کرده است. در این طرح، با توجه به زیرسیستم فعال و محدودیت‌های ورودی و حالت، مسأله بهینه‌سازی در هر گام زمانی حل می‌شود و ورودی کنترل به‌دست می‌آید. در مرجع [۵]، یک طرح پیش‌بین مدل H_2/H_∞ برای سیستم‌های کلیدزنی خطی زمان گسسته تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه در چارچوب ناتساوی‌های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع [۶]، یک طرح پیش‌بین مدل برای سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی زمان گسسته تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه در چارچوب ناتساوی‌های ماتریسی خطی معرفی شده است. در مراجع [۱۷-۱۸]، دو طرح پیش‌بین مدل مقاوم برای سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی زمان گسسته تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه در حضور تأخیر و عدم قطعیت‌ها پیشنهاد شده است. در مرجع [۱۹]، یک طرح همزمان پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت میانگین به کمک تابع لیاپانوف چندگانه برای سیستم‌های کلیدزنی خطی زمان گسسته توسعه یافته است. در مرجع [۲۰]، یک طرح همزمان پیش‌بین مدل مبتنی بر مشاهده‌گر و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت میانگین برای سیستم‌های کلیدزنی شبکه‌شده با سازوکار رویداد محور ایجاد گردید. به عنوان آخرین پژوهش‌های انجام شده، در مرجع [۲۱]، یک طرح پیش‌بین مدل برای سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی تاخیردار با ساختار لپیشیتز تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه ارائه شده است و عملکرد این کنترل‌کننده روی یک سیستم تصفیه آب مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مرجع [۲۲]، یک طرح همزمان پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت میانگین به کمک تابع لیاپانوف چندگانه برای کلاسی از سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی زمان گسسته توسعه یافته است.

در شرایط واقعی، سیستم‌ها ممکن است به دلیل عدم قطعیت شدید یا خرابی تجهیزات، رفتار ناپایدار داشته باشد. بنابراین، احتمال ورود به زیرسیستم‌های ناپایدار به صورت غیرمنتظره در لحظه‌های کلیدزنی وجود خواهد داشت که می‌تواند عواقبی مانند ناپایداری کلی سیستم را به همراه داشته باشد. با توجه به نتایج ذکر شده در مورد طرح‌های کنترل پیش‌بین مدل در سیستم‌های کلیدزنی مختلف، اکثر آن‌ها تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه قرار دارند که مبتنی بر فرض پایداری‌پذیر بودن همه زیرسیستم‌ها و اکیدا نزولی بودن تابع لیاپانوف در لحظات کلیدزنی و زیرسیستم‌ها می‌باشند [۵، ۶، ۱۷، ۱۸، ۲۱]. از سوی دیگر، در طرح‌های کنترل پیش‌بین مدل که تحت سیگنال کلیدزنی وابسته به زمان هستند، اجازه افزایش محدود تابع لیاپانوف در لحظات کلیدزنی داده می‌شود. با این حال، هنوز فرض پایداری‌پذیر بودن همه زیرسیستم‌ها و محدودیت اکیدا نزولی بودن تابع لیاپانوف در زیرسیستم‌ها وجود دارد [۱۹، ۲۰، ۲۲]. همچنین، برخی از الزامات عملی مانند کاهش اثرات اغتشاشات یا تضمین عملکرد H_∞ در فرآیند طراحی گنجانده نشده است. با توجه به مشکلات ذکر شده، در این مطالعه، کلاسی از سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی لپیشیتز در نظر گرفته می‌شود که در دینامیک آنها، ورودی‌های اغتشاش و عدم قطعیت چندوجهی در نظر گرفته شده‌اند و حداقل یکی از زیرسیستم‌های آن پایداری‌ناپذیر است. همچنین، همه زیرسیستم‌ها دارای نقطه تعادل مشترک در مبدأ هستند. برای این کلاس از سیستم‌های کلیدزنی، یک طراحی همزمان کنترل پسخور حالت بر پایه پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار توسعه داده می‌شود که با وجود محدودیت اشباع ورودی، سیستم حلقه بسته دارای پایداری مجانبی یکنواخت محلی باشد، همچنین عملکرد H_∞ برای کاهش اثر اغتشاشات

بیان می‌شوند. در نتیجه، ماتریس‌های $A_{\sigma(k)}$ و $B_{\sigma(k)}$ به شکل زیر به دست آورده می‌شوند [۱۷]:

$$A_{\sigma(k)} = \sum_{n=1}^N c_n A_{\sigma(k),n}, \quad B_{\sigma(k)} = \sum_{n=1}^N c_n B_{\sigma(k),n}, \quad \sum_{n=1}^N c_n = 1 \quad (۴)$$

که $A_{\sigma(k),n}$ و $B_{\sigma(k),n}$ رأس‌های ناحیه ماتریسی محدب هستند. فرض ۳:

(الف) در معادله (۱)، همه زیرسیستم‌ها دارای نقطه تعادل مشترک در مبدأ هستند. همچنین، حداقل یک زیرسیستم پایدارپذیر وجود دارد. (ب) انرژی اغتشاش به صورت زیر محدود می‌شود:

$$\|\phi(k)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^T(k)\phi(k) \leq \phi_{\max} \quad (۵)$$

برای توسعه کنترل‌کننده، لم‌ها و تعاریف مورد نیاز به صورت زیر آورده می‌شوند. لم ۲: برای ماتریس‌های حقیقی X و Y و ثابت مثبت ε ، ناتساوی زیر برقرار است [۲۳]:

$$X^T Y + Y^T X \leq r X^T X + r^{-1} Y^T Y \quad (۶)$$

تعریف ۱: در ساختار زمان اقامت ماندگار، بازه زمانی به تعدادی پنجره تقسیم می‌شود که هر پنجره از دو قسمت شامل قسمت τ و قسمت T تشکیل می‌شود. در قسمت τ ، یک زیرسیستم خاص با زمان اجرا بیشتر از l_r فعال می‌شود و در قسمت l_r ، تعداد زیادی کلیدزنی به ترتیب در زمان و فرکانس کمتر از l_r رخ می‌دهد. l_r و r_{sw} به ترتیب زمان ماندگاری و دوره ماندگاری نامیده می‌شوند. تعداد کلیدزنی در قسمت T از یک پنجره دلخواه p با ناتساوی زیر محدود می‌شود [۹]:

$$N(k_{s_p+1}, k_{s_{p+1}}) \leq l_r r_{sw} \quad (۷)$$

که k_{s_p+1} و $k_{s_{p+1}}$ به ترتیب اولین و آخرین لحظه کلیدزنی در قسمت T در پنجره p هستند. در ساختار زمان اقامت ماندگار فرض بر این است که کل زمان اجرای زیرسیستم‌های پایدارپذیر و پایدارناپذیر در قسمت T هر پنجره به ترتیب دارای حد پایین l_{\min}^- و حد بالای l_{\max}^+ هستند.

تعریف ۲: نقطه تعادل $x=0$ در سیستم کلیدزنی (۱) تحت سیگنال کلیدزنی $\sigma(k)$ با $u(k) \equiv 0$ و $\phi(k) \equiv 0$ به طور یکنواخت مجانبی پایدار است، اگر یک کلاس از توابع κ_{∞} و یک ثابت مثبت c وجود داشته باشد به طوری که پاسخ سیستم ناتساوی زیر را ارضا کند [۲۰]:

$$\|\chi(k)\| \leq \alpha(\|\chi(k_0)\|) \quad \forall k \geq k_0, \quad \|\chi(k_0)\| \leq c, \quad \|\chi(k)\| \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \quad (۸)$$

تعریف ۳: برای یک ثابت مثبت γ_L ، سیستم کلیدزنی (۱)-(۲) با $u(k) \equiv 0$ پایدار مجانبی یکنواخت با بهره L_2 است، اگر نقطه تعادل $x=0$ تحت $\phi(k) \equiv 0$ پایدار مجانبی یکنواخت باشد و ناتساوی $\|\phi(k)\|_{L_2}^2 \leq \gamma^2 \|\phi(k_0)\|_{L_2}^2$ تحت $\phi(k_0) = 0$ و $\phi(k) \neq 0$ برقرار باشد [۲۰].

در ادامه به ارائه طرح کنترل پیش‌بین می‌پردازیم. طرح پیش‌بین مدل شامل یک مسئله بهینه‌سازی گام به گام است که در هر گام، تابع هزینه بر اساس ورودی‌ها و حالت‌های پیش‌بین شده به حداقل می‌رسد. فرض می‌گردد که $u(k+L|k)$ ، $\chi(k+L|k)$ و $\sigma(k+L|k)$ به ترتیب ورودی پیش‌بینی شده، حالات پیش‌بینی شده و سیگنال کلیدزنی پیش‌بینی شده باشند. همچنین، مقدار سیگنال کلیدزنی در افق پیش‌بین، ثابت فرض می‌شود.

جهت طراحی کنترل‌کننده، یک تابع هزینه با افق پیش‌بین نامحدود برای زیرسیستم‌های پایدارپذیر و یک تابع هزینه با افق پیش‌بین محدود برای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J_{s,i,k} = \sum_{L=0}^{\infty} \|\chi(k+L|k)\|_{Q_i}^2 + \sum_{L=0}^{\infty} \|u_{s,i,k}(k+L|k)\|_{S_i}^2 \quad (۹)$$

l_{\max}^+	حداکثر زمان اجرای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر در بخش T
T_s	زمان نمونه‌برداری
θ	ضریب محدودکننده افزایش انرژی در لحظات کلیدزنی
r_s	نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌های پایدارپذیر
r_{is}	نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر
$u_{e,\max}$	کران بالای مولفه‌های ورودی
ϕ_{\max}	کران بالای انرژی اغتشاش
γ	سطح حذف اغتشاش
v^e	e-امین بردار پایه کانونیکال R^{-1}
$r_{i,n}$	پارامترهای تصمیم‌گیری ترم‌های غیرخطی
l_p	طول افق پیش‌بین در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر
N	حداکثر تعداد کلیدزنی در بخش T
σ	سیگنال کلیدزنی
C_n	ضریب رأس‌های عدم قطعیت چندوجهی
v	تابع لیاپانوف چندگانه
J	تابع هزینه
متغیرها	
P	ماتریس تابع لیاپانوف
F	بهره کنترل
λ	حداکثر مقدار ویژه ماتریس P
\mathcal{G}	کران بالای تابع هزینه
H, L, Y, Δ	متغیرهای مسئله بهینه‌سازی

۲- مقدمات ریاضی

سیستم کلیدزنی غیرخطی زمان گسسته را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\chi(k+1) = A_{\sigma(k)}\chi(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + n_{\sigma(k)}(\chi(k), u(k)) + W_{\sigma(k)}\phi(k) \quad (۱)$$

$$o(k) = \begin{pmatrix} R_{1\sigma(k)}\chi(k) \\ R_{2\sigma(k)}u(k) \end{pmatrix} \quad (۲)$$

که $\chi(k) \in R^{n_x}$ ، $u(k) \in R^{n_u}$ ، $o(k) \in R^{n_o}$ و $\phi(k) \in R^{n_\phi}$ به ترتیب معرف حالت‌های سیستم، ورودی کنترل، خروجی کنترل شده و اغتشاشات هستند. سیگنال کلیدزنی به صورت $M = \{1, 2, \dots, m\}$ نشان $\sigma(k): [0, \infty) \rightarrow M$ داده می‌شود. ماتریس‌های $A_{\sigma(k)}$ ، $B_{\sigma(k)}$ ، $R_{1\sigma(k)}$ ، $R_{2\sigma(k)}$ و $W_{\sigma(k)}$ نمایانگر ماتریس‌های حقیقی فضای حالت با ابعاد مناسب هستند و $n_{\sigma(k)}$ نمایانگر عبارت غیرخطی است.

فرض ۱: عبارت غیرخطی $n_{\sigma(k)}$ ناتساوی زیر را برآورده می‌کند:

$$n_{\sigma(k)}(\chi(k), u(k))^T n_{\sigma(k)}(\chi(k), u(k)) \leq \begin{bmatrix} \chi(k) \\ u(k) \end{bmatrix}^T N_{\sigma(k)} \begin{bmatrix} \chi(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (۳)$$

که $N_{\sigma(k)}$ معرف ماتریس لیبیشیتز است.

فرض ۲: فرض بر این است که عدم قطعیت مدل در (۱) به صورت چند وجهی

$$\begin{pmatrix} T_{11}' & -\bar{A}_{s,i,n,k}^T P_{us,i,k} W_i \\ * & -(1+r_{i,n}) W_i^T P_{us,i,k} W_i + \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0, n=1, \dots, N \quad (24)$$

$$\lambda_{us,i,k} I - P_{us,i,k} \geq 0 \quad (25)$$

$$\theta P_{j,k-1} - P_{us,i,k} \geq 0, j = \sigma(k-1) \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & V^e F_{s,i,k} \\ * & \varrho_{us,i,k}^{-1} P_{us,i,k} \end{pmatrix} \geq 0, e=1, \dots, n_u \quad (27)$$

که در آن * معرف عبارت‌های متقارن در ماتریس‌ها، $\varrho_{s,i,k}$ و $\varrho_{us,i,k}$ به ترتیب کران‌های بالا برای تابع هزینه در زیرسیستم‌های پایدارپذیر ($J_{s,i,k}$) و تابع هزینه در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر ($J_{us,i,k}$), r_s و r_{us} به ترتیب نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌های پایدارپذیر و زیرسیستم‌های پایدارناپذیر، θ ضریب محدود کننده افزایش انرژی در لحظات کلیدزنی و

$$\bar{A}_{s,i,n,k} = A_{i,n} + B_{i,n} F_{s,i,k} \quad (28)$$

$$\bar{A}_{us,i,n,k} = A_{i,n} + B_{i,n} F_{us,i,k} \quad (29)$$

$$T_{11} = -(1+r_{i,n}) \bar{A}_{s,i,n,k}^T P_{s,i,k} \bar{A}_{s,i,n,k} - (1+2r_{i,n}^{-1}) \quad (30)$$

$$\lambda_{s,i,k} \begin{bmatrix} I & N_i^T N_i \\ F_{s,i,k} & I \end{bmatrix} + P_{s,i,k} - R_{li}^T R_{li} - F_{s,i,k}^T R_{2i}^T R_{2i} F_{s,i,k} + r_s P_{s,i,k} \quad (30)$$

$$T_{11}' = -(1+r_{i,n}) \bar{A}_{us,i,n,k}^T P_{us,i,k} \bar{A}_{us,i,n,k} - (1+2r_{i,n}^{-1}) \lambda_{us,i,k} \begin{bmatrix} I & N_i^T N_i \\ F_{us,i,k} & I \end{bmatrix} + P_{us,i,k} - R_{li}^T R_{li} - F_{us,i,k}^T R_{2i}^T R_{2i} F_{us,i,k} + r_{us} P_{us,i,k} \quad (31)$$

آنگاه، برای قوانین کنترل پسخور حالت $u_{s,i,k}(k|k) = F_{s,i,k} \chi(k|k)$ و $u_{us,i,k}(k|k) = F_{us,i,k} \chi(k|k)$ هر سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار که شرط زیر را برآورده نماید:

$$l_T > l_T^* = \max \left\{ \frac{(l_T r_{sw} + 1) \ln \theta + l_{\min}^- \ln(1+r_s) + l_{\max}^+ \ln(1+r_{us})}{-\ln(1+r_s)}, \frac{1}{r_{sw}} \right\} \quad (32)$$

سیستم کلیدزنی حلقه بسته در (۱)-(۲) با توجه به محدودیت‌های ورودی و (۱۳)-(۱۴) و تحت فرضیات ۱-۴ دارای پایداری مجانبی یکنواخت محلی و عملکرد H^∞ با سطح تضعیف اغتشاش (۳۳) خواهد بود:

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{-r_s \gamma^2 \alpha}{1-\beta}} \quad (33)$$

که $\beta = \theta^{l_T+l_s} (1+r_s) \left(\frac{1+r_{us}}{1+r_s} \right)^{l_T+l_s}$ و $\alpha = \theta^{l_T r_{sw} + 1} \left(\frac{1+r_{us}}{1+r_s} \right)^{l_{\max}^+}$

اثبات. پیوست ۱ را ببینید.

مسئله بهینه‌سازی غیر محدب در (۱۶)-(۲۱) و (۲۲)-(۲۷) باید به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی ناتساوی ماتریسی خطی جمع‌بندی شود. بنابراین قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۲: سیستم کلیدزنی (۱)-(۲) را تحت فرضیات ۱ تا ۳ و قیود ورودی و حالت (۱۳)-(۱۴) در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که پارامترهای تصمیم‌گیری $-1 < r_s < 0$, $r_{us} > 0$, $\theta > 1$, N_i , $r_{i,n} > 0$, $\gamma > 0$, ϕ_{\max} و l و پارامترهای ساختار زمان اقامت ماندگار l_T , r_{sw} , l_{\min}^- و l_{\max}^+ انتخاب شده باشند. حال اگر ماتریس‌های $H_{s,i,k} > 0$, $H_{us,i,k} > 0$, $L_{s,i,k}$, $L_{us,i,k}$, $Y_{s,i,k}$ و $Y_{us,i,k}$ و اسکالرهای $\Delta_{s,i,k} > 0$ و $\Delta_{us,i,k} > 0$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که مسائل بهینه‌سازی زیر را ارضا کنند:

$$\min_{P_{s,i,k}, \lambda_{s,i,k}, Y_{s,i,k}, \Delta_{s,i,k}, H_{s,i,k}, L_{s,i,k}} \varrho_{s,i,k} \quad (34)$$

$$J_{us,i,k} = \sum_{L=0}^l \|\chi(k+L|k)\|_{Q_i}^2 + \sum_{L=0}^l \|u_{us,i,k}(k+L|k)\|_{S_i}^2 \quad (10)$$

که در آن $S_i = R_{2i}^T R_{2i}$ و $Q_i = R_{1i}^T R_{1i}$ ماتریس‌های مثبت معین هستند و l افق پیش‌بین است. قوانین کنترل پسخور حالت مربوط به زیرسیستم‌های پایدارپذیر و پایدارناپذیر به شرح زیر است:

$$u_{s,i,k}(k+L|k) = F_{s,i,k} \chi(k+L|k), L=0, 1, \dots, \infty \quad (11)$$

$$u_{us,i,k}(k+L|k) = F_{us,i,k} \chi(k+L|k), L=0, 1, \dots, l \quad (12)$$

که در آن $F_{s,i,k}$ و $F_{us,i,k}$ بهره‌های کنترل پسخور هستند. مؤلفه e -ام بردار ورودی تعریف شده در (۱۱)-(۱۲) دارای محدودیت‌های زیر می‌باشد:

$$|u_{s,i,k}^e(k+L|k)| \leq u_{e,\max}, e=1, 2, \dots, n_u \quad (13)$$

$$|u_{us,i,k}^e(k+L|k)| \leq u_{e,\max}, e=1, 2, \dots, n_u \quad (14)$$

که در آن $u_{e,\max}$ کران بالای مؤلفه e -ام بردار ورودی است.

تذکر ۱: به دلیل محدود بودن زمان زیرسیستم‌های پایدارناپذیر، افق پیش‌بین در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر محدود در نظر گرفته می‌شود، بنابراین، داریم:

$$l \leq l_p = \frac{T_{\max}^+}{T_s} \quad (15)$$

۳- طراحی همزمان کنترل کننده پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی

در این بخش، طراحی همزمان کنترل کننده و سیگنال کلیدزنی مطابق با قضایای زیر توسعه داده می‌شوند:

قضیه ۱. سیستم کلیدزنی (۱)-(۲) را تحت فرضیات ۱ تا ۳ و قیود ورودی (۱۳)-(۱۴) در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که پارامترهای تصمیم‌گیری $-1 < r_s < 0$, $r_{us} > 0$, $\theta > 1$, N_i , $r_{i,n} > 0$, $\gamma > 0$, ϕ_{\max} و l و پارامترهای ساختار زمان اقامت ماندگار l_T , r_{sw} , l_{\min}^- و l_{\max}^+ انتخاب شده باشند. حال اگر ماتریس‌های $P_{s,i,k} > 0$, $P_{us,i,k} > 0$, $F_{s,i,k}$ و $F_{us,i,k}$ و اسکالرهای $\lambda_{s,i,k} > 0$ و $\lambda_{i,k} > 0$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که مسائل بهینه‌سازی زیر را برآورده سازند:

در مورد زیرسیستم‌های پایدارپذیر:

$$\min_{P_{s,i,k}, \lambda_{s,i,k}, F_{s,i,k}} \varrho_{s,i,k} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \varrho_{s,i,k} & \chi(k)^T & \gamma^2 \phi_{\max} \\ * & P_{s,i,k}^{-1} & 0 \\ * & * & \gamma^2 \phi_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & -\bar{A}_{s,i,n,k}^T P_{s,i,k} W_i \\ * & -(1+r_{i,n}) W_i^T P_{s,i,k} W_i + \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0, n=1, \dots, N \quad (18)$$

$$\lambda_{s,i,k} I - P_{s,i,k} \geq 0 \quad (19)$$

$$\theta P_{j,k-1} - P_{s,i,k} \geq 0, j = \sigma(k-1) \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & V^e F_{s,i,k} \\ * & \varrho_{s,i,k}^{-1} P_{s,i,k} \end{pmatrix} \geq 0, e=1, \dots, n_u \quad (21)$$

در مورد زیرسیستم‌های پایدارناپذیر:

$$\min_{P_{us,i,k}, \lambda_{us,i,k}, F_{us,i,k}} \varrho_{us,i,k} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \varrho_{us,i,k} & \chi(k)^T & \gamma^2 \phi_{\max} \\ * & (1+r_{us})^{-l_p} P_{us,i,k}^{-1} & 0 \\ * & * & (1+r_{us})^{1-l_p} \gamma^2 \phi_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

اثبات. پیوست ۲ را ببینید.

تذکر ۲: پارامترهای سیگنال کلیدزنی بر اساس ویژگی‌های کلیدزنی سیستم فیزیکی انتخاب می‌شوند. مقدار بهینه N_i بر اساس مسأله بهینه‌سازی ارائه شده در [۵] محاسبه می‌شود. مقدار بهینه $r_{i,n}$ بر اساس بهینه‌سازی رابطه (پ-۱) (۱۴) محاسبه می‌شود. مقدار l_p بر اساس رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود. بعضی پارامترهای سیگنال کلیدزنی شامل r_{us} ، r_s و θ در مسائل بهینه‌سازی (۳۴)-(۳۹) و (۴۰)-(۴۵) استفاده می‌شوند. اگر حل مسأله بهینه‌سازی غیرممکن باشد، باید مقدار این پارامترها افزایش یابد تا ناحیه امکان‌پذیری نیز افزایش یابد. البته افزایش مقدار این پارامترها باعث می‌شود که کنترل‌کننده در برابر سیگنال‌های کلیدزنی با نرخ کلیدزنی کمتر مقاوم باشد. تذکر ۳: قضیه ۱ تضمین می‌کند که سیستم حلقه بسته دارای پایداری جانبی یکنواخت محلی است. حال شرایط اولیه باید به گونه‌ای انتخاب شوند که هم داخل ناحیه پایداری و هم داخل ناحیه امکان‌پذیری باشند. نامساوی لیبشیتز در رابطه (۳) تعیین‌کننده ناحیه پایداری است و شرایط اولیه باید این نامساوی را برآورده کنند. در غیر اینصورت، سیستم حلقه بسته ممکن است ناپایدار شود. همچنین، شرایط اولیه باید مسأله بهینه‌سازی (۱۶)-(۲۱) را امکان‌پذیر کنند.

برای چگونگی تعیین ناحیه امکان‌پذیری به مرجع [۵] مراجعه شود.

تذکر ۴: در طرح پیشنهادی، اگر γ کاهش یابد، آنگاه با توجه به رابطه (۳۳)، کاهش می‌یابد و عملکرد کنترل‌کننده بهتر می‌شود ولی از طرف دیگر ناحیه امکان‌پذیری نیز کوچکتر می‌شود. بنابراین، این پارامتر باید بر اساس مصالحه بین عملکرد کنترل‌کننده و ناحیه امکان‌پذیری انتخاب شود. همچنین، اگر هر کدام از پارامترهای r_{us} ، r_s و θ کاهش یابد، آنگاه با توجه به روابط (۳۲) و (۳۳)، l_p و γ_L کاهش می‌یابند و عملکرد کنترل‌کننده در برابر کلیدزنی‌های سریعتر بهبود می‌یابد ولی از طرف دیگر ناحیه امکان‌پذیری نیز کوچکتر می‌شود. بنابراین، در اینجا باید مصالحه دیگری بین سازگاری با نرخ کلیدزنی بالاتر و ناحیه امکان‌پذیری برقرار شود.

شکل ۱ الگوریتم طراحی گام به گام طرح پیشنهادی را نشان می‌دهد.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش، یک سیستم راکتور مخزن همزن پیوسته که دارای چندین زیرسیستم است مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این سیستم شیمیایی، یک واکنش شیمیایی بین چندین گونه هم‌دما در فاز مایع ($A \rightleftharpoons B \rightarrow C$) رخ می‌دهد و هدف از کنترل این است که با تنظیم سرعت جریان مولی B، غلظت گونه‌ها را تا حد امکان به مقادیر مورد نظر خود نزدیک کند. معادلات پویایی غیرخطی این سیستم شیمیایی به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= 1 - \bar{x}_1 - Da_1 \bar{x}_1 + Da_2 \bar{x}_2^2 + 0.1\phi \\ \dot{\bar{x}}_2 &= Da_1 \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Da_2 \bar{x}_2^2 - Da_3 \bar{x}_2^2 + \bar{u} + 0.2\phi \\ \dot{\bar{x}}_3 &= Da_3 \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3 + 0.1\phi \end{aligned} \quad (46)$$

که در آن \bar{x}_i ($i=1,2,3$) معرف غلظت‌های بدون بعد، \bar{u} معرف ورودی بدون بعد، ϕ معرف اغتشاش و Da_i ($i=1,2,3$) معرف پارامترهای ثابت هستند. مقادیر مطلوب غلظت‌های بدون بعد عبارتند از x_{1d} ، x_{2d} و x_{3d} و همچنین متغیرهای $\chi_1 = \bar{x}_1 - x_{1d}$ ، $\chi_2 = \bar{x}_2 - x_{2d}$ ، $\chi_3 = \bar{x}_3 - x_{3d}$ و $u = \bar{u} - u_d$ تعریف می‌شوند تا مسأله به یک مسأله تنظیم تبدیل شود. همچنین، سیستم شیمیایی (۴۶) با استفاده از تقریب مرتبه اول اوایلر گسسته می‌شود ($T_s = 0.2s$). پارامترهای ثابت برای دو زیرسیستم آن و مقادیر مطلوب در جدول ۲ نشان داده شده است. همچنین، فرض بر این است که با وقوع یک خطای متناوب، سیستم شیمیایی وارد زیرسیستم پایدارناپذیر زیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & \chi(k)^T & \gamma^2 \phi_{\max} \\ * & H_{s,i,k} & \mathbf{0} \\ * & * & \vartheta_{s,i,k} \gamma^2 \phi_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} (1+r_s) & \sqrt{1+2r_{i,n}^{-1}} & Y_{s,i,k}^T R_{li}^T \\ (Y_{s,i,k} + Y_{s,i,k}^T & [Y_{s,i,k}^T L_{s,i,k}^T] N_i^T & Y_{s,i,k}^T R_{li}^T \\ -H_{s,i,k} & \Delta_{s,i,k} I & \mathbf{0} \\ * & * & \vartheta_{s,i,k} I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \geq 0, \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} L_{s,i,k}^T R_{2i}^T & \mathbf{0} & \sqrt{1+r_{i,n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (A_{i,n} Y_{s,i,k} + B_{i,n} L_{s,i,k})^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vartheta_{s,i,k} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \vartheta_{s,i,k} \gamma^2 I & \sqrt{1+r_{i,n}} \vartheta_{s,i,k} W_i^T \\ * & * & H_{s,i,k} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (37)$$

$n=1,2,\dots,N$

$$H_{s,i,k} - \Delta_{s,i,k} I \geq 0 \quad (37)$$

$$H_{s,i,k} - \chi(k) \theta^{-1} \vartheta_{s,i,k} v_{j,k-1} (\chi(k))^{-1} \chi(k)^T \geq 0 \quad (38)$$

$$\begin{pmatrix} Y_{s,i,k} + Y_{s,i,k}^T & -H_{s,i,k} & L_{s,i,k}^T V e^T \\ * & * & u_{e,\max}^{-2} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

زیرسیستم‌های پایدارناپذیر:

$$\min_{H_{us,i,k}, L_{us,i,k}, Y_{us,i,k}, \Delta_{us,i,k}} \vartheta_{us,i,k} \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \chi(k)^T & \gamma^2 \phi_{\max} \\ * & (1+\xi_{us})^{-l_p} H_{s,i,k} & \mathbf{0} \\ * & * & \vartheta_{s,i,k} (1+\xi_{us})^{1-l_p} \gamma^2 \phi_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} (1+r_{us}) & \sqrt{1+2r_{i,n}^{-1}} & Y_{us,i,k}^T R_{li}^T \\ (Y_{us,i,k} + Y_{us,i,k}^T & [Y_{us,i,k}^T L_{us,i,k}^T] N_i^T & Y_{us,i,k}^T R_{li}^T \\ -H_{us,i,k} & \Delta_{us,i,k} I & \mathbf{0} \\ * & * & \vartheta_{us,i,k} I \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \geq 0, \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} L_{us,i,k}^T R_{2i}^T & \mathbf{0} & \sqrt{1+r_{i,n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (A_{i,n} Y_{us,i,k} + B_{i,n} L_{us,i,k})^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vartheta_{us,i,k} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \vartheta_{us,i,k} \gamma^2 I & \sqrt{1+r_{i,n}} \vartheta_{us,i,k} W_i^T \\ * & * & H_{us,i,k} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (42)$$

$n=1,2,\dots,N$

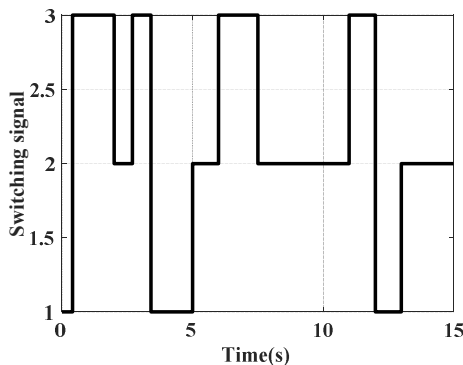
$$H_{us,i,k} - \Delta_{us,i,k} I \geq 0 \quad (43)$$

$$H_{us,i,k} - \chi(k) \theta^{-1} \vartheta_{us,i,k} v_{j,k-1} (\chi(k))^{-1} \chi(k)^T \geq 0 \quad (44)$$

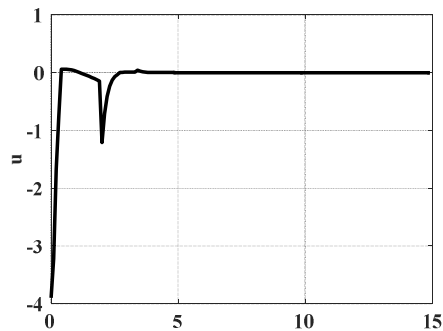
$$\begin{pmatrix} Y_{us,i,k} + Y_{us,i,k}^T & -H_{us,i,k} & L_{us,i,k}^T V e^T \\ * & * & u_{e,\max}^{-2} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (45)$$

آنگاه، برای بهره‌های کنترل $L_{s,i,k} Y_{s,i,k}^{-1}$ و $L_{us,i,k} Y_{us,i,k}^{-1}$ و هر سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار ارضا کننده (۳۲)، سیستم کلیدزنی حلقه بسته در (۱)-(۲) با توجه به محدودیت‌های ورودی (۱۳)-(۱۴) و تحت فرضیات ۱ تا ۳ دارای پایداری جانبی یکنواخت محلی و عملکرد H_∞ با سطح تضعیف اغتشاش (۳۳) است.

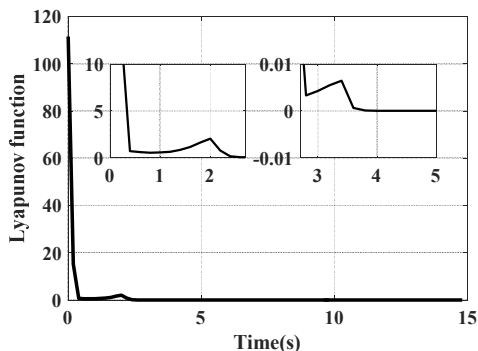
حال با استفاده از پارامترهای نشان داده شده در جدول ۲ و با فرض $\gamma_L = 1/86$ به دست می‌آید. در ادامه با توجه به سیگنال کلیدزنی نشان داده شده در شکل ۲، مسأله بهینه‌سازی در هر مرحله به صورت برخط حل می‌شود و بهره کنترلی به دست می‌آید. شکل ۳ ورودی کنترل اعمال شده به سیستم شیمیایی را نشان می‌دهد که محدودیت ورودی را ارضا می‌کند ($|u| \leq 4$). شکل ۴ روند تغییرات تابع لیاپانوف در زیرسیستم‌های پایدارپذیر و پایدارناپذیر نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۴، تغییرات تابع لیاپانوف در زیرسیستم پایدارناپذیر افزایشی و در زیرسیستم پایدارپذیر کاهش است. با این حال، به طور کلی روند به شکل کاهش خواهد بود. بنابراین، طراحی همزمان سیگنال کلیدزنی و کنترل‌کننده پیش‌بین مدل، پایداری مجانبی یکنواخت محلی سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند.



شکل ۲- سیگنال کلیدزنی نمونه



شکل ۳- ورودی سیستم شیمیایی



شکل ۴- تغییرات تابع لیاپانوف در سیستم شیمیایی

حالت‌های سیستم شیمیایی حاصل از شبیه‌سازی طرح پیشنهادی و طرح موجود در مرجع [۲۱] در شکل ۵ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۵، طرح پیشنهادی به خوبی همگرایی و واگرایی حالت‌های سیستم را که به ترتیب ناشی از زیرسیستم‌های پایدارپذیر (زیر سیستم‌های ۱ و ۲) و زیرسیستم‌های پایدارناپذیر (زیر سیستم ۳) هستند مدیریت می‌کند و نهایتاً این حالت‌ها را با یک عملکرد مناسب به سمت صفر همگرا می‌کند. از طرف دیگر، طرح موجود



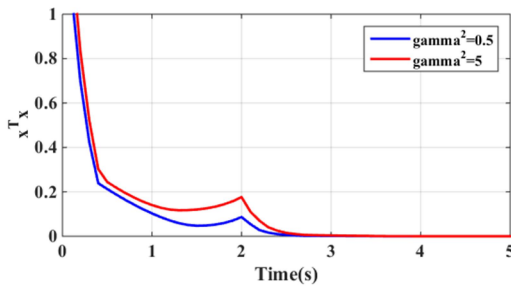
شکل ۱- الگوریتم طراحی گام به گام به طرح پیشنهادی

$$\chi(k+1) = \begin{pmatrix} 1+0/7T_s & 0 & 0 \\ 3T_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T_s \end{pmatrix} \chi(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ T_s \\ 0 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0/1T_s x_2^2(k) \\ -0/3T_s x_2^2(k) \\ 0/T_s x_2^2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0/1T_s \\ 0/2T_s \\ 0/1T_s \end{pmatrix} \phi(k) \quad (47)$$

با انتخاب مقادیر پارامترهای شبیه‌سازی مطابق جدول ۲، $t_r^* = 0/36s$ به دست می‌آید. سیگنال کلیدزنی طراحی شده این اجازه را می‌دهد که زیرسیستم پایدارناپذیر (زیرسیستم ۳) در قسمت T هر پنجره به مدت زمان حداکثری $I_{max}^+ = 2/3s$ و زیرسیستم‌های پایدارپذیر (زیرسیستم‌های ۱ و ۲) به مدت زمان حداقلی $I_{min}^- = 0/7s$ فعال باشند. شکل ۲ نمونه‌ای از سیگنال کلیدزنی با مشخصات ذکر شده را نشان می‌دهد.

جدول ۲- پارامترهای شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار
پارامترهای سیگنال کلیدزنی	$r_s = -0/2, r_{us} = 0/05, \theta = 1/03, \gamma^2 = 0/5, I_T = 3s, r_{sw} = 1Hz, I_{min}^- = 0/7s, I_{max}^+ = 2/3s$
راس‌های عدم قطعیت	$A_{i,n} = A_i \pm 0/1A_i (i=1,2,3, n=1,2)$
پارامترهای مطلوب	$x_d = [0/3467 \ 0/8796 \ 0/8796]^T, u_d = 1$
پارامترهای ثابت	Sub-system 1: $Da_1 = 3, Da_2 = 0.5, Da_3 = 1$ Sub-system 2: $Da_1 = 5, Da_2 = 1, Da_3 = 2$



شکل ۷- تاثیر γ روی عملکرد کنترل کننده

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، طراحی همزمان کنترل پیش‌بین مدل و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار برای کلاسی از سیستم‌های کلیدزنی غیرخطی زمان گسسته از طریق تابع لیاپانوف چندگانه مورد بررسی قرار گرفت. در طرح پیشنهادی، با حذف فرض پایدارپذیری تمامی زیرسیستم‌ها، پایداری مجانبی یکنواخت محلی و عملکرد H^∞ در برابر اغتشاشات تضمین گردید و جنبه‌های محافظه‌کارانه طراحی در مقایسه با سایر رویکردهای پیش‌بین مدل کاهش یافت. در نهایت، عملکرد طرح پیشنهادی روی یک سیستم شیمیایی مورد ارزیابی قرار گرفت.

پیوست ۱

اثبات مطابق مراحل زیر انجام می‌شود:

- قیدهای تابع هزینه (۱۷) و (۲۳): این قیود بهینه بودن ورودی کنترل و به حداقل رساندن توابع هزینه (۹) و (۱۰) را تضمین می‌کنند. برای این منظور، شرط پایداری لیاپانوف در افق پیش‌بین در زیرسیستم پایدارپذیر i به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v_{s,i,k}(k+L+1|k) - v_{s,i,k}(k+L|k) \leq r_s v_{s,i,k}(k+L|k) - o(k+L|k)^T o(k+L|k) + \gamma^2 \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) \quad (پ-۱)$$

که:

$$v_{s,i,k}(k+L|k) = \chi(k+L|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+L|k) \quad (پ-۱)$$

با جمع کردن دو طرف رابطه (پ-۱) از $L=0$ تا $L=\infty$ ، خواهیم داشت:

$$\sum_{L=0}^{\infty} [v_{s,i,k}(k+L+1|k) - v_{s,i,k}(k+L|k)] \leq r_s \sum_{L=0}^{\infty} v_{s,i,k}(k+L|k) - \sum_{L=0}^{\infty} o(k+L|k)^T o(k+L|k) + \gamma^2 \sum_{L=0}^{\infty} \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) \quad (پ-۳)$$

با توجه به $v_{s,i,k} > 0$ ، $r_s < 0$ و روابط (۵) و (۹)، ناتساوی زیر را می‌توان به دست آورد:

$$J_{s,i,k} \leq \chi^T(k|k) P_{s,i,k} \chi(k|k) + \gamma^2 w_{\max} \quad (پ-۴)$$

اگر حد بالای تابع هزینه با نماد $\vartheta_{s,i,k}$ نشان داده شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$\chi^T(k|k) P_{s,i,k} \chi(k|k) + \gamma^2 \phi_{\max} \leq \vartheta_{s,i,k} \Rightarrow \vartheta_{s,i,k} - \left(\chi(k|k)^T \begin{pmatrix} P_{s,i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^2 \phi_{\max} \end{pmatrix} \chi(k|k) \right) \geq 0 \quad (پ-۵)$$

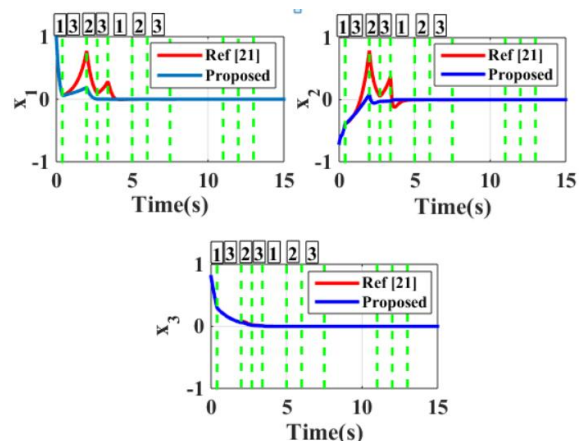
با استفاده از لم مکمل شور [۳] می‌توان نتیجه گرفت که ناتساوی (پ-۵) معادل ناتساوی (۱۷) است. حال، شرط پایداری را در افق پیش‌بین در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$v_{us,i,k}(k+L+1|k) - v_{us,i,k}(k+L|k) \leq r_{us} v_{us,i,k}(k+L|k) - o(k+L|k)^T o(k+L|k) + \gamma^2 \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) \quad (پ-۶)$$

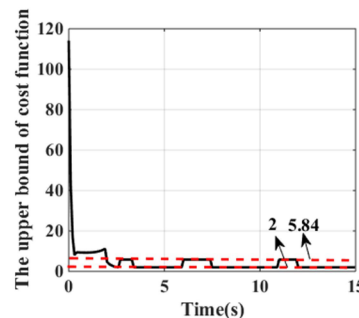
که:

در مرجع [۲۱] از تابع لیاپانوف کلیدزنی استفاده کرده است و دارای محدودیت محافظه‌کارانه اکیدا نزولی بودن روی انرژی سیستم است (بر خلاف شکل ۴). از این رو، در این طرح، زیرسیستم‌های پایدارناپذیر نادیده گرفته شده‌اند. بنابراین، با وارد شدن به یک زیرسیستم پایدارناپذیر، بهره‌ی کنترلی بر اساس زیرسیستم قبلی محاسبه می‌شود. در نتیجه، یا ممکن است عملکرد کنترل کننده نامطلوب شود و یا ممکن است مسئله بهینه‌سازی فاقد جواب گردد. شکل ۵ افت عملکرد را به خوبی نشان می‌دهد. همچنین، از شکل ۵ استنباط می‌شود که واگرایی سریع حالت‌ها ممکن است باعث خارج شدن مسئله بهینه‌سازی از ناحیه امکان‌پذیری شود و در نتیجه، مسأله فاقد جواب گردد. همچنین، جدول ۳ نتایج مقایسه طرح پیشنهادی با طرح موجود در مرجع [۲۱] را نشان می‌دهد. طبق این جدول، طرح پیشنهادی دارای مجذور میانگین مربعات خطای حالت کمتر و سرعت همگرایی بیشتر است.

شکل ۶ تغییرات حد بالای تابع هزینه را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه تابع لیاپانوف نهایتاً به سمت صفر همگرا می‌شود، حد بالای تابع هزینه در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر طبق رابطه (پ-۴) به سمت $2 = \gamma^2 \phi_{\max}^2$ و حد بالای تابع هزینه برای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر طبق رابطه (پ-۱) به سمت $5.84 = (1+r_{us})^p \gamma^2 \phi_{\max}^2$ همگرا می‌شوند. شکل ۷ تاثیر γ را روی عملکرد کنترل کننده نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، کاهش γ باعث بهبود دقت و سرعت همگرایی حالت‌های سیستم می‌شود.



شکل ۵- مقایسه طرح پیشنهادی با مرجع [۲۱]



شکل ۶- تغییرات حد بالای توابع هزینه

جدول ۳- نتایج مقایسه طرح پیشنهادی با مرجع [۲۱]

روش	مجدور میانگین مربعات خطای حالت‌ها	زمان همگرایی حالت‌ها (ثانیه)
طرح پیشنهادی	۰/۲۲	۳/۲
مرجع [۲۱]	۰/۱۰	۴/۲

$$\Delta v \leq (1+r_i)(\chi(k+L|k))^T \bar{A}_{s,i,k}^T P_{s,i,k} \bar{A}_{s,i,k} \chi(k+L|k) + (1+r_i)(\phi(k+L|k))^T W_i^T P_{s,i,k} W_i \phi(k+L|k) + (1+2r_i)\lambda_{s,i,k} \chi(k+L|k)^T \begin{bmatrix} I \\ F_{i,k} \end{bmatrix}^T \quad (پ۱۴-۱)$$

$$N_i^T N_i \begin{bmatrix} I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} \chi(k+L|k) + \chi(k+L|k)^T \bar{A}_{s,i,k}^T P_{s,i,k} \bar{A}_{s,i,k} \chi(k+L|k) + \phi(k+L|k)^T W_i^T P_{s,i,k} W_i \phi(k+L|k) - \chi(k+L|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+L|k)$$

با ترکیب روابط (پ۱-۱) و (پ۱۴-۱)، شرط پایداری در افق پیش‌بین در زیرسیستم‌های پایدارپذیر به صورت زیر توسعه می‌یابد:

$$(1+r_i)(\chi(k+L|k))^T \bar{A}_{s,i,k}^T P_{s,i,k} \bar{A}_{s,i,k} \chi(k+L|k) + (1+r_i)(\phi(k+L|k))^T W_i^T P_{s,i,k} W_i \phi(k+L|k) + (1+2r_i)\lambda_{s,i,k} \chi(k+L|k)^T \begin{bmatrix} I \\ F_{i,k} \end{bmatrix}^T N_i^T N_i \begin{bmatrix} I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} \chi(k+L|k) + \chi(k+L|k)^T \bar{A}_{s,i,k}^T P_{s,i,k} \bar{A}_{s,i,k} \chi(k+L|k) + \phi(k+L|k)^T W_i^T P_{s,i,k} W_i \phi(k+L|k) - \chi(k+L|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+L|k) + \chi(k+L|k)^T R_{1i}^T R_{1i} \chi(k+L|k) + \chi(k+L|k)^T F_{s,i,k}^T R_{2i}^T R_{2i} F_{s,i,k} \chi(k+L|k) - \gamma^2 \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) - r_s \chi(k+L|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+L|k) \leq 0 \quad (پ۱۵-۱)$$

رابطه (پ۱۵-۱) به صورت زیر به فرم ماتریسی بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{pmatrix} \chi(k+L|k) \\ \phi(k+L|k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(k+L|k) \\ \phi(k+L|k) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (پ۱۶-۱)$$

که:

$$T_{22} = -(1+r_i)W_i^T P_{s,i,k} W_i + \gamma^2 I, \quad T_{12} = T_{21}^T = -\bar{A}_{s,i,k}^T P_{s,i,k} W_i \quad (پ۱۷-۱)$$

واضح است که اگر $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه (پ۱۷-۱) نیز برقرار خواهد بود.

بنابراین، به دلیل محذب بودن عدم قطعیت چند وجهی در (۵)، قید (۱۸) تایید می‌شود.

تذکر ۴: شرط پایداری در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر بیان شده در (پ۱۶-۱) مشابه قبل استخراج شده و (۲۴) نیز تایید می‌شود. همچنین، با استفاده از لم مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت که ناتساوی $P_{s,i,k} \leq \lambda_{s,i,k} I$ معادل (۱۹) است.

قید تابع لیاپونوف در لحظات کلیدزنی (۲۰) و (۲۶): این قید از افزایش دلخواه توابع لیاپونوف در لحظه‌های کلیدزنی جلوگیری می‌کند و در لحظه شروع زیرسیستم‌های پایدارپذیر به صورت زیر توسعه می‌یابد:

$$v_{s,i,k}(\chi(k)) \leq \theta v_{j,k-1}(\chi(k)) \chi(k)^T P_{i,k} \chi(k) \leq \theta \chi(k)^T P_{j,k-1} \chi(k) \Rightarrow \chi(k)^T (\theta P_{j,k-1} - P_{i,k}) \chi(k) \geq 0 \quad (پ۱۸-۱)$$

بنابراین، رابطه (۲۰) استخراج می‌شود. به طور مشابه، رابطه (۲۶) نیز استخراج خواهد گردید.

قیدهای ورودی (۲۱) و (۲۷): این قیدها تضمین می‌کنند که مسأله بهینه سازی با فرض اشباع عملگرها حل می‌شود. با جمع کردن دو طرف رابطه (پ۱-۱) از $L=0$ تا $L=m$ و ساده‌سازی، خواهیم داشت:

$$\chi(k+m+1|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+m+1|k) \leq \chi(k|k)^T P_{s,i,k} \chi(k|k) + \gamma^2 \phi_{\max}^2 \Rightarrow \chi(k+m+1|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+m+1|k) \leq \theta_{s,i,k} \chi(k|k)^T P_{s,i,k} \chi(k|k) \quad (پ۱۹-۱)$$

$$v_{us,i,k}(k+L|k) = \chi(k+L|k)^T P_{us,i,k} \chi(k+L|k) \quad (پ۷-۱)$$

با جمع کردن دو طرف رابطه (پ۶-۱) از $L=0$ تا $L=l_p$ ، استفاده از رابطه (۱۰) و ساده‌سازی، خواهیم داشت:

$$v_{us,i,k}(k+l_p+1|k) - v_{us,i,k}(k|k) \leq r_{us} \sum_{L=0}^{l_p} v_{us,i,k}(k+L|k) - \sum_{L=0}^{l_p} [\sigma(k+L|k)^T \sigma(k+L|k)] + \gamma^2 \sum_{L=0}^{l_p} \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) \quad (پ۸-۱)$$

$$\Rightarrow J_{us,i,k} \leq v_{us,i,k}(k|k) + r_{us} \sum_{L=0}^{l_p} v_{us,i,k}(k+L|k) + \gamma^2 \sum_{L=0}^{l_p} \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) \quad (پ۹-۱)$$

با استفاده از (پ۶-۱)، (پ۹-۱) به صورت زیر گسترش می‌یابد:

$$J_{us,i,k} \leq v_{us,i,k}(k|k) + (r_{us} + r_{us}(1+r_{us}) + \dots + r_{us}(1+r_{us})^{l_p}) v_{us,i,k}(k|k) + (r_{us} + r_{us}(1+r_{us}) + \dots + r_{us}(1+r_{us})^{l_p-1}) \gamma^2 \phi(k|k)^T \phi(k|k) + (r_{us} + r_{us}(1+r_{us}) + \dots + r_{us}(1+r_{us})^{l_p-2}) \gamma^2 \phi(k+1|k)^T \phi(k+1|k) + \dots + r_{us} \gamma^2 \phi(k+l_p-1|k)^T \phi(k+l_p-1|k) + \gamma^2 \sum_{L=0}^{l_p} \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k) \quad (پ۱۰-۱)$$

با استفاده از رابطه جمع مولفه‌ها در دنباله‌های هندسی [۵] و [۵]، ناتساوی زیر به دست می‌آید:

$$J_{us,i,k} \leq (1+r_{us})^{l_p} \chi(k|k)^T P_{us,i,k} \chi(k|k) + (1+\xi_{us})^{l_p-1} \gamma^2 \phi_{\max}^2 \quad (پ۱۱-۱)$$

مشابه روش قبل، خواهیم داشت:

$$(1+r_{us})^{l_p} \chi(k|k)^T P_{us,i,k} \chi(k|k) + (1+r_{us})^{l_p-1} \gamma^2 \phi_{\max}^2 \leq \theta_{us,i,k} \Rightarrow \theta_{us,i,k} - \left(\frac{\chi(k|k)^T}{\gamma^2 \phi_{\max}^2} \right) \begin{pmatrix} (1+r_{us})^{-l_p} & 0 \\ P_{us,i,k}^{-1} & (1+r_{us})^{1-l_p} \\ 0 & \gamma^2 \phi_{\max}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \chi(k|k) \\ \gamma^2 \phi_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (پ۱۲-۱)$$

با استفاده از لم مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت که (پ۱۲-۱) معادل (۲۳) است.

قیدهای شرط‌های پایداری (۱۸) و (۱۹) و (۲۴) و (۲۵): در اینجا، قیدهای (۱۸) و (۱۹) و (۲۴) به گونه‌ای استخراج می‌شوند که تضمین کننده نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر و پایدارناپذیر بر اساس شرط‌های پایداری در افق پیش‌بین (پ۱-۱) و (پ۶-۱) باشند. با توسعه تغییر تابع کاندید لیاپونوف (۲۵) در امتداد مسیر حالت‌های سیستم حلقه بسته در زیرسیستم‌های پایدارپذیر، روابط زیر استخراج می‌گردند:

$$\Delta v = v_{s,i,k}(k+L+1|k) - v_{s,i,k}(k+1|k) = (\bar{A}_{i,k} \chi(k+L|k) + n_i + W_i \phi(k+L|k))^T P_{s,i,k} (\bar{A}_{i,k} \chi(k+L|k) + n_i + W_i \phi(k+L|k)) - \chi(k+L|k)^T P_{s,i,k} \chi(k+L|k) \quad (پ۱۳-۱)$$

به کمک لم ۲، اعمال ناتساوی $P_{s,i,k} \leq \lambda_{s,i,k} I$ و در نظر گرفتن رابطه (۱۲) و فرض ۱، رابطه زیر برقرار می‌شود:

بنابراین، $(\mathcal{Q}_{S,i,k}, \mathbf{P}_{S,i,k})$ یک پاسخ غیربهبینه و $(\mathcal{Q}_{S,i,k+1}, \mathbf{P}_{S,i,k+1})$ یک پاسخ بهینه مسأله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ است $(\mathcal{Q}_{S,i,k+1} \leq \mathcal{Q}_{S,i,k})$ ، بر این اساس، رابطه (پ ۲۵-۱) دوباره تایید می‌شود. به طور مشابه، رابطه زیر برای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر استخراج می‌شود:

$$v_i(\chi(k+1)) \leq (1+r_{us})v_i(\chi(k)) - \mathbf{o}(k)^T \mathbf{o}(k) + \gamma^2 \phi(k)^T \phi(k) \quad (\text{پ ۲۷-۱})$$

مشاهده می‌شود که (پ ۲۵-۱) و (پ ۲۷-۱) شرایط پایداری در افق زمانی واقعی را تایید می‌کنند.

- طراحی سیگنال کلیدزنی و تضمین عملکرد H^∞ : با تعریف $\sigma(k_{s_{p+1}}) = n$

$$r = \begin{cases} r_s & i \in M_s \\ r_{us} & i \in M_{us} \end{cases} \quad \text{و} \quad \sigma(k_{s_p}) = m, \quad (\text{پ ۱-۱})$$

(پ ۲۵-۱) و (پ ۲۷-۱)، رابطه بین توابع لیاپانوف در دو مرحله متوالی در پنجره p با فرض $\phi(k) \equiv 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_n(\chi(k_{s_{p+1}})) &\leq \theta v \sigma(k_{s_{p+1}})(\chi(k_{s_{p+1}})), \\ v \sigma(k_{s_{p+1}})(\chi(k_{s_{p+1}})) &\leq (1+r)v \sigma(k_{s_{p+1}}) \\ (\chi(k_{s_{p+1}}-1)) &\Rightarrow v_n(\chi(k_{s_{p+1}})) \\ &\leq \theta(1+r)v \sigma(k_{s_{p+1}})(\chi(k_{s_{p+1}}-1)) \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۸-۱})$$

به همین ترتیب، رابطه بین توابع لیاپانوف در یک زیر سیستم پایدارناپذیر یا پایدارناپذیر در پنجره p به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_n(\chi(k_{s_{p+1}})) &\leq \theta(1+r)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}-1}} \\ v \sigma(k_{s_{p+1}})(\chi(k_{s_{p+1}})) &\end{aligned} \quad (\text{پ ۲۹-۱})$$

بر اساس تعریف ۱ و با استفاده از روابط (۷) و (پ ۲۹-۱)، رابطه بین توابع لیاپانوف در کل بازه زمانی پنجره p به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_n(\chi(k_{s_{p+1}})) &\leq \theta^{N(k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+1}})} (1+r)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}}} \\ v \sigma(k_{s_{p+1}})(\chi(k_{s_{p+1}})) &\Rightarrow v_n(\chi(k_{s_{p+1}})) \leq \\ \theta^{N(k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+1}})+1} &(1+r)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}}} (1+r)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}}} \\ v_m(\chi(k_{s_p})) &\Rightarrow v_n(\chi(k_{s_p})) \leq \theta^{l_{r_{sw}}+1} (1+r_s)^{l_{\tau}} \\ (1+r_s)^{l_{\min}} &(1+r_{us})^{l_{\max}} v_m(\chi(k_{s_p})) \Rightarrow v_n(\chi(k_{s_p})) \\ &\leq e^{(l_{r_{sw}}+1)\ln\theta + l_{\tau}\ln(1+r_s) + l_{\min}\ln(1+r_s) + l_{\max}\ln(1+r_{us})} \\ v_m(\chi(k_{s_p})) &\end{aligned} \quad (\text{پ ۳۰-۱})$$

برای اینکه تابع لیاپانوف در پنجره p کاهش‌ی باشد، باید ناتساوی زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} \kappa = e^{(l_{r_{sw}}+1)\ln\theta + l_{\tau}\ln(1+r_s) + l_{\min}\ln(1+r_s) + l_{\max}\ln(1+r_{us})} \\ < 1 \Rightarrow l_{\tau} > l_{\tau}^* = \\ \frac{(l_{r_{sw}}+1)\ln\theta + l_{\min}\ln(1+r_s) + l_{\max}\ln(1+r_{us})}{-\ln(1+r_s)} \end{aligned} \quad (\text{پ ۳۱-۱})$$

حال، اگر بازه زمانی از p پنجره تشکیل شده باشد، تغییر تابع لیاپانوف به صورت زیر خواهد بود:

$$v_n(\chi(k_{s_{p+1}})) \leq \kappa^P v \sigma(k_{s_1})(\chi(k_{s_1})) \quad (\text{پ ۳۲-۱})$$

با فرض $k_{s_1} = k_0$ و $k \in [k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+2}}]$ و با استفاده از روابط (پ ۱-۱)، (پ ۲۵-۱) و (پ ۲۷-۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v \sigma(k)(\chi(k)) &\leq \theta^{l_{r_{sw}}+1} (1+r_{us})^{l_{\max}} \kappa^P v \sigma(k_0)(\chi(k_0)) \\ \Rightarrow \|\chi(k)\| &\leq \kappa_1^{-1} (\theta^{l_{r_{sw}}+1} (1+r_{us})^{l_{\max}} \kappa^P \kappa_2 \|\chi(k_0)\|) \\ \Rightarrow \|\chi(k)\| &\leq \kappa_3 \|\chi(k_0)\| \end{aligned} \quad (\text{پ ۳۳-۱})$$

که $\kappa_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{P}_{\sigma(k)}) \|\chi(k_0)\|^2$ و $\kappa_1 = \lambda_{\min}(\mathbf{P}_{\sigma(k)}) \|\chi(k)\|^2$ بنابراین، تعریف ۲ برقرار خواهد بود. در ادامه با تعریف $\Gamma(k) = \mathbf{o}(k)^T \mathbf{o}(k) - \gamma^2 \phi(k)^T \phi(k)$

از طرف دیگر، در زیر سیستم‌های پایدارناپذیر، ناتساوی زیر از روابط (پ ۱-۱) و (پ ۱۱-۱) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_{us,i,k}(k+m+1|k) &\leq v_{us,i,k}(k|k) + r_{us} \sum_{L=0}^m [v_{us,i,k} \\ &+ \gamma^2 \sum_{L=0}^m \phi(k+L|k)^T \phi(k+L|k)] \leq \mathcal{Q}_{us,i,k} \\ &\Rightarrow \chi(k+m+1|k)^T \mathbf{P}_{us,i,k} \chi(k+m+1|k) \leq \mathcal{Q}_{us,i,k} \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۰-۱})$$

بردار V^e را به عنوان بردار پایه e -ام کانونیکال R^n در نظر بگیرید. با استفاده از (۱۱)، (۱۳) و (پ ۱-۱)، (۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{u}_{S,i,k}^e(k+L|k) \right|^2 &= \left| (\mathbf{F}_{S,i,k} \chi(k+L|k))_e \right|^2 = \\ \left| (\mathbf{F}_{S,i,k} \mathbf{P}_{S,i,k}^{-0.5} \mathbf{P}_{S,i,k}^{0.5} \chi(k+L|k))_e \right|^2 &\leq \\ \mathcal{Q}_{S,i,k} \left| (\mathbf{F}_{S,i,k} \mathbf{P}_{S,i,k}^{-\frac{1}{2}})_e \right|^2 &= \mathcal{Q}_{S,i,k} V^e T \mathbf{F}_{S,i,k} \\ \mathbf{P}_{S,i,k}^{-1} \mathbf{F}_{S,i,k}^T V^e \leq u_{e,\max}^2 &\end{aligned} \quad (\text{پ ۲۱-۱})$$

بنابراین، به کمک مکمل شور، (۲۱) تایید می‌شود. به طور مشابه در زیرسیستم‌های پایدارناپذیر، با استفاده از (۱۲)، (۱۴) و (پ ۲۰-۱)، قید (۲۷) تایید می‌شود.

- شرایط پایداری در افق زمانی واقعی (بدون پیش‌بینی): پیش از این، شرایط پایداری (پ ۱-۱) و (پ ۱-۶) در افق زمانی پیش‌بینی اثبات شده بود. در اینجا لازم است این شرایط در افق زمانی واقعی برای طراحی سیگنال کلیدزنی و تضمین عملکرد H^∞ بررسی شود. فرض کنید که پاسخ‌های بهینه در مراحل k و $k+1$ در زیر سیستم پایدارناپذیر i به ترتیب با $(\mathcal{Q}_{S,i,k}, \mathbf{P}_{S,i,k})$ و $(\mathcal{Q}_{S,i,k+1}, \mathbf{P}_{S,i,k+1})$ نشان داده شوند. با قرار دادن $m=0$ در (پ ۱۹-۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{S,i,k}(k+1|k) &= \chi(k+1|k)^T \mathbf{P}_{S,i,k}^{-1} \\ \chi(k+1|k) &\leq \mathcal{Q}_{S,i,k} \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۲-۱})$$

همچنین، با توجه به (پ ۱-۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{S,i,k}(k+1|k+1) &= \chi(k+1|k+1)^T \mathbf{P}_{S,i,k+1}^{-1} \\ \chi(k+1|k+1) &\leq \mathcal{Q}_{S,i,k+1} - \gamma^2 \phi_{\max} \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۳-۱})$$

با توجه به (پ ۲۲-۱) و (پ ۲۳-۱)، استنتاج می‌شود که اگر $(\mathcal{Q}_{S,i,k}, \mathbf{P}_{S,i,k})$ یک پاسخ مسأله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{S,i,k}(k+1|k) &= \chi(k+1|k)^T \mathbf{P}_{S,i,k} \chi(k+1|k) \\ &\leq \mathcal{Q}_{S,i,k} - \gamma^2 \phi_{\max} \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۴-۱})$$

در نتیجه، $(\mathcal{Q}_{S,i,k}, \mathbf{P}_{S,i,k})$ یک پاسخ غیربهبینه و $(\mathcal{Q}_{S,i,k+1}, \mathbf{P}_{S,i,k+1})$ یک پاسخ بهینه مسئله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ است $(\mathcal{Q}_{S,i,k+1} \leq \mathcal{Q}_{S,i,k})$ ، بنابراین، رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} v_{S,i,k+1}(k+1|k+1) &\leq v_{S,i,k}(k+1|k) \Rightarrow v_{S,i,k+1} \\ (k+1|k+1) &\leq (1+r_s)v_{S,i,k}(k|k) - \mathbf{o}(k|k)^T \\ \mathbf{o}(k|k) + \gamma^2 \phi(k|k)^T \phi(k|k) &\Rightarrow v_i(\chi(k+1)) \\ &\leq (1+r_s)v_i(\chi(k)) - \mathbf{o}(k)^T \mathbf{o}(k) + \gamma^2 \phi(k)^T \phi(k) \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۵-۱})$$

از سوی دیگر، اگر $(\mathcal{Q}_{S,i,k}, \mathbf{P}_{S,i,k})$ یک پاسخ مسأله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ نباشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{S,i,k}(k+1|k) &= \chi(k+1|k)^T \mathbf{P}_{S,i,k} \chi(k+1|k) \\ &\leq \mathcal{Q}_{S,i,k} - \gamma^2 \phi_{\max} \quad (\mathcal{Q}_{S,i,k} < \mathcal{Q}_{S,i,k}') \end{aligned} \quad (\text{پ ۲۶-۱})$$

- [۸] H. Sun and S. Ge, "Switched Linear Systems", Springer, 2005.
- [۹] S. Shi, Z. Shi and Z. Fei, "Asynchronous control for switched systems by using persistent dwell time modeling", *Systems & Control Letters*, vol. 133, pp.104523, 2019.
- [۱۰] Y. Fan, M. Wang, G. Sun, W. Yi and G. Liu, "Quasi-time-dependent robust H_∞ static output feedback control for uncertain discrete-time switched systems with mode-dependent persistent dwell-time", *Journal of the Franklin Ins.*, vol. 357, no. 15, pp. 10329-10352, 2020.
- [۱۱] A. Ladel, A. Benzaouia, R. Outbib and M. Ouladsine, "Robust fault tolerant control of continuous-time switched systems: An LMI approach", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 39, pp. 100950, 2021.
- [۱۲] Z. Huang, J. Xia, X. Chen, H. Shen and J. Wang, "Adaptive Tracking Control for Persistent Dwell-Time Switched Nonlinear Systems with Uncertainty", *IEEE Access* 7, pp.109924-109933, 2019.
- [۱۳] W. Wu, S. Tong and Y. Li, "Fuzzy adaptive tracking control for switched nonlinear systems with full time-varying state constraints", *Neurocomputing*, vol. 352, pp.1-11, 2019.
- [۱۴] محسن قلعه نونی، محمدرضا اکبرزاده توتونچی و ناصر پریز، «پایدارسازی محلی کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای با محدودیت نرم سیگنال کنترل: رویکرد نامساوی‌های ماتریسی»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۹، شماره ۴، صفحه ۱۷۹۳-۱۷۸۱.
- [۱۵] مریم بلوچ زاده، علی کریم پور و ناصر پریز، «کنترل زیربینه سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی نامعین»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۵۰، شماره ۴، صفحه ۱۹۰۹-۱۹۱۸.
- [۱۶] M. Müller, P. Martius and F. Allgöwer, "Model predictive control of switched nonlinear systems under average dwell-time", *Journal of Process Control*, vol. 22, no. 9, pp.1702-1710, 2012.
- [۱۷] M. Aminsafae and M. Shafiei, "Stabilization of uncertain nonlinear discrete-time switched systems with state delays: A constrained robust model predictive control approach", *Journal of Vibration and Control*, vol. 25, no. 14, pp. 2079-2090, 2019.
- [۱۸] A. Taghieh and M. Shafiei, "Observer-based robust model predictive control of switched nonlinear systems with time delay and parametric uncertainties", *Journal of Vibration and Control*, 2021.
- [۱۹] C. Yuan, Y. Gu, W. Zeng and P. Stegagno, "Switching Model Predictive Control of Switched Linear Systems with Average Dwell Time", In 2020 American Control Conference, Denver, USA, pp. 2888-2893, 2020.
- [۲۰] Y. Qi, W. Yu, J. Huang and Y. Yu, "Model predictive control for switched systems with a novel mixed time/event-triggering mechanism", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 42, pp. 101081, 2022.
- [۲۱] Y. Ma, and X. Hui, "Design of a new model predictive control for Lipschitz non-linear delayed switched systems with application to water pollution system", *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*, pp. 1-10, 2023.
- [۲۲] H. Zhao, H. Yang, Z. Wang, and H. Li, "Nonlinear switched model predictive control with multiple Lyapunov functions for trajectory tracking and obstacle avoidance of nonholonomic systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023.
- [۲۳] L. Jia, Y. Li, J. Du, S. Yuan, "Robust L_2/L_∞ control for uncertain singular systems with time varying delay", *Prog Nat Sci*, vol. 18, no. 8, pp. 1015-21, 2008.

داشته باشد. بنابراین، رتبه کامل است [۶]. با توسعه $Y_{s,i,k}^T (H_{s,i,k} - Y_{s,i,k})^{-1} (H_{s,i,k} - Y_{s,i,k}) \geq 0$ خواهیم داشت: $Y_{s,i,k}^T H_{s,i,k}^{-1} Y_{s,i,k} \geq Y_{s,i,k} + Y_{s,i,k}^T - H_{s,i,k}$ ، بنابراین، اگر قید (۳۶) برقرار باشد، آنگاه (۲-۴) برقرار است. به طور مشابه، قید (۴۲) را می‌توان از ناتساوی (۲۴) استنتاج کرد. در ادامه، ناتساوی‌های (۱۹) و (۲۵) به کمک لم مکمل شور به قیود (۳۷) و (۴۳) تبدیل می‌شوند. در ادامه، با اعمال تغییر متغیرها، ناتساوی (۱-۱۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g_{s,i,k}^{-1} \theta_{v,j,k-1}(\chi(k)) - \chi^T(k) H_{s,i,k}^{-1} \chi(k) \geq 0 \quad (۵-۲)$$

بنابراین، قید (۳۸) را می‌توان با اعمال لم مکمل شور نتیجه گرفت. به طور مشابه، قید (۴۴) به دست می‌آید. همچنین، قید (۳۹) را می‌توان با گسترش ناتساوی (۲۱) به صورت زیر تأیید کرد:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_{s,i,k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & V^e F_{s,i,k} \\ * & H_{s,i,k}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_{s,i,k} \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & V^e L_{s,i,k} \\ * & Y_{s,i,k}^T H_{s,i,k}^{-1} Y_{s,i,k} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (۶-۲)$$

بر اساس این واقعیت که $Y_{s,i,k}^T H_{s,i,k}^{-1} Y_{s,i,k} \geq Y_{s,i,k} + Y_{s,i,k}^T - H_{s,i,k}$ ، اگر قید (۳۹) برقرار باشد، آنگاه (۲-۶) برقرار است. به طور مشابه، قید (۴۵) استخراج گردیده و اثبات قضیه ۲ تکمیل می‌شود.

مراجع

- [۱] Z. Sun and S. Ge S, "Stability Theory of Switched Dynamical Systems", Springer, 2005.
- [۲] H. Yang, B. Jiang and V. Cocquemot, "A survey of results and perspectives on stabilization of switched nonlinear systems with unstable modes", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* vol.13, pp. 45-60, 2014.
- [۳] S. Ebadollahi and S. Saki, "Wind turbine torque oscillation reduction using soft switching multiple model predictive control based on the gap metric and Kalman filter estimator", *IEEE Transactions on Industrial Electronics* vol. 65 no. 5, pp. 3890-3898, 2017.
- [۴] Saki S and Bolandi H, "Optimal direct adaptive soft switching multi-model predictive control using the gap metric for spacecraft attitude control in a wide range of operating points", *Aerospace Science and Technology* vol. 77, pp. 235-243 2018.
- [۵] I. Nodozi and M. Rahmani M, "LMI-based model predictive control for switched nonlinear system", *Journal of Process Control*, vol. 59 pp. 49-58, 2017.
- [۶] M. Benallouch, G. Schutz, D. Fiorelli and M. Boutayeb, " H_∞ model predictive control for discrete-time switched linear systems with application to drinking water supply network", *Journal of Process Control*, vol. 24, no. 6, pp. 924-938, 2014.
- [۷] H. Lin and P. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results", *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 45 no. 2, pp. 308-322, 2009.