

A neuro-adaptive approach to near-optimal controller design for a class of constrained systems

S. RadMoghdam, M. Farrokhi*

School of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.
E-mails: s_radmoghaddam@elec.iust.ac.ir; farrokhi@iust.ac.ir

Short Abstract

This paper proposes a controller capable of satisfying the output constraints while providing a near-optimal performance. The method is designed for square nonlinear systems with stable internal dynamics. To this end, using a primary performance index and Taylor approximation, the problem is approximated by a constrained programming, whose constraints are written with the aid of Control Barrier Function (CBF) to ensure the output restrictions. As a result, a constrained near-optimal performance without encountering difficulties in Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations is obtained. In order to overcome the model uncertainties, which appear in the optimization problem, an adaptive structure is formulated. The online solution of the constrained optimization is obtained using a Projection Recurrent Neural Network (PRNN). As a result, a closed-form solution is provided that can be simply implemented without requiring additional solvers or toolboxes. Stability of the proposed method and constraints satisfaction are addressed thoroughly. Finally, effectiveness of the proposed method in realizing the aforementioned aims are illustrated through simulations on trajectory control of a surface vessel system and a comparative study on the constrained stabilization of a pendulum. The first simulation example shows the effectiveness of the method in constrained tracking, while the second example confirms the proper performance of the controller in stabilization and regulation applications.

Keywords

Near-optimal control, constrained control, control barrier function, adaptive model, recurrent neural network.

Short Introduction

The classical way of achieving optimal control law passes through the well-known Hamilton Jacobi Bellman (HJB) equation. However, since a general solution of HJB for uncertain and nonlinear systems is unattainable, many researches have focused on approximately-optimal methods among which Adaptive Dynamic Programming (ADP), Model Predictive Control (MPC) and Taylor expansion-based near-optimal approach have been addressed considerably. Despite promising developments, aforementioned methods are still involved with one or some of the challenges such as constraint satisfaction, complex structure, computational inefficiency, discrete-time modeling issues and being restricted to the stabilization problem. Moreover, many researches have been proposed regardless of model uncertainties and are not robust consequently.

Proposed Work and Methodology (including comparison, simulation/experimental results and discussion)

In order to tackle the aforementioned issues, this paper proposes a constrained near-optimal methodology. Taylor's expansion and Control Barrier Function are employed to approximate the main problem in the form a constrained finite-dimensional optimization with the control signal as decision variable. Furthermore, an adaptive structure is embedded to update the model and compensate for uncertainties. Desirable robustness and dealing with state-dependent constraints make the proposed method advantageous over the most relevant papers. Design complexity is drastically less than majority of the literature specially ADP methods due to the lack of actor-critic network difficulties. Online solution of the optimization is obtained using a PRNN that provides an explicit control law as a result of which, a straightforward continuous-time analysis along with ease of implementation are provided.

Conclusion

In this paper, the primal infinite-dimensional problem was first rewritten as a constrained convex programming using approximations and CBF. Satisfaction of the constraints using the control signal obtained from this problem was ensured analytically. Following a theoretical procedure, the PRNN's mathematical equations were established to provide the online solution of the problem of interest. The closed-loop structure was enhanced with an adaptive model to estimate uncertainties. Regarding the convergence of the PRNN and its provided closed-form control law, the closed-loop stability was proved analytically. Simplicity of the algorithm and its implementation were concluded in consequence. Simulating the object-avoided trajectory control of a surface vessel illustrated the effectiveness of the proposed method in achieving desirable performance while predetermined object regions were avoided successfully. In the end, superiority of the proposed control methodology over an advanced Constrained Adaptive Dynamic Programming (CADP) approach in constrained stabilization of a pendulum was shown through further simulations.

References (2-3 references)

- 1- Y. Zhang, S. Li, L. Liao, "Near-optimal control of nonlinear dynamical systems: a brief survey", *Annual Reviews in Control*, vol. 47, pp. 71-80, 2019.
- 2- Q. Y. Fan, G. H. Yang, "Adaptive nearly optimal control for a class of continuous-time nonaffine nonlinear systems with inequality constraints", *ISA Transactions*, vol. 66, pp. 122-133, 2017.

رویکردی عصبی-تطبیقی در طراحی کنترل کننده نزدیک به بهینه برای کلاسی از سیستم‌های مقید

سورنا رادمقدم

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

محمد فرخی

استاد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

این مقاله به طراحی کنترل کننده‌ای می‌پردازد که ضمن دستیابی به عملکردی نزدیک به بهینه، قابلیت برآورده‌سازی قیده‌های خروجی را دارا باشد. این روش برای سیستم‌های غیرخطی مربعی با دینامیک داخلی پایدار طراحی می‌شود. برای این منظور، با استفاده از شاخص عملکرد اولیه و تقریب تیلور، مساله به صورت برنامه‌ریزی مقید تقریب زده می‌شود که قیده‌های آن، به کمک تابع مانع کنترل برای برآورده‌سازی محدودیت‌های خروجی نوشته می‌شوند. بدین ترتیب، عملکردی نزدیک به بهینه و مقید، بدون برخورد به معادلات پیچیده همیلتون-ژاکوبی-بلمن به دست می‌آید. به منظور مقابله با نامعینی‌های مدل که در مساله بهینه‌سازی ظاهر می‌شود، ساختاری تطبیقی طراحی می‌شود. حل به‌نگام بهینه‌سازی مقید نیز به وسیله شبکه عصبی بازگشتی تصویر صورت می‌گیرد. این امر منجر به دستیابی به پاسخی بسته می‌شود که سادگی پیاده‌سازی بدون نیاز به استفاده از محاسبه‌گرها و جعبه‌ابزارهای اضافی را به همراه دارد. پایداری سیستم حلقه‌بسته و برآوردگی قیده‌ها به طور دقیق تحلیل شده‌اند. در انتها نیز کارایی روش ارائه شده در تحقق اهداف یادشده با بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی کنترل مسیر کشتی و تحلیلی مقایسه‌ای از پایداری مقید آونگ نشان داده شده است. مثال شبیه‌سازی اول، کارایی روش را در ردیابی مقید نشان می‌دهد و مثال شبیه‌سازی دوم، موید عملکرد مناسب کنترل کننده در کاربردهای پایداری و تنظیم است.

کلمات کلیدی

کنترل نزدیک به بهینه، کنترل مقید، تابع مانع کنترل، مدل تطبیقی، شبکه عصبی بازگشتی.

نام نویسنده مسئول: دکتر محمد فرخی

ایمیل نویسنده مسئول: farrokhi@iust.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۰۹

تاریخ(های) اصلاح مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۱/۰۵

۱- مقدمه

روبنگر-نقاد با جبران اشباع عملگر [۴] از دیگر موارد قابل اشاره هستند. کنترل کننده تقریباً بهینه رویداد تحریک^۲ متشکل از شبکه نقاد تطبیقی، روشی داده-محور و قابل توجه است که در سال‌های اخیر ارائه شده [۵]. اگرچه روش‌های ADP زیادی برای سیستم‌های ورودی-کراندار طراحی شده‌اند، ولی مراجع محدودتری قیده‌های حالت و خروجی را لحاظ کرده‌اند که از میان آن‌ها می‌توان به [۶] و [۷] اشاره کرد.

کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل (MPC)^۴ روش دیگری است که در زمره روش‌های نزدیک به بهینه^۵ یا تقریباً بهینه قرار می‌گیرد [۸]. این کنترل کننده‌ی افق بازگشتی که عمدتاً در حوزه زمان گسسته طراحی می‌شود، توالی کنترلی را از طریق بهینه‌سازی تابع معیار در افق‌های آینده محاسبه می‌کند. از مزیت‌های MPC قابلیت لحاظ کردن قیده‌های حالت همراه با تضمین برآورده شدن آن‌هاست که در روش‌های ADP امری دشوار و گاهی ناممکن است. با وجود تنوع و عملکرد مناسب، این روش‌ها بعضاً پیچیدگی طراحی، بار محاسباتی بالا و مسائل مربوط به گسسته‌سازی مدل را به همراه دارند. از زیرشاخه‌های این نوع کنترل کننده‌ها می‌توان به MPC مقاوم [۹]، MPC مبتنی بر لوله (tube) [۱۰]، MPC رویداد تحریک [۱۱] و MPC صریح [۱۲] اشاره کرد.

روش کلاسیک دستیابی به قانون بهینه از حل معادله (HJB)^۱ حاصل می‌شود. از آن‌جا که یافتن حل عمومی این معادله برای سیستم‌های غیرخطی و نامعین دور از دسترس است، پژوهش‌های بسیاری توجه خود را به یافتن راه حل‌های تقریبی و کارآمد معطوف نموده‌اند. روش‌های کنترل بهینه تقریبی، از جنبه‌های گوناگونی قابل دسته‌بندی هستند که در ادامه به اختصار به آن پرداخته می‌شود. دسته قابل توجهی از روش‌های تقریباً بهینه از حل تقریبی معادلات HJB توسعه داده شده‌اند. جدا از الگوریتم‌های عددی، تکرار شونده و برون خط (offline)، روش برخط (online) برنامه‌ریزی پویای تطبیقی (ADP)^۲ به طور گسترده مورد توجه بوده است. در این نوع کنترل کننده‌ها، از شبکه‌های تطبیقی نقاد (critic)، بازیگر (actor) و مدل به ترتیب برای تقریب تابع هزینه، تقریب سیگنال کنترل و مدل‌سازی سیستم استفاده می‌شود [۱]. در این ساختار، تطبیق وزن‌های نقاد و بازیگر به منظور برآورده‌سازی معادله HJB توسعه داده شده‌اند. در [۲] ردیابی بهینه مقاوم برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی، تنها با تطبیق شبکه نقاد بررسی شده است. ساختار بازیگر-نقاد مقاوم [۳] و

^۴ Model Predictive Control

^۵ Near-optimal

^۱ Hamilton Jacobi Bellman

^۲ Adaptive Dynamic Programming

^۳ Event-triggered

- طراحی و تحلیل حلقه‌بسته در فضای زمان پیوسته و بدون نیاز به گسسته-سازی مدل انجام می‌گیرد. همچنین در مقام مقایسه با برخی روش‌های MPC پیشرفته، بار محاسباتی کمتر و طراحی ساده‌تری دارد.
- به دلیل بهره‌گیری از مدلی تطبیقی، وابستگی به مدل واقعی سیستم به میزان زیادی کاهش یافته است. علاوه بر این، قوانین تطبیقی یادشده در راستای همگرایی خطای پیش‌بینی مدل به مقدار صفر تعیین گردیده‌است. همچنین، نامعینی‌های موجود در مدل سیستم، در تابع هزینه و قیدهای مساله بهینه‌سازی مقید مقاله ظاهر می‌شود. از این‌رو، از مدل تطبیقی طراحی‌شده به‌عنوان جایگزینی تقریبی برای نامعینی‌های موجود در قیدها و تابع هزینه استفاده می‌شود.
- شبکه عصبی بازگشتی مورد استفاده، پایدار و همگرا به پاسخ بهینه مقید است. خانواده شبکه‌های بازگشتی تصویر در مراجع کنترلی دیگر همچون [۲۷] و [۲۸] به‌عنوان بهینه‌ساز در الگوریتم کنترل استفاده شده‌اند. با این وجود، در روش پیشنهادی این مقاله، شبکه عصبی علاوه بر این‌که به حل برخط مساله بهینه‌سازی مقید می‌پردازد، ویژگی تحلیلی نیز دارد. در واقع، معادله خروجی این شبکه قانونی صریح از سیگنال کنترل برحسب حالت‌های سیستم و شبکه عصبی ارائه می‌دهد که از آن در بخش ۴ مستقیماً به منظور تشکیل معادله سیستم حلقه‌بسته و تحلیل پایداری لیاپانوف بهره برده می‌شود. مجموعه این ویژگی‌ها سادگی تحلیل حلقه‌بسته و سهولت پیاده‌سازی در پردازنده‌های مختلف بدون نیاز به به‌کارگیری جعبه‌ابزارها و کتابخانه‌های نرم‌افزاری اضافی را فراهم می‌آورد.

۲- طرح مساله

سیستم با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند. با فرض این‌که $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]^T$ بردار درجه نسبی سیستم باشد، برای هر $i \in \{1, \dots, m\}$ داریم:

$$y_i^{r_i}(t) = L_f^{r_i} y_i(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r_i-1} y_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (2)$$

که در آن $L_f^{r_i} y_i(\mathbf{x})$ نشان‌دهنده مشتق لی از مرتبه r_i تابع $y_i(\mathbf{x})$ در راستای بردار \mathbf{f} است. فرض کنید

$$\bar{\mathbf{Y}}_i^T(t) = [y_i(t) \ \dots \ y_i^{(r_i-1)}(t)] \quad (3)$$

با توجه به معادلات (۱) تا (۳) و در نظر گرفتن بردار متغیرهای خارجی به صورت $\bar{\mathbf{Y}}(t) = [\bar{\mathbf{Y}}_1^T(t) \ \dots \ \bar{\mathbf{Y}}_m^T(t)]^T$ و بردار متغیرهای داخلی با $\boldsymbol{\eta}(t)$ ، دینامیک سیستم برای به شکل زیر قابل تبدیل است:

$$\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_i(t) = \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{Y}}_i(t) + \mathbf{B}_i (L_f^{r_i} y_i(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r_i-1} y_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t)), \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\omega}(\bar{\mathbf{Y}}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) \quad (5)$$

که در آن

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(r_i-1) \times 1} & \mathbf{I}_{r_i-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(r_i-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

روش‌های مبتنی بر بسط تیلور دسته دیگری از کنترل‌کننده‌های نزدیک به بهینه را تشکیل می‌دهند که در آن‌ها شاخص عملکرد انتگرالی به کمک تقریب تیلور به تابع هزینه ابعاد-محدود تبدیل می‌شود. از مزایای این روش‌ها می‌توان به سادگی طراحی، بار محاسباتی کمتر و ارائه فرمی بسته از قانون بهینه اشاره کرد. عدم نیاز به حل معادلات HJB و متعاقباً عدم نیاز به شبکه‌های بازیگر و نقاد به همراه طراحی و تحلیل در حوزه زمان پیوسته از دیگر ویژگی‌های این نوع کنترل‌کننده‌ها می‌باشد. مراجع [۱۳] و [۱۴] نوعی از این کنترل‌کننده را به ترتیب برای سیستم‌های تک‌متغیره (SISO) و چندمتغیره (MIMO) طراحی کرده‌اند. به دلیل استفاده از شاخص اولیه انتگرالی و ارائه قانون کنترل به فرم بسته، برخی مراجع این روش‌ها را در زیرمجموعه MPC یا MPC صریح قرار داده‌اند [۱۵-۱۷]. مراجع [۱۸] و [۱۹] رویکردی تطبیقی برای بازسازی دینامیک سیستم در کنترل نزدیک به بهینه ارائه کرده‌اند. ترکیب کنترل نزدیک به بهینه با مدل عصبی-تطبیقی [۲۰]، رویکرد اغتشاش [۲۱] و کنترل ورودی-مقید [۲۲] از دیگر کارهای مرتبط می‌باشد که در سال‌های اخیر به آن پرداخته شده است.

با در نظر گرفتن مطالب بیان‌شده، هدف این مقاله ارائه روشی است که ضمن برخورداری از عملکردی تقریباً بهینه، قابلیت برآورده‌سازی قید خروجی سیستم را نیز داشته باشد. اجتناب از پیچیدگی ساختاری و سادگی در پیاده‌سازی از دیگر اهداف مورد نظر در روش پیشنهادی است. در این راستا، از بسط تیلور برای تقریب مساله به بهینه‌سازی با ابعاد-محدود استفاده می‌شود. لذا روش این مقاله را می‌توان در دسته سوم از روش‌های نزدیک به بهینه یادشده قرار داد. قیدهای خروجی نیز به وسیله تابع مانع کنترل (CBF)^۶ به صورت نامساوی‌هایی در فضای متغیرهای بهینه‌سازی (سیگنال‌های کنترل) نوشته می‌شوند. قانون کنترل از حل برخط برنامه‌ریزی مقید به کمک نوعی از شبکه عصبی بازگشتی به دست می‌آید. این شبکه به دلیل برخورداری از پایداری و همگرایی تضمین‌شده، از اطمینان‌پذیری بالایی برخوردار است و در مقایسه با روش‌های عددی دیگر سرعت محاسبه بالایی دارد [۲۳-۲۵]. به دلیل به‌کارگیری عملگر تصویر (projection operator) در معادلات این شبکه، به آن «شبکه عصبی بازگشتی تصویر» (PRNN)^۷ یا به اختصار، «شبکه عصبی تصویر» نیز گفته می‌شود. برای آشنایی جامع با ویژگی‌ها و کاربردهای این نوع از شبکه‌های عصبی به مرجع [۲۶] مراجعه کنید. به منظور کاهش وابستگی به مدل سیستم، مدل در دسترس با استفاده از ساختاری تطبیقی به‌طور به‌هنگام به‌روز می‌شود. مزایا و ویژگی‌های کنترل‌کننده پیشنهادی عبارتند از:

- کنترل‌کننده پیشنهادی در مقایسه با روش‌های ADP، طراحی ساده‌تری داشته و بدون پیچیدگی‌های ناشی از حل معادله HJB و شبکه‌های تطبیقی نقاد و بازیگر طراحی می‌شود. راهکارهای ایجاد تحریک دائم (persistent excitation) در شبکه‌های نقاد و بازیگر (برای مثال در [۴])، نیاز به آموزش برون‌خط شبکه‌ها [۶] و حساسیت به شرایط اولیه وزن‌های شبکه‌ها از جمله مسائلی است که باعث پیچیدگی روش‌های ADP بازیگر-نقاد می‌شود حال آن‌که در روش پیشنهادی این مقاله، فارغ از دشواری‌های فوق به قانون کنترل نزدیک به بهینه مقید دست می‌یابد. همچنین، برخلاف بسیاری از الگوریتم‌های ADP که تنها برای مسائل تنظیم و پایداری قابل اعمال‌اند، این روش قابلیت کنترل ردیابی بدون ایجاد تغییرات ساختاری را دارا می‌باشد.
- برخلاف روش‌های نزدیک به بهینه و مبتنی بر تقریب تیلور مشابهی چون [۱۳-۲۲]، امکان برآورده‌سازی قیدهای خروجی (یا حالت) به شکلی سیستماتیک میسر است.

^۷ Projection Recurrent Neural Network

^۶ Control Barrier Function

$$Y(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \bar{\tau}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_1 & \dots & \bar{\tau}_{\rho+1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{Y} = \left[\bar{\mathbf{Y}}_1^T \dots \bar{\mathbf{Y}}_m^T \left| \bar{\mathbf{Y}}_1^T \dots \bar{\mathbf{Y}}_{\rho+1}^T \right. \right]^T \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_i = \left[y_1^{(\eta+i-1)} \dots y_m^{(\eta+i-1)} \right]^T \text{ for } i=1, \dots, \rho+1, \quad (12)$$

$$\bar{\tau}_i = \left[1 \ \tau \ \tau^2/2! \dots \tau^{(r_i-1)} / (r_i-1)! \right] \text{ for } i=1, \dots, m \quad (13)$$

$$\bar{\tau}_i = \text{diag} \left\{ \tau^{(\eta+i-1)} / (\eta+i-1)!, \dots, \tau^{(r_m+i-1)} / (r_m+i-1)! \right\} \quad (14)$$

for $i=1, \dots, \rho+1$

که در آن عملگر $\text{diag}\{\cdot\}$ ، ماتریسی قطری از درایه‌ها تشکیل می‌دهد. از طرف دیگر با توجه به (۶) و (۱۲) داریم

$$\bar{\mathbf{Y}}_1(t) = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) + \Delta(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad (15)$$

که در آن $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = [\bar{f}_1(\mathbf{x}) \dots \bar{f}_m(\mathbf{x})]^T$ و $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = [\bar{g}_1^T(\mathbf{x}) \dots \bar{g}_m^T(\mathbf{x})]^T$ مشتق‌گیری از (۱۵) نتیجه می‌دهد

$$\bar{\mathbf{Y}}_2(t) = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) + \Delta(\mathbf{x}, t)) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}}(t) + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (16)$$

جمله $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ برداری غیرخطی از متغیرهای حالت و کنترل است. با ادامه مشتق‌گیری تا مرتبه $(\rho+1)$ ام و زیرهم قراردادن آن‌ها، $\bar{\mathbf{Y}}$ به‌دست می‌آید که با استفاده از این بردار و (۳)، می‌توان رابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) \quad (17)$$

که در آن $\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}^T(t) \ \dot{\mathbf{u}}^T(t) \ \dots \ \mathbf{u}^{(\rho)T}(t)]^T$ بردار متغیرهای کنترل و مشتق‌های آن‌ها تا مرتبه ρ ام را دربر می‌گیرد، بردار $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ حاوی $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) + \Delta(\mathbf{x}, t)$ و مشتقات آن است و $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U})$ نیز شامل جمله‌های حاوی $\mathbf{U}(t)$ می‌باشد و ساختاری به شکل زیر دارد:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = \left[\mathbf{0} \ \bar{\mathbf{G}}^T(\mathbf{x}, \mathbf{U}) \right]^T \quad (18)$$

که در آن $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{U})$ برداری $m(\rho+1)$ بُعدی است و می‌توان نشان داد که m درایه اول آن طبق (۱۵) برابر با $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)$ می‌باشد. برای تقریب بردار ورودی مرجع نیز به طور مشابه با (۹) داریم:

$$\mathbf{y}_d(t+\tau) \cong Y(\tau)\mathbf{Y}_d(t) \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{Y}_d(t) = [\bar{\mathbf{Y}}_d^T | \bar{\mathbf{Y}}_d^T]^T$ مشابه با (۱۱) متشکل از بردار ورودی مرجع و مشتقات آن است. اکنون با توجه به (۷)، (۹)، (۱۷) و (۱۹) داریم:

$$J \approx (1/2)(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) - \mathbf{Y}_d + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t))^T \Gamma \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) + (1/2)(\mathbf{Y}_d - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t))^T \Gamma (\mathbf{Y}_d - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) \quad (20)$$

که در آن $\Gamma := \int_0^{t_f} Y^T(\tau)Y(\tau) d\tau$. با حذف جملاتی که در آن‌ها متغیر $\mathbf{U}(t)$ به‌طور صریح وجود ندارد، تابع هزینه افق-محدود زیر به‌دست می‌آید:

$$J_n = (1/2)(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) - \mathbf{Y}_d + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t))^T \Gamma \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) \quad (21)$$

اکنون در صورت معلوم بودن $\mathbf{F}(\cdot)$ و $\mathbf{G}(\cdot)$ می‌توان سیگنال نامقید را با برابر با صفر قرار دادن ژاکوبی (۲۱) بر حسب $\mathbf{U}(t)$ به‌دست آورد. حال آن که مطابق فرض‌های ابتدایی مقاله، هدف، یافتن سیگنال بهینه مقید در حضور

معادلات (۴) و (۵) به‌ترتیب توصیف‌کننده دینامیک خارجی و داخلی سیستم می‌باشند. از آن‌جا که دستیابی به مدل دقیق سیستم امری دشوار و گاهی غیرممکن است، فرض زیر در رابطه با نامعینی مدل در نظر گرفته می‌شود.

فرض ۱: فرض می‌شود که تقریبی از جملات $L_g^T L_f^{-1} y_i(\mathbf{x})$ و $L_f^T y_i(\mathbf{x})$ به‌صورت $\bar{f}_i(\mathbf{x})$ و $\bar{g}_i(\mathbf{x})$ در دسترس است. از این رو (۴) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_i(t) = \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{Y}}_i(t) + \mathbf{B}_i (\bar{f}_i(\mathbf{x}) + \bar{g}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \Delta_i(\mathbf{x}, t)), \quad i=1, \dots, m \quad (6)$$

که در آن $\Delta_i(\mathbf{x}, t)$ حاوی جملات نامعین است.

فرض ۲: فرض می‌شود که ماتریس ورودی $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = [\bar{g}_1^T(\mathbf{x}) \dots \bar{g}_m^T(\mathbf{x})]^T$ به ازای مقادیر مختلف حالت، دارای رتبه کامل و نرمی کراندار است.

هدف این مقاله، کنترل سیستم به‌نحوی است که خروجی آن، ضمن ردیابی بردار مرجع $\mathbf{y}_d(t)$ ، عملکردی نزدیک به بهینه داشته باشد و قیدهای خروجی را نیز برآورده سازد. برای این منظور، مساله زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min J(t) = \int_0^{t_f} \mathbf{e}^T(t+\tau)\mathbf{e}(t+\tau) d\tau \quad (7)$$

s.t. $\underline{\mathbf{y}}(t) \leq \mathbf{y}(t) \leq \bar{\mathbf{y}}(t)$

که در آن t_f افق پیش‌بینی شاخص عملکرد را مشخص می‌کند، $\mathbf{e}(t+\tau) = \mathbf{y}_d(t+\tau) - \mathbf{y}(t+\tau)$ بردار خطای ردیابی است، و $\bar{\mathbf{y}}(t)$ و $\underline{\mathbf{y}}(t)$ نیز بردار کران‌های بالا و پایین قیدهای خروجی است.

فرض ۳: به ازای بردار هموار و کراندار $\bar{\mathbf{Y}}_d$ و شرایط اولیه $\boldsymbol{\eta}_d(0) = \mathbf{0}$ ، پاسخ معادله دیفرانسیل $\dot{\boldsymbol{\eta}}_d(t) = \omega(\bar{\mathbf{Y}}_d(t), \boldsymbol{\eta}_d(t))$ کراندار و پایدار مجانبی یکنواخت است.

فرض بالا بر پایداری داخلی سیستم در هنگام ردیابی ایده‌آل در خروجی دلالت دارد. در صورتی که ورودی مرجع برابر با بردار صفر باشد، این گزاره بر پایداری دینامیک صفر سیستم تاکید می‌کند. اگرچه این عبارت، محدودکننده کلاس سیستم است، اما فرض مرسوم در طراحی سیستم‌های کنترل ردیاب می‌باشد و در مراجع مهمی چون [۲۹، ۳۰] به آن اشاره شده است. در ادبیات روش‌های مرتبط با این مقاله نیز مراجع زیادی همچون [۱۳-۲۰] روش خود را با استناد به این فرض توسعه داده‌اند.

۳- طراحی کنترل‌کننده

۳-۱- بهینه‌سازی بُعد-محدود

ابتدا شاخص عملکرد مساله (۷) به تابع هزینه‌ای با ابعاد محدود تقریب زده می‌شود. همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد، بدین ترتیب، کنترل نزدیک به بهینه حاصل می‌گردد [۱۴]. برای این منظور از روش بسط تیلور استفاده می‌شود

$$y_i(t+\tau) \cong y_i(t) + \tau \dot{y}_i(t) + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{y}_i(t) + \dots + \frac{\tau^{r_i}}{r_i!} y_i^{(r_i)}(t) + \dots + \frac{\tau^{r_i+\rho}}{(r_i+\rho)!} y_i^{(r_i+\rho)}(t) \quad (8)$$

که در آن $\rho \geq 0$. معادله (۸) را می‌توان به‌شکل زیر نیز نوشت:

$$\mathbf{y}(t+\tau) \cong Y(\tau)\mathbf{Y}(t) \quad (9)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{0i} &= \{ \mathbf{x}(t) \mid q_{0i}(\mathbf{x}, t) := h_i(\mathbf{x}, t) \geq 0 \} \\ \mathfrak{S}_{1i} &= \{ \mathbf{x}(t) \mid q_{1i}(\mathbf{x}, t) := \dot{q}_{0i}(\mathbf{x}, t) + \lambda_{i1} q_{0i}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \} \\ &\vdots \\ \mathfrak{S}_{(r_i-1)i} &= \{ \mathbf{x}(t) \mid \\ q_{(r_i-1)i}(\mathbf{x}, t) &:= \dot{q}_{(r_i-2)i}(\mathbf{x}, t) + \lambda_{r_i-1} q_{(r_i-2)i}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \} \\ q_{r_i i}(\mathbf{x}, t) &:= \dot{q}_{(r_i-1)i}(\mathbf{x}, t) + \lambda_{r_i} q_{(r_i-1)i}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن ها $-\lambda_1, \dots, -\lambda_{r_i}$ ریشه‌های منفی حقیقی چندجمله‌ای مشخصه $P_i(s)$ هستند. بدون از دست دادن کلیت مساله و با توجه به (۲۳) تعاریف بالا برای $i=1, \dots, 2m$ برقرار است. حال با توجه به (۲۹) می‌توان مجموعه زیر را نیز در نظر گرفت:

$$\mathfrak{S} = \bigcap_{i=1}^{2m} \bigcap_{j=0}^{r_i-1} \mathfrak{S}_{ji} \quad (30)$$

همچنین، فرض می‌شود که مرز مجموعه دلخواه \mathfrak{S} با $\bar{\partial}\mathfrak{S}$ نشان داده می‌شود. به کمک مطالب فوق و [۳۲، ۳۱] قضیه زیر استخراج می‌شود.

قضیه ۱: سیستم (۱) با شرایط اولیه $\mathbf{x}(t_0) \in \mathfrak{S}$ و CBF به صورت (۲۳) در نظر گرفته می‌شود. همچنین، فرض می‌شود $-\lambda_1, \dots, -\lambda_{r_i}$ ریشه‌های منفی حقیقی چندجمله‌ای مشخصه $P_i(s) = \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} s^{r_i-j}$ به ازای $i=1, \dots, 2m$ باشد. آن گاه (۲۶) برای $t \geq t_0$ همواره برآورده می‌شود اگر نامساوی

$$\sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} (\bar{\mathbf{y}}_i(t) - \underline{\mathbf{y}}_i(t))^{(r_i-j)} \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m \quad (31)$$

برقرار باشد. در این صورت، قانون کنترل برآورده‌کننده (۲۶)، قیدهای (۷) را به ازای $t \geq t_0$ برآورده می‌کنند.

اثبات: روشن است که برای تضمین قیدهای خروجی، باید نشان داده شود که $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}$ ، شروع از آن، مسیر حلقه‌بسته همواره درون آن باقی می‌ماند. از آن جا که $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}$ ، شرط کافی برای تحقق این هدف، اثبات نامتغیر بودن \mathfrak{S} است. لذا همانند ایده مراجعی چون [۳۲، ۳۱] کافی است ثابت شود هرگاه مسیر حلقه-بسته به مرز مجموعه ($\bar{\partial}\mathfrak{S}$) رسید، از آن عبور نکرده و یا به داخل مجموعه همگرا می‌شود. برای این منظور باید توجه شود که با توجه به (۳۰) اگر $\mathbf{x}(t) \in \bar{\partial}\mathfrak{S}$ ، حداقل یک i و j یافت می‌شود که $\mathbf{x}(t) \in \bar{\partial}\mathfrak{S}_{ji} \cap \bar{\partial}\mathfrak{S}$ یا به عبارت دیگر، $\mathbf{x}(t)$ در مرز مجموعه $\bar{\partial}\mathfrak{S}_{ji}$ قرار بگیرد؛ که در این صورت، با توجه به (۲۹) می‌توان نتیجه گرفت $q_{ji}(\mathbf{x}, t) = 0$. بدین ترتیب، دو حالت می‌توان تصور کرد.

حالت اول: زمانی است که $0 \leq j \leq r_i - 2$. در این حالت، به دلیل آن که $\bar{\partial}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_{(j+1)i}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\mathbf{x}(t)$ به $\mathfrak{S}_{(j+1)i}$ نیز تعلق دارد. لذا با توجه به (۲۹) داریم

$$q_{(j+1)i}(\mathbf{x}, t) := \dot{q}_{ji}(\mathbf{x}, t) + \lambda_j q_{ji}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (32)$$

حال با توجه به $q_{ji}(\mathbf{x}, t) = 0$ ، نتیجه می‌شود: $\dot{q}_{ji}(\mathbf{x}, t) \geq 0$. از این رو تضمین می‌شود که $\mathbf{x}(t)$ از $\bar{\partial}\mathfrak{S}_{ji} \cap \bar{\partial}\mathfrak{S}$ فراتر نمی‌رود و یا به داخل $\bar{\partial}\mathfrak{S}_{ji} \cap \bar{\partial}\mathfrak{S}$ هدایت می‌شود.

حالت دوم: زمانی است که $\mathbf{x}(t) \in \bar{\partial}\mathfrak{S}_{ji} \cap \bar{\partial}\mathfrak{S}$ و $j = r_i - 1$. لذا $q_{(r_i-1)i}(\mathbf{x}, t) = 0$ برقرار است. از این رو، به طور مشابه با حالت قبل برای آن که

نامعینی‌های مدل است که در بخش‌های بعد به تحقق این مهم پرداخته می‌شود.

۳-۲- مقیدکردن بهینه‌سازی بعد-محدود

برای آن که قیدهای مساله بهینه‌سازی در (۷) قابل اعمال به برنامه‌ریزی بعد-محدود باشند، باید به صورت نامساوی‌هایی بر حسب متغیر بهینه‌سازی $\mathbf{u}(t)$ درآیند. برای این منظور ابتدا تعریف زیر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف: تابع اسکالر $h(\mathbf{x}, t)$ تابع مانع کنترل (CBF) برای سیستم دلخواه $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t)$ نامیده می‌شود اگر بردار $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_r]^T$ وجود داشته باشد به نحوی که برای $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$:

$$L_g \bar{L}_f^{r-1} h(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) + \bar{L}_f^r h(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad (22)$$

که در آن ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $P(s) = s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_{r-1} s + a_r$ منفی حقیقی باشد و $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = [\bar{L}_f^{r-1} h(\mathbf{x}, t) \quad \bar{L}_f^{r-2} h(\mathbf{x}, t) \quad \dots \quad h(\mathbf{x}, t)]^T$ [۳۱].

در تعریف بالا، $\bar{L}_f^i h(\mathbf{x}, t) = (L_f + \partial/\partial t)^i h(\mathbf{x}, t)$ بیانگر مشتق لی اصلاح شده است. به سادگی می‌توان این تعریف را برای حالت برداری $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ نیز تعمیم داد. یعنی، فرض شود که

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = [\bar{\mathbf{y}}^T - \mathbf{y}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{y}^T(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{y}}^T]^T \quad (23)$$

با جایگذاری این تساوی در (۲۲) برای سیستم (۱) داریم

$$\begin{aligned} L_g \bar{L}_f^{r_i-1} (\bar{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i(\mathbf{x})) \mathbf{u}(t) + \bar{L}_f^{r_i} (\bar{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i(\mathbf{x})) \\ + \sum_{j=1}^{r_i} a_j \bar{L}_f^{r_i-j} (\bar{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i(\mathbf{x})) \geq 0 \end{aligned} \quad i=1, \dots, m \quad (24)$$

$$\begin{aligned} L_g \bar{L}_f^{r_i-1} (\mathbf{y}_i(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{y}}_i) \mathbf{u}(t) + \bar{L}_f^{r_i} (\mathbf{y}_i(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{y}}_i) \\ + \sum_{j=1}^{r_i} a_j \bar{L}_f^{r_i-j} (\mathbf{y}_i(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{y}}_i) \geq 0 \end{aligned} \quad i=1, \dots, m \quad (25)$$

همچنین، با توجه به این که $\bar{L}_f^j \bar{\mathbf{y}}_i(t) = \bar{\mathbf{y}}_i^{(j)}$ ، $\bar{L}_f^j \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}_i^{(j)}$ ، $\bar{L}_f^j \bar{\mathbf{y}}_i(t) = \bar{\mathbf{y}}_i^{(j)}$ ، $\bar{L}_f^j \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}_i^{(j)}$ و $L_g \bar{L}_f^{r_i-1} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}) = L_g \bar{L}_f^{r_i-1} \mathbf{y}_i(\mathbf{x})$ و $\bar{L}_f^j \mathbf{y}_i(\mathbf{x}) = L_f^j \mathbf{y}_i(\mathbf{x})$ (۲۴) و (۲۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\underline{\mathbf{y}}_n \leq \Theta(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \leq \bar{\mathbf{y}}_n \quad (26)$$

که در آن به ازای $i=1, \dots, m$ و با احتساب $a_0=1$ داریم:

$$\Theta_i(\mathbf{x}) = L_g \bar{L}_f^{r_i-1} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}) \quad (27)$$

$$\begin{cases} (\bar{\mathbf{y}}_n)_i = \sum_{j=0}^{r_i} a_j \left(\bar{\mathbf{y}}_i(t)^{(r_i-j)} - L_f^{r_i-j} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}) \right) \\ (\underline{\mathbf{y}}_n)_i = \sum_{j=0}^{r_i} a_j \left(\mathbf{y}_i(t)^{(r_i-j)} - L_f^{r_i-j} \mathbf{y}_i(\mathbf{x}) \right) \end{cases} \quad (28)$$

نامساوی (۲۶) در فضای متغیر کنترل نوشته شده است لذا می‌توان از آن به-عنوان قیدهای مساله بهینه‌سازی جهت برآورده کردن قیدهای (۷) بهره برد. برای بررسی چگونگی این امر، تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Pr}_{\Omega}(\vartheta_i) = \begin{cases} (\hat{\mathbf{Y}}_n)_i, & \vartheta_i < (\hat{\mathbf{Y}}_n)_i \\ \vartheta_i, & (\hat{\mathbf{Y}}_n)_i < \vartheta_i < (\hat{\mathbf{Y}}_n)_i \\ (\hat{\mathbf{Y}}_n)_i, & \vartheta_i > (\hat{\mathbf{Y}}_n)_i \end{cases} \quad (38)$$

که در آن ϑ_i آرگومان دلخواه عملگر بوده و زیروند i به شماره درایه بردار مربوطه اشاره دارد. با توجه به فرض ۲ می‌توان نشان داد که $\partial \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) / \partial \mathbf{U}(t)$ همواره وارون پذیر است. از این رو، با ضرب کردن $(\partial \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) / \partial \mathbf{U}(t))^{-T}$ در دو طرف (۳۶) و استفاده از (۱۱)، (۱۲)، (۱۵)، (۱۸) و (۲۷) تساوی ماتریسی‌ای حاصل می‌شود که m معادله اول آن به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}}_d) + (\bar{\mathbf{Y}}_d)_1 - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \Delta(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}] \Gamma_{22}^{-1} [\bar{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{x}) \ \mathbf{0}]^T \Theta^T(\mathbf{x}) \chi \quad (39)$$

که در آن \mathbf{K} برابر با m ردیف اول ماتریس $\Gamma_{22}^{-1} \Gamma_{21}$ و $(\bar{\mathbf{Y}}_d)_1$ نشانگر m ردیف اول بردار $\bar{\mathbf{Y}}_d$ است. همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، ساختار PRNN به گونه‌ای طراحی می‌شود که نقطه تعادل آن برآورده‌کننده شرایط KKT (۳۷) و (۳۹) باشد. بدین منظور معادلات شبکه عصبی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\varepsilon \left(\frac{d\chi(t')}{dt'} \right) = -\Theta(\mathbf{x})\mathbf{u}(t') + \text{Pr}_{\Omega_1}(\Theta(\mathbf{x})\mathbf{u}(t') - \chi(t')) \quad (40)$$

$$\mathbf{u}(t') = \bar{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{x}) [-\mathbf{K}(\bar{\mathbf{Y}}(t) - \bar{\mathbf{Y}}_d(t)) + (\bar{\mathbf{Y}}_d(t))_1 - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \Delta(\mathbf{x}, t)] + \Psi(\mathbf{x})\Theta^T(\mathbf{x})\chi(t') \quad (41)$$

که در آن‌ها $\Psi(\mathbf{x}) = [\bar{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{x}) \ \mathbf{0}] \Gamma_{22}^{-1} [\bar{\mathbf{g}}^{-T}(\mathbf{x}) \ \mathbf{0}]^T$ متغیر حالت و $\varepsilon > 0$ ضریب همگرایی شبکه است.

قضیه ۲: شبکه عصبی با معادلات (۴۰) و (۴۱) از نظر دینامیکی پایدار مجانبی بوده و معادله خروجی آن به سیگنال کنترل بهینه $\mathbf{u}^*(t)$ که از حل مساله (۳۳) به دست می‌آید، همگرا می‌شود. به عبارت دیگر $\lim_{t' \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t') = \mathbf{u}^*(t)$. شبکه عصبی PRNN مطابق روند شرح داده شده و برای حل مساله مورد نیاز این مقاله تشکیل شده است. همچنین، اثبات قضیه فوق با مراجعه به [۲۴] که ساختار کلی تری از این نوع شبکه‌های بازگشتی را تحلیل کرده است، به راحتی قابل استنتاج است.

شکل ۱ نشان‌دهنده ساختار کلی PRNN است که با فرض همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این شبکه با شبکه‌های عصبی پیشخور مرسوم (همانند MLP و RBF) تفاوت ساختاری و ماهوی دارد. به دلیل مرتبه اول بودن دینامیک، ساختار این شبکه به صورت تک لایه بوده و تعداد سلول‌های این لایه برابر با تعداد درایه‌های بردار حالت شبکه (χ) است. در واقع، هر متغیر حالت شبکه به عنوان یک سلول یا نورون (neuron) در نظر گرفته می‌شود. ابعاد این بردار برابر با تعداد قیدهای بازه‌ای خروجی است. برای مثال در (۷)، اگر قرار باشد l تعداد از m درایه بردار \mathbf{y} مقید شود، به تعداد l سلول با توابع فعال‌ساز تصویر در شبکه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های شبکه همان معلومات مساله (۳۳) یعنی بردارهای $\bar{\mathbf{Y}}_d(t)$ ، $\bar{\mathbf{Y}}(t)$ و $\mathbf{x}(t)$ هستند که در هر زمان نمونه‌برداری از سیستم حلقه‌بسته اندازه‌گیری و فیدبک می‌شوند. با استفاده از این معلومات، ماتریس‌های $\Theta^T(\mathbf{x})$ ، $\Psi(\mathbf{x})$ و $\bar{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{x})$ با

مسیر حلقه‌بسته از $\bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}_{(i-1)} \cap \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}_i$ تجاوز نکند، کافی است $\dot{q}_{\text{Pr}}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ باشد. با در نظر گرفتن تمام مقادیر $i = 1, \dots, 2m$ ، و دانستن این امر که مطابق (۲۹) شرط $\dot{q}_{\text{Pr}}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ معادل نامساوی (۲۲) برای $h_i(\mathbf{x}, t)$ می‌باشد، می‌توان با توجه به (۲۳-۲۵)، نامساوی (۲۶) را نتیجه‌گیری کرد. از این رو، اگر $\mathbf{x}(t_0) \in \bar{\mathcal{L}}$ باشد، با برقراری (۲۶)، $\mathbf{x}(t)$ درون $\bar{\mathcal{L}}$ و متعاقب آن $\bar{\mathcal{L}}_0$ باقی مانده و قیدهای خروجی مساله برآورده می‌شوند. حال برای اثبات آن که (۲۶) همواره امکان‌پذیر است، کافی است تا $\bar{\mathbf{y}}_n \geq \underline{\mathbf{y}}_n$ برقرار باشد که از طریق آن و (۲۸)، نامساوی (۳۱) نتیجه می‌شود. □

۳-۳- حل برخط بهینه‌سازی مقید با استفاده از شبکه عصبی بازگشتی

با توجه به مطالب بیان شده در بخش قبل، مساله بهینه‌سازی مقید با تجمیع قید (۲۶) و تابع هزینه (۲۱) به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\min J_n = (1/2)(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) - \mathbf{Y}_d + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t))^T \Gamma \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{U}(t)) \quad (33)$$

s.t. $\underline{\mathbf{y}}_n \leq \bar{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{U}(t) \leq \bar{\mathbf{y}}_n$

که در آن $\bar{\Theta}(\mathbf{x}) = [\Theta(\mathbf{x}) \ \mathbf{0}_{m \times m\rho}]$. بدین ترتیب، با حل برخط این مساله، قانون کنترل نزدیک به بهینه مقید به دست می‌آید.

به منظور حل (۳۳) و دستیابی به $\mathbf{u}(t)$ نزدیک به بهینه، از نوعی PRNN استفاده می‌شود. در این راستا، از روندی مشابه با [۲۴] جهت طراحی ساختار PRNN بهره برده می‌شود. ابتدا با توجه به مباحث بهینه‌سازی [۲۳]، تابع لاگرانژ مساله (۳۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}_d) = J_n(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \mathbf{Y}_d) + \mu_1^T (\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{U}(t)) + \mu_2^T (\bar{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{U}(t) - \underline{\mathbf{y}}_n) \quad (34)$$

که در آن $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_+^m$ متغیرهای دوگان (dual) و \mathbf{U} بردار متغیرهای اولیه هستند. دینامیک شبکه عصبی به گونه‌ای طراحی می‌شود که نقطه تعادل آن برآورده‌کننده شرایط معروف کاروش-کان-تاکر (KKT) باشد. لذا با فرض محذب بودن مساله (۳۳)، برآورده شدن شرایط KKT، برای دستیابی به پاسخ بهینه کافی هستند. پیش از نوشتن این شرایط، با فرض $r = r_1 + \dots + r_m$ بخش‌بندی ماتریسی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

که در آن $\Gamma_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ، $\Gamma_{12} \in \mathbb{R}^{r \times \rho_1^+}$ و $\Gamma_{22} \in \mathbb{R}^{m(\rho+1) \times m(\rho+1)}$. حال با استفاده از تئوری بهینه‌سازی محذب می‌توان به راحتی نشان داد که شرایط KKT مربوط به مساله (۳۳) با تابع لاگرانژ (۳۴) به صورت زیر قابل توصیف است:

$$(\partial \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) / \partial \mathbf{U}(t))^T ([\Gamma_{21} \ \Gamma_{22}] (\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{Y}_d(t)) + \Gamma_{22} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{U})) - \bar{\Theta}^T(\mathbf{x}) \chi = \mathbf{0} \quad (36)$$

$$\bar{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{U} = \text{Pr}_{\Omega}(\bar{\Theta}(\mathbf{x})\mathbf{U} - \chi) \quad (37)$$

که در آن‌ها $\chi := \mu_1 - \mu_2$. علاوه بر این، با در نظر گرفتن $\Omega = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{\mathbf{Y}}_n \leq \mathbf{X} \leq \hat{\mathbf{Y}}_n\}$ هر درایه عملگر تصویر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}^{*T} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (42)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in l$ برداری از توابع پایه معلوم بوده و $\mathbf{W}^{*} \in l \times m$ ماتریس وزن‌های ایده‌آل است که باید تخمین زده شوند. با توجه به (۱۵) داریم

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1(t) - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) = \mathbf{W}^{*T} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (43)$$

بردار $\tilde{\mathbf{Y}}_0(t) := [y_1^{(\eta-1)}(t) \dots y_m^{(\eta-1)}(t)]^T$ را در نظر بگیرید. از آن‌جا که $\dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_0(t) = \tilde{\mathbf{Y}}_1(t)$ ، با اضافه و کم کردن $\alpha \tilde{\mathbf{Y}}_0(t)$ در سمت چپ (۴۳) و ضرب دو طرف معادله در فیلتر $\alpha/(s+\alpha)$ داریم

$$\alpha \tilde{\mathbf{Y}}_0(t) - \frac{\alpha}{s+\alpha} [\alpha \tilde{\mathbf{Y}}_0(t) + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)] = \mathbf{W}^{*T} \frac{\alpha}{s+\alpha} [\boldsymbol{\sigma}(t)] \quad (44)$$

که در آن s متغیر لاپلاس و α ثابت مثبت است. انتخاب $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) := \frac{\alpha}{s+\alpha} [\boldsymbol{\sigma}(t)]$ و

$$\zeta(t) := \frac{\alpha}{s+\alpha} [\alpha \tilde{\mathbf{Y}}_0(t) + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)] \quad (45)$$

$$\alpha \tilde{\mathbf{Y}}_0(t) - \zeta(t) = \mathbf{W}^{*T} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \quad (45)$$

که متغیرهای $\zeta(t)$ و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ دارای دینامیک زیر هستند:

$$\dot{\zeta}(t) = -\alpha \zeta(t) + \alpha (\alpha \tilde{\mathbf{Y}}_0(t) + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)) \quad (46)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(t) = -\alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \alpha \boldsymbol{\sigma}(t) \quad (47)$$

بنابراین، با معلوم بودن بردارهای $\zeta(t)$ ، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ و $\tilde{\mathbf{Y}}_0(t)$ ، ماتریس \mathbf{W}^* را می‌توان از (۴۵) به دست آورد. برای این کار، طی روندی تطبیقی، ماتریس وزنی $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1 \dots \mathbf{W}_m]$ با استفاده از قوانین زیر به‌روز می‌شود:

$$\dot{\mathbf{W}}_i(t) = \mathbf{P}(t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \left(\alpha (y_i^{(\eta-1)} - \zeta_i(t)) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^T(t) \mathbf{W}_i(t) \right) \quad (48)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \delta(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T(t) \mathbf{P}(t) \quad (49)$$

که در آن $\delta(t)$ بهره فراموشی کراندار است و به‌صورت زیر انتخاب می‌شود [۲۹]:

$$\delta(t) = \delta_0 (1 - (\|\mathbf{P}(t)\|/\kappa)) \quad (50)$$

که در آن $\delta_0 \geq 0$ و $\kappa > 0$ به ترتیب حداکثر نرخ فراموشی و کران از پیش تعیین شده ماتریس بهره است. با توجه به مطالب این بخش، می‌توان نامعینی $\Delta(\mathbf{x}, t)$ را با مقدار تقریبی‌اش یعنی $\mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ جایگزین کرد. بدین ترتیب، در ساختار شبکه عصبی، (۴۱) به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{x}) [-\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{Y}}(t) - \tilde{\mathbf{Y}}_d(t)) + \Psi(\mathbf{x}) \Theta^T(\mathbf{x}) \chi(t)] + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (51)$$

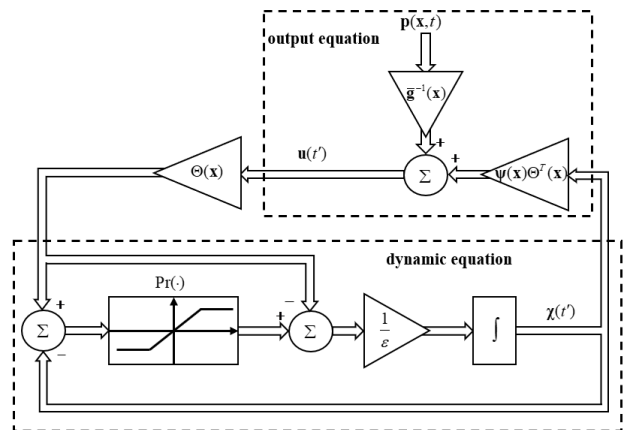
لازم به ذکر است که در هر زمان نمونه‌برداری حلقه‌بسته (مثلاً $t = n_s T_s$) اجازه داده می‌شود که حالات شبکه عصبی متشکل از (۴۰) و (۵۱) به نقطه تعادلش همگرا شود. سپس، معادله (۵۱) در این نقطه تعادل به‌عنوان سیگنال کنترل در زمان t به سیستم اعمال می‌شود؛ به همین منوال در $t = (n_s + 1)T$ و بعد از آن این روند تکرار می‌شود.

۴- تحلیل پایداری حلقه‌بسته

شکل ۲ نمودار بلوکی حلقه‌بسته را نمایش می‌دهد. در این ساختار، PRNN با معادلات (۴۰) و (۵۱)، پاسخ بهینه‌سازی مقید (۳۳) که خود تقریبی نزدیک به بهینه از مساله اصلی (۷) است، را ارائه می‌دهد. همچنین، مدل تطبیقی با

توجه به تعاریف آن‌ها محاسبه می‌شوند. با محاسبه \mathbf{K} و همچنین با در اختیار داشتن $\Delta(\mathbf{x}, t)$ تمامی معلومات مساله (۳۳) که برای تشکیل PRNN و در نتیجه یافتن پاسخ بهینه مورد نیاز است، به‌دست می‌آید. خروجی شبکه، بردار \mathbf{u} است که پس از همگرایی شبکه به نقطه تعادل، به‌عنوان سیگنال کنترل به سیستم اعمال می‌شود. وزن‌های PRNN همان بهره‌های موجود در شکل ۱ هستند که به معلومات مساله بهینه‌سازی و مدل سیستم نظیر $\Theta^T(\mathbf{x})$ ، $\Psi(\mathbf{x})$ ، $\bar{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{x})$ و ضریب همگرایی ε بستگی دارند. بنابراین در این‌جا، وزن‌ها متفاوت از دیگر شبکه‌های عصبی متداول هستند و مقدار آن‌ها با توجه به معلومات مساله (۳۳) تعیین می‌شود. ساختار وزنی PRNN را می‌توان مشابه شبکه عصبی هوپفیلد (Hopfield) دانست. همان‌طور که می‌دانیم، شبکه هوپفیلد علاوه بر کاربرد حافظه انجمنی (associative memory)، قابلیت حل برخی از مسائل بهینه‌سازی مقید را نیز دارد. برای مثال در [۳۴]، چگونگی حل مساله فروشنده دوره‌گرد با هوپفیلد نشان داده شده که در آن، پس از نوشتن مساله بهینه‌سازی به فرم تابع انرژی شبکه هوپفیلد، وزن‌های شبکه با توجه به پارامترهای تابع انرژی (معلومات مساله بهینه‌سازی) تعیین می‌شوند. عدم تضمین رسیدن به جواب بهینه مقید از مشکلات شبکه‌های بازگشتی سنتی همچون هوپفیلد می‌باشد. با این وجود، از نظر ساختار وزنی و ماهیت دینامیکی می‌توان PRNN این مقاله را با هوپفیلد مقایسه کرد.

با توجه به ساختار شبکه عصبی، روند به‌دست آوردن سیگنال کنترل به این صورت خواهد بود که در هر نمونه زمانی $t = n_s T_s$ ، پس از تعیین معلومات بهینه‌سازی (اعم از $\tilde{\mathbf{Y}}_d(t)$ ، $\bar{\mathbf{Y}}$ ، $\mathbf{x}(t)$ ، ...)، سیگنال کنترل از حل (۴۰) و (۴۱) به‌دست می‌آید. برای این منظور، لازم است حل معادله دیفرانسیل تا همگرایی دینامیک ادامه داشته باشد. سپس، قانون کنترل $\mathbf{u}(t)$ به‌صورت تابعی صریح از پارامترها و متغیرهای سیستم و شبکه عصبی از طریق معادله خروجی شبکه به‌دست می‌آید که این امر تحلیل پایداری حلقه‌بسته را تسهیل می‌کند. همچنین، به‌دلیل سادگی حل عددی (۴۰) و (۴۱)، پیاده‌سازی در بسترهای سخت‌افزاری مختلف به‌سهولت و بدون نیاز به جعبه‌ابزارهای اضافی انجام می‌شود. علاوه‌براین، پایداری الگوریتم بهینه‌سازی باعث می‌شود تا الگوریتم کلی کنترل، اطمینان‌پذیری بیشتری داشته باشد.

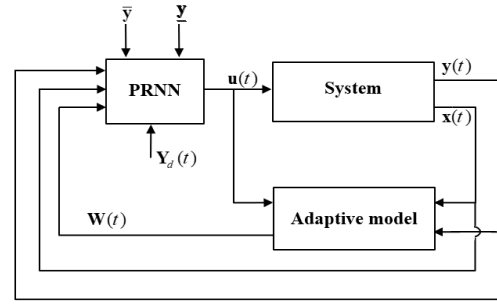


شکل ۱- ساختار داخلی شبکه عصبی بازگشتی تصویر (PRNN)

۳-۴ کنترل نزدیک به بهینه مبتنی بر مدل تطبیقی

معادله خروجی PRNN نشان می‌دهد که قانون کنترل به‌دست آمده به مدل سیستم وابسته است. حال آن‌که بنا به مفروضات بخش ۲، بردار $\Delta(\mathbf{x}, t)$ شامل جملات نامعین مدل بوده و لازم است به روشی تخمین زده شود. برای این منظور ابتدا فرض می‌شود که

قوانین (۴۸) و (۴۹) برای مقابله با نامعینی‌ها نیز در شکل نشان داده شده است.



شکل ۲- نمودار بلوکی حلقه بسته

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{2}\gamma_1 \|\mathbf{E}(t)\|^2 - \frac{\eta}{2}\gamma_2(t) \|\tilde{\mathbf{W}}(t)\|^2 + \|\mathbf{E}(t)\| \|\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\| (\|\mathbf{u}_\chi(t)\| + \|\tilde{\mathbf{W}}(t)\| \|\boldsymbol{\sigma}(x)\|) \quad (57)$$

که در آن $\gamma_1 := \lambda_{\min}\{\bar{\mathbf{Q}}\}$ و $\gamma_2(t) := \lambda_m\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T\} + \{\delta \mathbf{B}^T\}$ و مقادیر مثبت هستند. با فرض $\|\boldsymbol{\sigma}(x)\| \leq \sigma_M$ و استفاده از $\left(\|\mathbf{E}(t)\|/\sqrt{\beta}\right) - \sqrt{\beta}\|\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\|\|\boldsymbol{\sigma}(x)\|\|\tilde{\mathbf{W}}(t)\|^2 \geq 0$ برای مقادیر مثبت β داریم

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{2}(\eta\gamma_2(t) - \beta\sigma_M^2\|\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\|^2) \|\tilde{\mathbf{W}}(t)\|^2 - \frac{1}{2}(\gamma_1 - 1/\beta)\|\mathbf{E}(t)\|^2 + \|\mathbf{E}(t)\| \|\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\| \|\mathbf{u}_\chi(t)\| \quad (58)$$

پس از تعیین δ_0 و κ می‌توان مقدار مناسب η را به گونه‌ای تعیین کرد که به ازای مقادیر دلخواه β ، نامساوی $\eta\gamma_2(t) - \beta\sigma_M^2\|\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{B}\|^2 > 0$ برقرار باشد. از طرف دیگر با تنظیم پارامترهای t_f و ρ ، مقادیر ویژه \mathbf{A}_{cl} و در نتیجه γ_1 به گونه‌ای قابل تعیین است که $\gamma_1 > 1/\beta$. از این رو هرگاه $\dot{V}(t) \leq 0$ به دست می‌آید. بنابراین با توجه به فرض ۳، پایداری محلی سیستم حلقه بسته و کران‌داری سیگنال‌ها به وسیله قضیه لیاپانوف توسعه یافته قابل استنتاج است. □

۵- مثال‌های شبیه‌سازی

مثال ۱: معادلات حرکت کشتی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۳۵]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \cos x_3 - x_5 \sin x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \sin x_3 + x_5 \cos x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= (m_{22}/m_{11})x_5x_6 - (d_{11}/m_{11})x_4 + (1/m_{11})u_1 \\ \dot{x}_5 &= -(m_{11}/m_{22})x_4x_6 - (d_{22}/m_{22})x_5 \\ \dot{x}_6 &= ((m_{11} - m_{22})/m_{33})x_4x_5 - (d_{33}/m_{33})x_6 + (1/m_{33})u_2 \end{aligned} \quad (59)$$

که در آن x_1 ، x_2 و x_3 به ترتیب موقعیت افقی، موقعیت عمودی و زاویه سمت (heading) کشتی هستند؛ x_4 ، x_5 و x_6 نیز به ترتیب، نمایانگر سرعت‌های موج (surge)، تاب‌خوردن (sway) و انحراف از مسیر (yaw) هستند. همچنین، $m_{33} = 636 \times 10^5 \text{ kg m}^2$ ، $m_{22} = 217.9 \times 10^3 \text{ kg}$ ، $m_{11} = 120 \times 10^3 \text{ kg}$ ، $d_{33} = 802 \times 10^4 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ و $d_{22} = 117 \times 10^3 \text{ kg s}^{-1}$ ، $d_{11} = 215 \times 10^2 \text{ kg s}^{-1}$ پارامترهای سیستم هستند.

خروجی سیستم نیز به صورت $\mathbf{y}(t) = [x_1 + l \cos x_3 \quad x_2 + l \sin x_3]^T$ تعریف می‌شود. با فرض این‌که x_1 و x_2 موقعیت مکانی انتهای کشتی در راستای افقی و عمودی و l طول کشتی باشد، بردار خروجی، موقعیت مکانی سر کشتی خواهد بود. در این مثال، هدف، رسیدن به نقطه مطلوب $\mathbf{y}_d = [8 \ 10]^T \text{ km}$ بدون برخورد با موانع از پیش معلوم می‌باشد. برای این منظور، دو مانع مستطیلی در نظر گرفته می‌شود که $(0,5)$ ، $(5,5)$ ، $(0,10)$ و $(5,10)$ مختصات رأس‌های مستطیل اول و $(6,0)$ ، $(6,7)$ ، $(9,0)$ و $(9,7)$ مختصات رأس‌های مستطیل دوم هستند. جهت داشتن حاشیه اطمینان در عبور بدون برخورد کشتی با مرزهای فوق، کران‌های قیود در بهینه‌سازی به صورت $\bar{\mathbf{y}} - 0.2$ و $\underline{\mathbf{y}} + 0.2$ در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود مقادیر تقریبی پارامترهای سیستم به صورت $\hat{m}_1 = 0.95m_{11}$ ، $\hat{m}_2 = 0.9m_{22}$ ، $\hat{m}_3 = 1.1m_{33}$ ، $\hat{d}_1 = 0.9d_{11}$ و $\hat{d}_3 = 1.05d_{33}$ در اختیار هستند. زمان نمونه‌برداری $T_s = 0.01$ ساعت فرض شده است. انتخاب $\mathbf{W}(0)$ تصادفی بوده و پارامترهای کنترل و طول کشتی مطابق زیر در نظر گرفته می‌شوند:

قضیه ۳: سیستم (۱) با فرض‌های ۱ تا ۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید نامعینی‌های سیستم توسط مدل تطبیقی با قوانین تطبیق (۴۸) و (۴۹) تقریب زده شوند. همچنین، قانون کنترل نزدیک به بهینه از حل برخط (۳۳) توسط شبکه عصبی بازگشتی با معادلات دینامیک و خروجی (۴۰) و (۵۱) به دست می‌آید. در این صورت، سیستم حلقه بسته پایدار بوده و تمامی سیگنال‌های آن کراندار باقی می‌مانند.

اثبات: با جایگزینی (۵۱) و (۴۲) در (۶) نتیجه می‌شود

$$\dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_i(t) = \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{Y}}_i(t) + \mathbf{B}_i \left(-\mathbf{K}_i (\bar{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}_d) + y_{id}^{(\eta)} + \tilde{\mathbf{W}}_i^T \boldsymbol{\sigma}(x) \right) \quad (52)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \mathbf{W}$ و \mathbf{K}_i سطر i ام ماتریس \mathbf{K} است. با انتخاب داریم $\mathbf{E}(t) := \bar{\mathbf{Y}}(t) - \tilde{\mathbf{Y}}_d(t)$

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{A}_{cl} \mathbf{E}(t) + \mathbf{B} (\mathbf{u}_\chi(t) + \tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(x)) \quad (53)$$

که در آن $\mathbf{A}_{cl} = \text{diag}\{(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1), \dots, (\mathbf{A}_m - \mathbf{B}_m \mathbf{K}_m)\}$ و $\mathbf{B} = \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m\}$. $\mathbf{u}_\chi(t) = \boldsymbol{\Psi}(x) \Theta^T(x) \chi(t)$

پیش‌تر بیان شد که \mathbf{K} برابر m ردیف اول ماتریس $\Gamma_{21}^{-1} \Gamma_{21}$ است. با توجه به تعریف Γ ، ماتریس \mathbf{K} وابسته به مقادیر درجه نسبی و پارامترهای ρ و t_f است. با مراجعه به [۱۳] می‌توان دریافت که به ازای مقادیر مختلف η ، پارامترهای ρ و t_f به گونه‌ای قابل تعیین است که زیرماتریس‌های $\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i$ و در نتیجه \mathbf{A}_{cl} پایدار باشند. از این رو، ماتریس‌های متقارن $\bar{\mathbf{P}} > 0$ و $\bar{\mathbf{Q}} > 0$ وجود دارند به طوری که:

$$\mathbf{A}_{cl}^T \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_{cl} = -\bar{\mathbf{Q}} \quad (54)$$

تابع لیاپانوف $V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T(t) \bar{\mathbf{P}} \mathbf{E}(t) + \frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{W}}_i^T(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \tilde{\mathbf{W}}_i(t)$ را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری زمانی از این تابع در راستای معادلات (۴۸)، (۴۹) و (۵۳) و با استفاده از (۴۲) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{E}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{E}(t) + \mathbf{E}^T(t) \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B} (\mathbf{u}_\chi(t) + \tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(x)) \\ &\quad - \frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{W}}_i^T \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T(t) + \delta(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \right) \tilde{\mathbf{W}}_i \end{aligned} \quad (55)$$

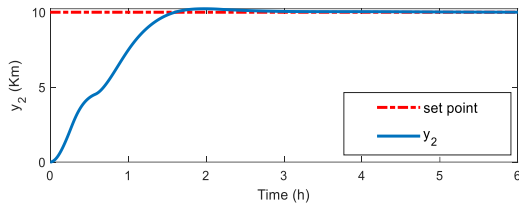
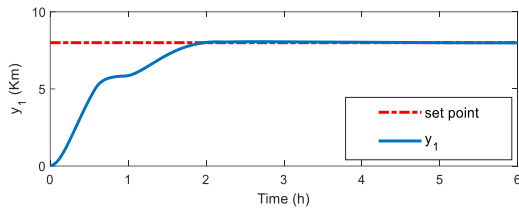
همچنین، با توجه به (۴۹) و (۵۰) به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{P}^{-1} \geq \left(\mathbf{P}^{-1}(0) - \kappa^{-1} \mathbf{I} \right) e^{-\delta_0 t} + \frac{1}{\delta_0} \mathbf{I} + \int_0^t e^{-\delta_0(t-v)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(v) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T(v) dv \quad (56)$$

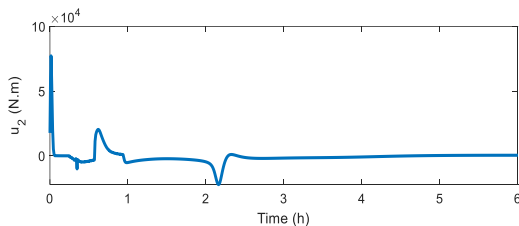
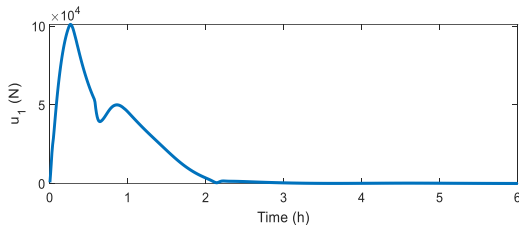
بنابراین به ازای $\|\mathbf{P}(0)\| \leq \kappa$ ، نامساوی $\mathbf{P}^{-1}(t) \geq (1/\kappa) \mathbf{I}$ برقرار است. لذا

(۵۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

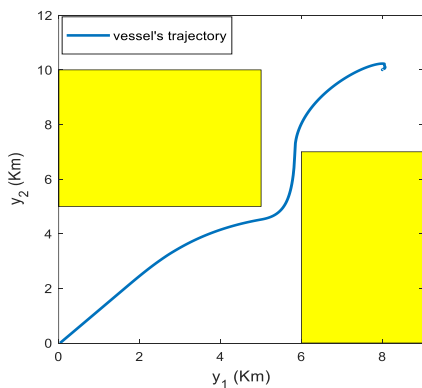
قیدهایی که به صورت تابعی از تمام حالت‌ها هستند را نیز در نظر گرفت. از این رو، قید بهینه‌سازی مساله (۳۳) با فرض $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [1 - x_1^2/l_a^2 - x_2^2/l_b^2 \quad x_1^2/l_a^2 + x_2^2/l_b^2]^T$ به عنوان CBF تشکیل می‌شود.



شکل ۳- پاسخ خروجی‌های مثال ۱



شکل ۴- سیگنال‌های کنترل مثال ۱



شکل ۵- مسیر دوبعدی حرکت کشتی.

$$\delta = 10, \mathbf{P}(0) = 1000\mathbf{I}, \kappa = 1100, \alpha = 100,$$

$$t_f = 2, \rho = 2, l = 32 \text{ m}, \mathbf{a} = [1 \ 20 \ 100]^T, \varepsilon = 0.01,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = [x_6 x_4 \sin x_3 \quad x_6 x_5 \cos x_3 \quad x_6^2 \cos x_3 \sin x_3 \quad x_4 x_5 \cos x_3 \dots \quad (60)$$

$$x_6 \sin x_3 \quad x_4 \cos x_3 \quad x_5 \sin x_3 \quad x_4 x_5 \sin x_3 \quad x_6 x_4 \cos x_3 \dots$$

$$x_6 x_5 \sin x_3 \quad x_6 \cos x_3 \quad x_6^2 \sin x_3 \quad x_4 \sin x_3 \quad x_5 \cos x_3 \quad \cos x_3]^T$$

برای تشکیل قیدهای مساله بهینه‌سازی برای سیستم (۵۹) لازم است که $\Theta(\mathbf{x})$ ، $\bar{\mathbf{y}}_n$ و $\underline{\mathbf{y}}_n$ مطابق تعاریف آن‌ها در (۲۶) نوشته شوند. همچنین، \mathbf{K} و $\Psi(\mathbf{x})$ در بخش ۳-۳ تعریف شده‌اند. برای تخمین نامعینی نیز مدل تطبیقی بخش ۳-۴ با روابط تطبیقی (۴۸) و (۴۹) به کار گرفته می‌شود. بدین ترتیب، با استفاده از معلومات مساله، ساختار PRNN مطابق شکل ۱ و معادلات (۴۰) و (۵۱) تشکیل می‌شود. با توجه به این که هر دو خروجی سیستم، مقید فرض شده‌اند، تعداد سلول‌های شبکه یا همان ابعاد بردار $\boldsymbol{\chi}$ برابر با ۲ است. نمودار پاسخ زمانی سیستم برای روش ارائه شده در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، کشتی توسط کنترل کننده پیشنهادی در زمان و فراهش کمی به نقطه مطلوب می‌رسد که این امر از توانایی بالای این روش در هدایت در حضور نامعینی پارامتری سیستم حکایت دارد. شکل ۴ نیز تغییرات سیگنال‌های کنترل را نشان می‌دهد. نمای دوبعدی مسیر کشتی در شکل ۵ نمایانگر آن است که قیود به خوبی رعایت شده و کشتی بدون برخورد به موانع به سمت مقصد حرکت می‌کند. افزون بر این، شکل ۶ نشان می‌دهد مدل تطبیقی $\mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ تقریب بسیار خوبی از $\Delta(\mathbf{x}, t)$ ارائه می‌دهد. این امر از آن نظر حائز اهمیت است که جمله نامعینی یادشده علاوه بر تابع هزینه در قیدها نیز ظاهر می‌شود و در صورت تخمین نامناسب ممکن است قید مساله به خوبی رعایت نشده و کشتی با ناحیه مانع برخورد نماید.

پیش‌تر بیان شد که در هر زمان نمونه‌برداری، پاسخ مساله (۳۳) از طریق حل معادلات PRNN به دست می‌آید. یعنی اجازه داده می‌شود که PRNN به نقطه تعادلش همگرا شود سپس طبق قضیه ۲ خروجی شبکه به عنوان پاسخ مساله (۳۳) در آن زمان نمونه‌برداری در نظر گرفته می‌شود. شکل ۷ متغیرهای حالت PRNN ($\boldsymbol{\chi}$) را پس از همگرایی در هر زمان نمونه‌برداری حلقه بسته به تصویر می‌کشد. پیش‌تر بیان شد که برای برآورده شدن قیود، کافی است تا شرایط KKT (۳۷) و (۳۹) رعایت شوند. از (۳۷) می‌توان دریافت که هنگامی که قید فعالی وجود ندارد، $\boldsymbol{\chi}$ برابر با صفر می‌شود. این امر در شکل نیز نمایان است به طوری که هنگام مواجهه کشتی با موانع، بردار $\boldsymbol{\chi}$ مقادیر غیر صفر می‌یابد ولی حدوداً پس از $t=1$ هنگامی که دیگر مانعی در مسیر نیست، $\boldsymbol{\chi}$ به صفر همگرا شده است.

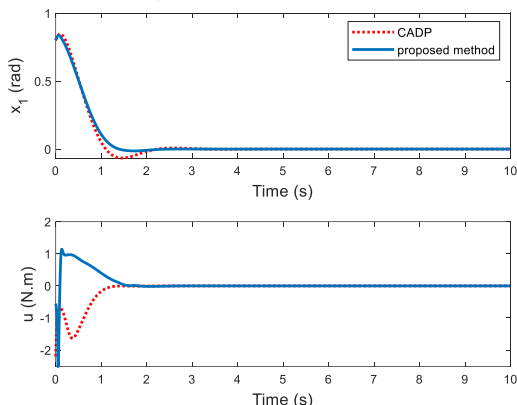
مثال ۲: معادلات دینامیکی سیستم آونگ برابر است با

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ J_e \dot{x}_2 &= -M_e g l_e \sin(x_1) - f_d x_2 + b_e u \end{aligned} \quad (61)$$

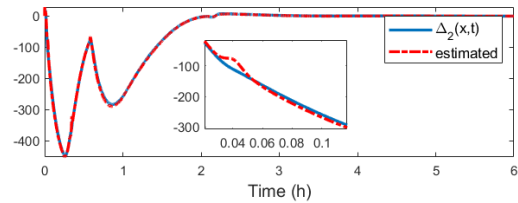
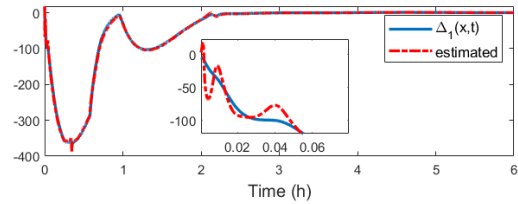
که در آن x_1 زاویه و x_2 سرعت زاویه‌ای آونگ، $M_e = 1/3 \text{ kg}$ و $l_e = 2/3 \text{ m}$ به ترتیب جرم و طول آونگ، $J_e = (4/3)M_e l_e^2 \text{ kg m}^2$ اینرسی آونگ، $f_d = 0.2$ ضریب اصطکاک و $b_e = 1$ است. هدف در این مثال، پایدارسازی مقید سیستم است و قید در نظر گرفته شده به صورت $x_1^2/l_a^2 + x_2^2/l_b^2 \leq 1$ تعریف می‌شود که در آن $l_a = 1.2$ و $l_b = 1.5$. اگرچه در روش پیشنهادی، به قیدهای خروجی سیستم پرداخته شد، می‌توان به سادگی

دینامیکی آن با مشتق‌گیری زمانی تا ظاهر شدن u به دست می‌آید. برای محدودسازی سیگنال کنترل، متغیر حالت جدید x_4 با دینامیک $\dot{x}_4 = -80x_4 + 10\mu$ در نظر گرفته می‌شود. لذا دینامیکی به فرم $\mathbf{x}_a = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ در آن تشکیل می‌شود که در آن $\dot{\mathbf{x}}_a = F_a(\mathbf{x}_a) + G_a(\mathbf{x}_a)\mu$ بردار حالت و μ ورودی آن هستند. CADP با هدف کمینه‌سازی شاخص $J_a = \int_t^\infty e^{\lambda(\eta-t)} [\mathbf{x}_a^T(\eta) \mathbf{Q}_a \mathbf{x}_a(\eta) + \epsilon^2 \mu^2] d\eta$ اجرا می‌شود که در آن ϵ و λ مثبت و \mathbf{Q}_a مثبت نیمه معین است. شبکه‌های نقاد و بازیگر به ترتیب به صورت $\mu = -(1/\epsilon^2) \mathbf{G}_a^T \mathbf{x}_a \nabla \sigma_c^T \mathbf{x}_a \mathbf{W}_a$ و $\mathbf{W}_c \sigma_c(\mathbf{x}_a)$ توصیف می‌شوند و $\sigma_c(\mathbf{x}_a)$ بردار توابع تحریک نقاد است؛ \mathbf{W}_a و \mathbf{W}_c ماتریس‌های وزنی می‌باشند که بر اساس قوانین پیچیده [۳۶] تطبیق می‌یابند. پارامترها و بردار تحریک در CADP با توجه به مرجع یادشده تعیین شده‌اند.

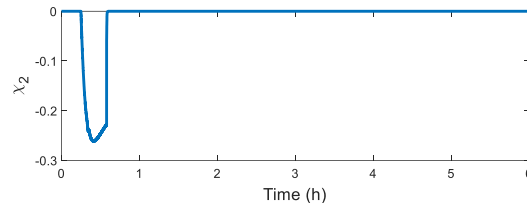
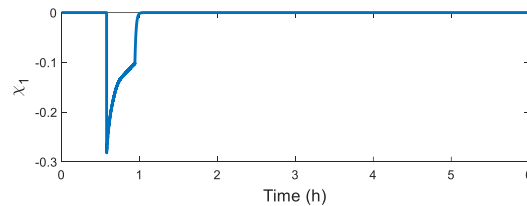
نتایج حاصل از شبیه‌سازی هر دو روش پیشنهادی و CADP با فرض شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = [0.8 \ 1]^T$ در شکل ۸ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پایدارسازی آونگ در روش پیشنهادی، سریعتر و با کیفیت بهتری انجام می‌شود حال آن که این امر توسط سیگنال کنترل نوسانی‌تری انجام می‌شود به طوری که سیگنال کنترل روش ارائه‌شده بر خلاف CADP دارای دامنه‌های مثبت می‌گردد. برتری محسوس کنترل‌کننده پیشنهادی در برآورده‌سازی قید در شکل ۹ نشان داده شده است که در آن افزون بر شرط اولیه فوق، نمودار فاز حلقه‌بسته به ازای $\mathbf{x}(0) = [-0.8 \ -1.4]^T$ نیز برای هر دو روش رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که با شروع از درون ناحیه مقید، حالت‌های سیستم همواره قید را رعایت می‌کنند. اما با انتخاب شرایط اولیه در خارج از ناحیه مقید، کنترل‌کننده CADP پس از ورود به ناحیه یادشده برای لحظاتی از آن خارج می‌شود و بدین ترتیب قید را نقض می‌کند. حال آن که در شرایط یکسان، روش نزدیک به بهینه مقید پیشنهادی پس از ورود به درون فضای مقید در آن باقی می‌ماند. برای بررسی امکان پیاده‌سازی بی‌درنگ روش پیشنهادی، در این شبیه‌سازی به ازای شرایط اولیه $\mathbf{x}(0) = [-0.8 \ -1.4]^T$ حداکثر زمان محاسباتی کنترل‌کننده در نمونه‌های زمانی برابر با 5.2×10^{-3} s به دست آمد که کوچکتر از زمان نمونه‌برداری است. لذا پیاده‌سازی بی‌درنگ روش در زمان‌های نمونه‌برداری کوچک با این مقیاس امکان‌پذیر است. لازم به ذکر است که تمامی شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم‌افزار MATLAB R2018b و رایانه با پردازنده مرکزی Core2(TM) Duo و حافظه 4 گیگابایت انجام شده است.



شکل ۸- تغییرات زاویه آونگ در روش پیشنهادی و CADP



شکل ۶- بردار نامعینی $\Delta(x,t)$ و تخمین آن



شکل ۷- متغیرهای حالت PRNN (x_1 و x_2)

همانند بخش ۳-۲ با قرار دادن $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ در (۲۲) می‌توان به روابط زیر رسید:

$$\bar{y}_n = a_1 (1 - x_1^2/l_a^2 - x_2^2/l_b^2) - (2/l_a^2) x_1 x_2 + (2x_2/l_b^2 J_e) (f_d x_2 + M_e g l_e \sin x_1) \quad (62)$$

$$\underline{y}_n = -a_1 (x_1^2/l_a^2 + x_2^2/l_b^2) - (2/l_a^2) x_1 x_2 + (2x_2/l_b^2 J_e) (f_d x_2 + M_e g l_e \sin x_1) \quad (63)$$

همچنین، $\Theta(\mathbf{x}) = 2b_e x_2 / J_e l_b^2$ به دست می‌آید. با توجه به تک‌قیدی بودن مساله، تعداد سلول‌های PRNN در شکل ۱ یا همان ابعاد متغیر حالت χ برابر با ۱ است. مقادیر تقریبی پارامترهای مدل به صورت $\hat{l}_e = 0.9l_e$ ، $\hat{b}_e = 0.9b_e$ ، $\hat{f}_d = 0.9f_d$ ، $\hat{M}_e = 1$ ، $\hat{M}_e = 1$ و $\hat{J}_e = 1$ تعیین شده‌اند. همچنین پارامترهای کنترل مطابق زیر برگزیده شده‌اند:

$$\delta = 10, \mathbf{P}(0) = 1000\mathbf{I}, \kappa = 1100, \alpha = 10, t_f = 2, \rho = 2, \epsilon = 0.01 \quad (64)$$

$$\mathbf{a} = [1 \ 10]^T, \sigma(\mathbf{x}) = [x_1 \ x_2 \ x_1 x_2 \ \sin x_1 \ x_1 \ \sin x_1 \ x_2 \ \sin x_1]^T$$

زمان نمونه‌برداری $T_s = 0.01$ s فرض شده است. برای بررسی بیشتر کنترل‌کننده پیشنهادی، عملکرد آن در پایدارسازی مقید سیستم یادشده، با کنترل‌کننده نزدیک به بهینه [۳۶] مقایسه می‌شود. روش مرجع یادشده از نوع ADP با ساختار بازیگر-نقاد مقید است. لذا مرجع مناسبی برای ارزیابی روش پیشنهادی محسوب می‌شود. در روش CADP^۹ [۳۶]، قید نامساوی به تساوی $\alpha x_1^2/l_a^2 + x_2^2/l_b^2 - 1 + \gamma e^{-\alpha t} = 0$ اگر $\gamma \geq 0$ با انتخاب تبدیل می‌شود. با انتخاب α همواره کراندار باشد، قید نامساوی اصلی همواره برقرار خواهد بود. از این رو α به عنوان متغیر جدید x_3 برای پایدارسازی به حالت‌ها اضافه می‌گردد و رابطه

^۹ Constrained Adaptive Dynamic Programming

and input saturation”, Journal of the Franklin Institute, vol. 357, no. 6, pp. 3316-3344, 2020.

[8] Y. Zhang, S. Li, L. Liao, "Near-optimal control of nonlinear dynamical systems: a brief survey", Annual Reviews in Control, vol. 47, pp. 71-80, 2019.

[۹] فاطمه پیروزمند، نعمت‌اله قهرمانی، محمدرضا عاروان، «طراحی کنترل-کننده پیش‌بین مقاوم با استفاده از نامساوی خطی ماتریسی برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۴، شماره ۴، صفحات ۹-۲۱، ۱۳۹۳.

[10] S. Yu, C. Maier, H. Chen, F. Allgower, "Tube MPC scheme based on robust control invariant set with application to Lipschitz nonlinear systems", Systems & Control Letters, vol. 62, no. 2, pp. 194-200, 2013.

[11] H. Li, Y. Shi, "Event-triggered robust model predictive control of continuous-time nonlinear systems", Automatica, vol. 50, no. 5, pp. 1507-1513, 2014.

[۱۲] فرهاد بیات، صالح مبین، «ردیابی مقید مبتنی بر کنترل‌کننده پیش‌بین با هزینه محاسباتی کم: رویکرد برنامه‌ریزی پارامتری»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۶، شماره ۴، صفحات ۳۹-۴۷، ۱۳۹۵.

[13] W. Chen, D. Balance, P. Gawthrop, "Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach", Automatica., vol. 39, no. 4, pp. 633-641, 2003.

[14] W. Chen, "Closed-form nonlinear MPC for multivariable nonlinear systems with different relative degree", American Control Conference, , 2003.

[15] J. Yang, W. X. Zheng, S. Li, B. Wu, M. Cheng, "Design of a prediction-accuracy-enhanced continuous-time MPC for disturbed systems via a disturbance observer", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 62, no. 9, pp. 5807-5816, 2015.

[16] H. Gouta, N. Barhoumi, S. H. Saïd, F. M'Sahli, "Generalized predictive control for a coupled four tank MIMO system using a continuous-discrete time observer", ISA Transactions, vol. 67, pp. 280-292, 2017.

[17] C. Liu, W. H. Chen, J. Andrews, "Tracking control of small-scale helicopters using explicit nonlinear MPC augmented with disturbance observers", Control Engineering Practice., vol. 20, no. 3, pp. 258-268, 2012.

[18] Y. Zhang, S. Li, X. Liu, "Adaptive near-optimal control of uncertain systems with application to underactuated surface vessels", IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 26, no. 4, pp. 1204-1218, 2018.

[19] Y. Zhang, S. Li, X. Jiang, "Near-optimal control without solving HJB equations and its applications", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 65, no. 9, pp. 7173-7184, 2018.

[20] Y. Zhang, S. Li, X. Liu, "Neural network-based model-free adaptive near-optimal tracking control for a class of nonlinear systems", IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 29, no. 12, pp. 6227-6241, 2018.

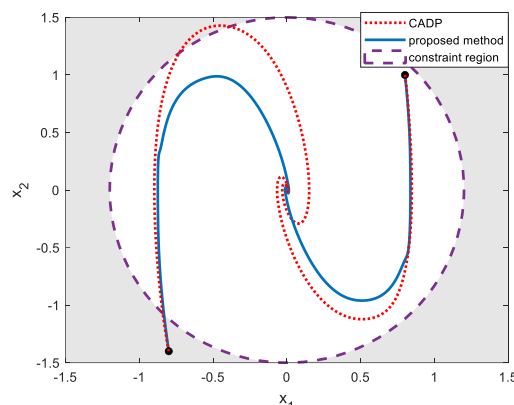
[21] S. Li, Y. Yan, J. Yang, Z. Sun, H. Yu, "Nonlinear-disturbance-observer-enhanced MPC for motion control systems with multiple disturbances", IET Control Theory & Applications, vol. 14, no. 1, pp. 63-72, 2020.

[22] Y. Zhang, S. Li, "Time-scale expansion-based approximated optimal control for underactuated systems using projection neural networks", IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part-A: Systems, vol. 48, no. 11, pp. 1957-1967, 2018.

[23] S. Rad-Moghadam, M. Farrokhi, "Optimal output feedback control of a class of uncertain systems with input constraints using parallel feedforward compensator" Journal of the Franklin Institute, vol. 357, no. 18, pp. 13449-13476, 2020.

[24] S. Liu, J. Wang, "A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application", IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 17, no. 6, pp. 1500-1510, 2006.

[25] H. Zhang, Z. Wang, D. Liu, "A comprehensive review of stability analysis of continuous-time recurrent neural networks", IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 25, no. 7, pp. 1229-1262, 2014.



شکل ۹- نمودار فاز به‌ازای شرایط اولیه متفاوت در روش پیشنهادی و CADP

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل‌کننده‌ای نزدیک به بهینه و تطبیقی برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی ارائه شد. ملاحظه شد که روش یادشده فارغ از معادله HJB و پیچیدگی روش‌های برنامه‌ریزی پویا تطبیقی طراحی می‌شود. در مقایسه با سایر کنترل‌کننده‌های همدسته ارائه‌شده تاکنون نیز این روش از توانایی برآورده‌سازی قیده‌های وابسته به خروجی و حالت برخوردار است. همچنین، ماهیت تطبیقی روش موجب می‌شود تا با نامعینی سیستم مقابله شده و مدل با توجه به شرایط هر لحظه به‌روز گردد. به منظور حل برخط بهینه‌سازی مقید از شبکه عصبی بازگشتی تصویر استفاده شد که این امر دستیابی به حلی بسته، سادگی محاسبات و سهولت پیاده‌سازی در بسترهای مختلف بدون نیاز به-کارگیری جعبه‌ابزارهای اضافی را فراهم آورد. در پایان، کارایی روش به کمک دو مثال کنترل مسیر کشتی زیرتحریک و پایدارسازی آونگ بررسی شد. ابتدا کارایی روش در هدایت کشتی به مقصدی از پیش تعیین‌شده و بدون برخورد با موانع نشان داده شد. سپس، برتری روش در پایدارسازی مقید آونگ در قیاس با کنترل‌کننده CADP [۲۶] با در نظر گرفتن نامعینی‌های مدل بررسی شد. پژوهش‌های آتی شامل توسعه روش پیشنهادی برای کلاس گسترده‌تری از سیستم‌ها است. برای مثال، سیستم‌هایی با دینامیک داخلی ناپایدار می‌تواند موضوع کارهای آینده در این زمینه باشد.

مراجع

[1] H. G. Zhang, X. Zhang, L. Yan-Hong, and Y. Jun, "An overview of research on adaptive dynamic programming", Acta Automatica Sinica, vol. 39, no. 4, pp. 303-311, 2013.

[2] J. Zhao, J. Na, G. Gao, "Robust tracking control of uncertain nonlinear systems with adaptive dynamic programming", Neurocomputing, vol. 471, pp. 21-30, 2022.

[3] Y. Yang, W. Gao, H. Modares, C. Z. Xu, "Robust actor-critic learning for continuous-time nonlinear systems with unmodeled dynamics", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 30, no. 6, pp. 2101-2112, 2022.

[4] T. Wang, S. Sui, S. H. Tong, "Data-based adaptive neural network optimal output feedback control for nonlinear systems with actuator saturation", Neurocomputing, vol. 247, no. 19, pp. 192-201, 2017.

[5] P. Liu, H. Zhang, H. Ren, C. Liu, "Online event-triggered adaptive critic design for multi-player zero-sum games of partially unknown nonlinear systems with input constraints", Neurocomputing, vol. 462, pp. 309-319, 2021.

[6] Z. Marvi, B. Kiumarsi, "Safe reinforcement learning: a control barrier function optimization approach", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 31, no. 6, pp. 1923-1940, 2021.

[7] Y. Yang, D. W. Ding, H. Xiong, Y. Yin, D. C. Wunsch, "Online barrier-actor-critic learning for H ∞ control with full-state constraints

- [31] X. Xu, "Constrained control of input-output linearizable systems using control sharing barrier functions", *Automatica*, vol. 87, pp. 195-201, 2018.
- [32] Q. Nguyen, K. Sreenath, "Exponential control barrier functions for enforcing high relative-degree safety-critical constraints", *American Control Conference*, Boston, USA, 2016.
- [33] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, 1st Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [34] J. J. Hopfield, D. W. Tank, "Neural computation of decisions in optimization problems", *Biological Cybernetics*, vol. 52, no. 3, pp. 141-152, 1985.
- [35] K. D. Do, Z. P. Jiang, J. Pan, "Underactuated ship global tracking under relaxed conditions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 9, pp. 1529-1536, 2002.
- [36] Q. Y. Fan, G. H. Yang, "Adaptive nearly optimal control for a class of continuous-time nonaffine nonlinear systems with inequality constraints", *ISA Transactions*, vol. 66, pp. 122-133, 2017.
- [26] L. Jin, S. Li, B. Hu, M. Liu, "A survey on projection neural networks and their applications", *Applies Soft Computing Journal*, vol. 76, pp. 533-544, 2019.
- [27] Z. Yan, X. Le, J. Wang, "Tube-based robust model predictive control of nonlinear systems via collective neurodynamic optimization", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 7, pp. 4377-4386, 2016.
- [28] Z. Peng, J. Wang, Q. L. Han, "Path-following control of autonomous underwater vehicles subject to velocity and input constraints via neurodynamic optimization", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, no. 11, pp. 8724-8732, 2018.
- [29] J. J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, 1st Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [30] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.