

طراحی کنترل کننده مقاوم برای دسته‌ای از سیستم‌های غیر خطی متغیر با زمان با رویکرد بهینگی

فاطمه پیشکاری^۱، کارشناسی ارشد؛ طاهره بینازاده^۲، دانشیار

۱- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - f.pishkari@sutech.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - binazadeh@sutech.ac.ir

چکیده: در این مقاله، یک کنترل کننده جدید برای پایداری مجانبی دسته‌ای از سیستم‌های غیر خطی متغیر با زمان در حضور عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی، با رویکرد بهینگی ارائه می‌شود. کنترل کننده پیشنهادی، دارای دو بخش نامی و مقاوم است که در طراحی هر دو بخش آن، ایده‌های جدیدی ارائه شده است. در قسمت اول، تابع لیاپانوف کنترلی جدیدی برای طراحی کنترل کننده نامی ارائه می‌شود. ساختار تابع لیاپانوف کنترلی پیشنهادی، متفاوت از نسخه‌های معمول تابع‌های لیاپانوف کنترلی است. این تابع به نحوی طراحی می‌شود که سطح لغزش به طور مستقیم در آن ظاهر می‌شود و بدین ترتیب، تلفیق بخش مقاوم (که براساس تکنیک کنترل مد لغزشی طراحی می‌شود) با بخش نامی را ممکن می‌سازد. این تلفیق، منجر به یک قانون کنترلی زیر بهینه متفاوت می‌شود که بخش گسسته آن براساس مقدار لحظه‌ای سطح لغزش سوئیچ می‌کند و ترم‌های پیوسته براساس رویکرد بهینگی طراحی می‌شود. در انتهای مقاله نیز، به منظور تصدیق کارایی و عملکرد رویکرد پیشنهادی و تایید دستاوردهای تئوری، این کنترل کننده به یک سیستم پاندول اینرسی غیر خطی متغیر با زمان اعمال و نتایج شبیه سازی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع لیاپانوف کنترلی، رویکرد بهینگی، سیستم‌های غیر خطی متغیر با زمان، سطح لغزش.

Roust Controller Design for a Class of Nonlinear Time-Varying Systems with Optimality Approach

F. Pishkari¹, MSc; T. Binazadeh², Associate professor

1-Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: f.pishkari@sutech.ac.ir

2-Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: binazadeh@sutech.ac.ir

Abstract: In this paper, a novel controller is presented with an optimal approach for asymptotic stabilizing of a class of nonlinear time-varying systems in presence of model uncertainties and external disturbances. The proposed controller has two nominal and robust parts and there are new ideas in designing of both of them. In the first part, a new control Lyapunov function is presented for the nominal controller design. The suggested structure of the proposed control Lyapunov function is different from the common versions. This function is designed in a way that a sliding surface equation is appeared in it directly and therefore, provides the possibility of combining the robust part (which is designed based on sliding mode control technique) with nominal one. This combination leads to a different sub-optimal control law where its discontinuous part switches based on the moment value of the sliding surface and the continuous terms will be designed based on the optimality approach. At the end of the paper, this controller is applied to a nonlinear time-varying inertia pendulum and the simulation results are given to confirm the performance and efficiency of proposed approach and verifying the theoretical achievements.

Keywords: Control lyapunov function (CLF), optimality approach, nonlinear time-varying systems, sliding surface.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۹/۱۸

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۲۱ و ۱۳۹۸/۰۲/۰۸ و ۱۳۹۸/۰۳/۱۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۱۹

نام نویسنده مسئول: طاهره بینازاده

نشانی نویسنده مسئول: ایران - شیراز - خیابان مدرس - دانشگاه صنعتی شیراز - دانشکده مهندسی برق و الکترونیک.

۱- مقدمه

در دهه های اخیر، آنالیز و کنترل سیستم های متغیر با زمان (ناخودگردان)^۱ یکی از مسائل پیچیده و مهم علم کنترل بوده است. اغلب تحقیقاتی مربوط به کنترل، بر روی سیستم های غیر خطی نامتغیر با زمان (خودگردان)^۲ [۵-۱] یا سیستم های خطی متغیر با زمان [۶-۷] متمرکز شده اند و در مقایسه با سیستم های مذکور، در حوزه سیستم های غیر خطی متغیر با زمان، پژوهش های کمتری انجام شده است و یا برای مسأله های کاربردی خاص، کنترل کننده هایی طراحی شده است [۸-۱۰]. در حالت کلی هنگامی که سیستم تحت کنترل، فرم کلی غیر خطی و متغیر با زمان را می یابد، ممکن است تحلیل آن بسیار پیچیده تر از حالتی باشد که سیستم غیر خطی متغیر با زمان نباشد.

از سوی دیگر، در علم کنترل، طراحی کنترل کننده بهینه برای سیستم های غیر خطی امری بسیار مهم است. حل مسائل کنترلی بهینه، هنگامی که سیستم به صورت دینامیک های غیر خطی مدل شده باشد، منجر به حل معادله همیلتون- جکوبی- بلمن^۳ می شود [۱۱-۱۲]. متأسفانه، در کل، معادلات HJB حل تحلیلی ندارند. به همین دلیل، در تکنیک های متعدد، پاسخ های مختلفی بر مبنای حل عددی یا تقریبی این معادلات ارائه شده است که منجر به کنترل کننده های زیر بهینه^۴ می شوند [۱۳-۱۵]. در برخی از این تکنیک ها، کنترل کننده های زیر بهینه در قالب سری هایی با بینهایت ترم حاصل می شوند که ساختار پیچیده ای دارند [۱۶-۱۷]. در حالیکه، برای بدست آوردن یک کنترل کننده فرم بسته، تنها ممکن است تعداد محدودی از ترم های این سری ها انتخاب شوند. این نکته قابل توجه است که انتخاب ترم های محدود از میان بینهایت ترم منجر به پاسخی زیر بهینه می شود که در حالت کلی اثبات پایداری آن نیز با چالش هایی مواجه است. برای مثال، در مرجع [۱۷] نشان داده است که برای یک سیستم غیر خطی ساده، قانون کنترلی ناشی از انتخاب کمتر از ۲۱ ترم از سری های پاسخ، منجر به یک سیستم حلقه بسته ناپایدار می شود. یکی دیگر از رویکردهای کنترل زیر بهینه برای سیستم های غیر خطی، روش های عددی است [۱۸-۲۰]. مشکل اصلی این روش ها، عدم وجود فرم بسته برای کنترل کننده و وابستگی آن به شرایط اولیه است.

از سوی دیگر، تاکنون بیشتر پژوهش ها بر روی یافتن پاسخ تقریبی معادلات HJB مرتبط با سیستم های غیر خطی نامتغیر با زمان متمرکز شده اند. این در حالی است که در عمل، بسیاری از سیستم ها دارای معادلات غیر خطی و متغیر با زمان هستند. طراحی کنترل کننده بهینه برای این سیستم ها، منجر به حل معادلات HJB متغیر با زمان می شود که به مراتب پیچیده تر و دشوارتر از حل معادلات HJB مربوط به سیستم های نامتغیر با زمان است و بالطبع، این معادلات نیز، حل تحلیلی ندارد [۱۲].

تابع لیاپانوف کنترلی^۵ یکی از روش های مؤثر در طراحی کنترل کننده با رویکرد بهینگی برای سیستم های غیر خطی است. سونتاک در سال ۱۹۸۹ در مرجع [۲۱] نشان داد که اگر یک CLF برای سیستم غیر خطی یافت شود، یک کنترل کننده بر مبنای آن وجود دارد که سیستم را به طور مجانبی، پایدار می سازد. به علاوه، رویکرد مذکور بر اساس معادله HJB سیستم، یک پاسخ زیر بهینه ارائه می دهد [۲۱-۲۲]. در سال ۱۹۹۹ نسخه متغیر با زمان فرمول سونتاک توسط پرایمیز^۶ برای کنترل سیستم های غیر خطی متغیر با زمان با در نظر گرفتن تابع هزینه مورد نظر توسعه داده شد [۲۳].

از طرف دیگر توجه به این نکته حائز اهمیت است که معادلات HJB برای سیستم های نامی (بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت های مدل و اغتشاشات خارجی) تعریف شده اند این در حالی است که در عمل همیشه اختلافاتی بین دینامیک های واقعی و مدل ریاضی سیستم وجود دارد. این اختلاف ها و عدم تطابق ها معمولاً ناشی از اغتشاشات خارجی، پارامترهای نامعلوم سیستم و دینامیک های مدل نشده سیستم هستند [۲۴]. لذا ارائه کنترل کننده مقاوم برای سیستم های غیر خطی متغیر با زمان، به نحوی که علاوه بر تضمین پایداری مجانبی سیستم، یک تابع هزینه را نیز به منظور دستیابی به ویژگی های مطلوب پاسخ گذرا، در روند طراحی لحاظ نماید، بسیار مطلوب است.

در این مقاله، رویکردی جدید برای طراحی کنترل کننده پایدار ساز مقاوم برای یک دسته کلی از سیستم های غیر خطی متغیر با زمان ارائه می شود. این کنترل کننده دارای دو بخش نامی و مقاوم است. قانون کنترلی نامی، بر اساس ارائه یک تابع لیاپانوفی کنترلی جدید طراحی می گردد. با استفاده از تعریف یک سطح لغزش^۷ در ساختار تابع لیاپانوف کنترلی پیشنهادی، یک قانون کنترلی غیر خطی ارائه می شود. این قانون، بر اساس مقدار سطح لغزش مذکور، سوئیچ می کند. بر اساس این سطح، هنگامی که حالت های سیستم بر روی سطح لغزش قرار گرفتند، قانون کنترلی نامی صفر بوده و تنها بخش مقاوم قانون کنترلی عمل می کند. بخش مقاوم، بر اساس تکنیک کنترل مد لغزشی^۸ طراحی می شود؛ اما به دلیل استفاده از سطح لغزش در تابع لیاپانوف کنترلی، بخش نامی دارای ساختار متفاوتی نسبت به نسخه های کلاسیک کنترل کننده مد لغزشی است. بدین ترتیب با ادغام رویکرد بهینگی در پیشنهاد تابع لیاپانوف کنترلی با رویکرد مقاوم در طراحی کنترل کننده مد لغزشی، یک کنترل کننده پایدار ساز برای سیستم های غیر خطی متغیر با زمان و دارای عدم قطعیت ارائه می شود. در انتهای مقاله، کنترل کننده پیشنهادی، به یک سیستم پاندول اینرسی غیر خطی ناخودگردان اعمال می شود. در پاندول مذکور گوی بر روی میله بالا و پایین می شود و طول مؤثر میله^۹ با زمان تغییر می کند که منجر به ایجاد یک سیستم غیر خطی متغیر با زمان می گردد. نتایج شبیه سازی کارایی رویکرد پیشنهادی و نتایج دستاوردهای تئوری مقاله را تأیید می کند.

۲- تعاریف اولیه

سیستم غیرخطی متغیر با زمان (۱) به همراه تابع هزینه (۲) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, t) + h(x, t)u(t) \quad (۱)$$

$$J = \int_0^\infty (l(x, t) + u(t)^2) dt \quad (۲)$$

که در آن $x \in D \subset R^n$ بردار حالت (D شامل مبدأ $x=0$ است. مبدأ، نقطه تعادل سیستم نامی نامقید است)، $f: R^n \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ و $h: R^n \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ توابعی تکه‌ای پیوسته در t که به ازای هر $x \in D$ لیپشیتز هستند. همچنین، $u(t) \in R$ ورودی کنترلی و $l(x, t)$ تابعی مثبت معین است و به نحوی انتخاب می‌شود که پاسخ گذرای مطلوب برای متغیرهای حالت سیستم حاصل شود.

با در نظر گرفتن یک تابع پیوسته دیفرانسیل پذیر $V(x, t)$ ، توابع a و b به صورت زیر تعریف می‌شوند ($\partial V / \partial x$ یک بردار سطری است):

$$a(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t); \quad b(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} h(x, t) \quad (۳)$$

قانون کنترلی زیربینه $u(t)$ را می‌توان به نحوی طراحی کرد که سیستم حلقه بسته حاصل، با در نظر گرفتن تابع هزینه (۲) پایدار مجانبی شود. در قضیه زیر این قانون کنترلی ارائه شده است.

قضیه ۱ [۲۳]: سیستم (۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید $\gamma(\|x\|)$ یک تابع متعلق به کلاس K است. اگر تابع لیپانوف $V(x, t) = D \times [0, \infty) \rightarrow R$ به نحوی وجود داشته باشد که

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall (x, t) \in D \times R^+ \quad (۴)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a(x, t) \leq -\gamma(\|x\|), \quad \text{where } b(x, t) = 0 \quad (۵)$$

که در آن $\alpha_1(\cdot)$ و $\alpha_2(\cdot)$ توابع متعلق به کلاس K هستند و توابع a و b ، طبق تعاریف (۳) و براساس تابع لیپانوف $V(x, t)$ محاسبه می‌گردند؛ آنگاه، $V(x, t)$ یک CLF است و براساس آن، قانون کنترلی زیربینه به صورت زیر تعریف می‌شود که مبدأ سیستم (۱) را پایدار مجانبی می‌سازد:

$$u(t) = k(x, t) = \begin{cases} -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial t} + a(x, t)\right) + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial t} + a(x, t)\right)^2 + l(x, t)b^2(x, t)}}{b(x, t)} & b(x, t) \neq 0 \\ 0 & b(x, t) = 0 \end{cases} \quad (۶)$$

که $l(x, t)$ در تابع هزینه (۲) تعریف شده است و تنظیم مناسب آن منجر به مشخصه‌های مطلوب در پاسخ گذرای سیستم می‌گردد. از آنجایی که جزئیات اثبات در مرجع [۲۳] آورده شده است، صرفاً به ذکر این نکته اکتفا می‌گردد که با جایگذاری قانون کنترلی (۶) در معادلات (۱)، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته حاصل براساس تابع لیپانوف $V(x, t)$ اثبات می‌گردد. از نقطه نظر عملی، علاوه بر

پایداری مجانبی متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته، ورودی کنترلی و متغیرهای حالت باید پاسخ گذرای قابل قبولی را نیز داشته باشند. مشخصه‌های پاسخ گذرا نظیر میزان نوسانی بودن و زمان نشست از معیارهای مهمی است که تنظیم مناسب تابع $l(x, t)$ در حصول آن تاثیرگذار است.

نکته ۱: سیستم غیرخطی (۱) را در نظر بگیرید. اگر تابع مثبت معین و پیوسته دیفرانسیل پذیر $V(x): D \rightarrow R$ موجود باشد به نحوی که شرط (۵) را برآورده سازد، یعنی

$$\dot{V}(x) = a(x, t) \leq -\gamma(\|x\|), \quad \text{where } b(x, t) = 0 \quad (۷)$$

آنگاه، قانون کنترلی (۶) (که ترم‌های a و b آن براساس تابع $V(x)$ تعریف می‌شود) پایداری مجانبی سیستم (۱) را تضمین می‌کند. انتخاب تابع لیپانوف کنترلی به این شکل موجب تولید قانون کنترلی با ساختاری ساده می‌شود. چرا که ترم $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ است. این نکته، به راحتی با جایگذاری $V(x)$ به جای $V(x, t)$ در قضیه ۱ نتیجه می‌شود.

۳- توصیف سیستم و فرموله‌سازی مسئله

یک سیستم غیرخطی ناخودگردان دارای عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی سازگار به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) + h_n(x, t)(u(t) + d(x, t)) \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $x \in D \subset R^n$ بردار حالت، D شامل مبدأ $x=0$ است که نقطه تعادل سیستم نامی نامقید است، توابع $f_n: R^n \times [0, \infty) \rightarrow R$ و $h_n: R^n \times [0, \infty) \rightarrow R$ توابعی لیپشیتز در x و تکه‌ای پیوسته به ازای هر $x \in D$ در t هستند. همچنین، $u(t) \in R$ ورودی کنترلی و تابع غیرخطی نامعلوم $d(x, t)$ بیانگر عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی است.

هدف طراحی قانون کنترلی مقاوم و پایدارسازی مجانبی سیستم بالا است به نحوی که در آن رویکرد بهینگی برای بهبود پاسخ‌های گذرا و حداقل سازی انرژی کنترلی، در نظر گرفته شود.

این دسته از سیستم‌های غیرخطی ناخودگردان، دسته وسیعی از سیستم‌ها را شامل می‌شود. زیرا، این دسته از سیستم‌ها، نه تنها برخی از سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان را در بر دارد، بلکه، مسائل ردیابی سیگنال‌های مرجع متغیر با زمان ($r(t)$) توسط سیستم‌های خودگردان را نیز پوشش می‌دهد. در این مسائل، خطا ($e(t)$) و مشتقات آن تا مرتبه $p-1$ که در آن، p درجه نسبی سیستم است، به عنوان متغیرهای حالت جدید تعریف می‌شوند. بدیهی است که، معادلات فضای حالت این متغیرهای جدید تا $p-1$

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1) \times 1},$$

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} AX_1 + g\sigma \\ f_n(x, t) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (14)$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times 1}, h(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x, t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

و ماتریس هرویتز A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \dots & -c_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \quad (15)$$

در این بخش، هدف طراحی قانون کنترلی پایدار ساز مجانبی برای سیستم نامی (۱۰) می باشد که به فرم (۱۳) بازنویسی شده است؛ به نحوی که تابع هزینه زیر را حداقل سازد:

$$J = \int_0^\infty (l(x, t) + u_1(t)^2) dt \quad (16)$$

در راستای برآورده سازی این هدف، از استراتژی CLF ایده گرفته و با معرفی یک تابع لیاپانوف جدید، یک قانون کنترلی پایدار ساز مجانبی با رویکرد بهینگی ارائه می شود. در ادامه، ابتدا با در نظر گرفتن تابع پیوسته دیفرانسیل پذیر $V(x)$ ، و تعریف توابع a و b به صورت (۱۷)، قانون کنترلی پایدار ساز مجانبی برای سیستم (۱۳) ارائه می گردد؛ سپس، بهینگی این رویکرد مورد بررسی قرار می گیرد.

$$a(x, t) = L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t), \quad (17)$$

$$b(x, t) = L_h V = \frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)$$

قضیه ۲: سیستم غیر خطی متغیر با زمان (۱۳) را در نظر بگیرید. اگر تابع مثبت معین و پیوسته دیفرانسیل پذیر $V(x)$ ارائه شده در رابطه (۱۸)، به عنوان یک تابع لیاپانوف کنترلی لحاظ شود.

$$V(x) = V_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (18)$$

$$= X_1^T P X_1 + \frac{1}{2} \sigma^2$$

که در آن $\sigma(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n-1} x_{n-1} + x_n$ است. همچنین، پاسخ یکتای معادله لیاپانوف $PA + A^T P = -Q$ با هر $P = P^T > 0$ دلخواه است و $Q = Q^T > 0$ ماتریس تعریف شده در (۱۵) می باشد. آنگاه، با توجه به تعاریف (۱۷) و به ازای $V(x)$ (۱۸)، قانون کنترلی زیر، پایداری مجانبی سیستم (۱۳) را تضمین می کند.

$$u_1(t) = k_1(x, t)$$

$$= \begin{cases} -\frac{a(x, t) + \sqrt{a(x, t)^2 + l(x, t)(\sigma h_n)^2}}{\sigma h_n} & \text{where } \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{where } \sigma = 0 \end{cases}$$

آمین متغیر مشابه معادلات (۸) هستند. همچنین، از آنجا که در مشتق ρ آمین متغیر حالت $(\dot{e}_\rho(t))$ ، مشتق ρ ام سیگنال مرجع متغیر با زمان $(r^{(\rho)}(t))$ به طور مستقیم ظاهر می شود، لذا، معادله آن مشابه معادله $\dot{x}_n$ است. بنابراین، معادلات فضای حالت جدید که همان معادلات فضای حالت خطا است، ساختار معادلات (۸) و بعدی برابر درجه نسبی سیستم دارند.

۴- طراحی کنترل کننده

به منظور برآورده سازی اهداف کنترلی، کنترل کننده ای به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (9)$$

که در آن $u_1(t)$ ترم نامی و $u_2(t)$ ترم مقاوم قانون کنترلی است که در ادامه روند طراحی آن ها ارائه می شود.

۴-۱- طراحی کنترل کننده نامی

مدل نامی سیستم (۸) را می توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) + h_n(x, t)u_1(t) \end{aligned} \quad (10)$$

از طرفی، با در نظر گرفتن سطح لغزش $\sigma(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n-1} x_{n-1} + x_n$ که در آن مقادیر c_i ها به نحوی انتخاب می شوند که ماتریس A در رابطه ۱۵ هرویتز گردد، می توان رابطه زیر را بر روی سطح لغزش $\sigma(t)$ بین متغیرهای حالت سیستم نوشت:

$$\dot{x}_n = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_{n-1} x_{n-1} + \sigma \quad (11)$$

بنابراین، سیستم (۱۰) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_{n-1} x_{n-1} + \sigma(t) \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) + h_n(x, t)u_1(t) \end{aligned} \quad (12)$$

معادلات فوق در ساختار زیر قابل ارائه است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = f(x, t) + h(x, t)u_1(t) \quad (13)$$

که در آن

(۱۹)

$$a(x,t)|_{\sigma=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX_1 \\ f_n(x,t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial X_1} AX_1$$

از طرفی، با توجه به رابطه (۱۳)، برای نقاطی که $\sigma=0$ است، $\dot{X}_1 = AX_1$ می‌باشد؛ بنابراین، با توجه به این مطلب و همچنین، با توجه به قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای تساوی زیر برقرار است:

$$a(x,t)|_{\sigma=0} = \frac{\partial V_1}{\partial X_1} AX_1 = \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \dot{X}_1|_{\sigma=0}$$

$$= X_1^T (PA + A^T P) X_1 = -X_1^T Q X_1 \quad (23)$$

لذا، در نقاطی که $b(x,t)=0$ یا به عبارتی $\sigma=0$ است، با انتخاب $\gamma(\|x\|)|_{\sigma=0} = -X_1^T Q X_1$ شرط (۷) محقق می‌شود. بنابراین، تابع $V(x)$ پیشنهادی در (۱۸)، یک تابع لیاپانوف کنترلی جدید است. حال، با توجه به کنترل‌کننده (۱۹)، سیستم غیرخطی متغیر با زمان حلقه بسته به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x} = f(x,t) + h(x,t)k_1(x,t) \quad (24)$$

چون، سیستم غیرخطی (۲۴)، سیستمی متغیر با زمان است، لذا، اگر $\dot{V} \leq -W(x)$ باشد که در آن $W(x)$ تابعی مثبت معین است، آنگاه براساس قضیه ۴ که در پیوست ذکر شده است، سیستم (۲۴) پایدار مجانبی است. لذا، با مشتق‌گیری از $V(x)$ ، در راستای مسیرهای سیستم (۲۴) و جایگزینی $k_1(x,t)$ از رابطه (۱۹)، دو حالت اتفاق می‌افتد. حالت اول، به‌ازای نقاطی است که $\sigma \neq 0$ است. در این نقاط، تساوی زیر برقرار است:

$$\dot{V}(x) = -\sqrt{a(x,t)^2 + l(x,t)(\sigma h_n)^2} \quad \text{where } \sigma \neq 0 \quad (25)$$

همان‌طور که از رابطه (۲۵) مشاهده می‌شود، چون عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است، $\dot{V}(x)$ همواره منفی است و با انتخاب $W(x) = \sqrt{a(x,t)^2 + l(x,t)(\sigma h_n)^2}$ ، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته (۲۴) در نقاطی که $\sigma \neq 0$ است، اثبات می‌شود. همچنین، در نقاطی که $\sigma=0$ است، با مشتق‌گیری از $V(x)$ ، تساوی زیر برقرار می‌شود:

$$\dot{V}(x) = a(x,t) \quad \text{where } \sigma=0 \quad (26)$$

و همان‌طور که در طی رابطه (۲۳) نشان داده شد، چون $V(x)$ یک تابع لیاپانوف کنترلی است، در نقاطی که $\sigma=0$ می‌باشد، $a(x,t)|_{\sigma=0} = -X_1^T Q X_1$ است. بنابراین، برای همه نقاط ناحیه $D \times [0, \infty)$ ، مشتق زمانی تابع لیاپانوف شرط پایداری مجانبی را برآورده می‌سازد و سیستم غیرخطی متغیر با زمان حلقه بسته (۲۴)، پایدار مجانبی است. در ادامه، نشان داده می‌شود که قانون کنترلی (۱۹) نسبت به معادله HJB متغیر با زمان یک پاسخ زیربهبینه است.

اثبات: در این قسمت، ابتدا ثابت می‌شود که $V(x)$ تعریف‌شده در (۱۸) یک تابع لیاپانوف کنترلی برای سیستم غیرخطی متغیر با زمان (۱۳) است. براساس نکته ۱، برای اینکه این امر صادق باشد، کافی است، تابع $V(x)$ ، شرط (۷) را برآورده سازد؛ چرا که، تابع $V(x)$ ، تنها تابعی از حالت‌های سیستم است و متغیر زمان به‌طور مستقیم در آن ظاهر نمی‌شود. برای بررسی کردن صحت این شرط، ابتدا عبارات $a(x,t)$ و $b(x,t)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$a(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial(1/2\sigma^2)}{\partial x} f(x,t)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} f(x,t) + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX_1 + g\sigma \\ f_n(x,t) \end{bmatrix} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX_1 + g\sigma \\ f_n(x,t) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} & \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX_1 + g\sigma \\ f_n(x,t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

9

$$b(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x} h(x,t)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} h(x,t) + \frac{\partial(1/2\sigma^2)}{\partial x} h(x,t)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} h(x,t) + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} h(x,t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x,t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} & \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \sigma}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \sigma}{\partial x} h(x,t) = h_n(x,t)} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x,t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \sigma \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \sigma}{\partial x} h(x,t) = h_n(x,t)} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x,t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \sigma h_n(x,t) \quad (21)$$

حال، باید نشان داد که در نقاطی که $b(x,t)=0$ است یعنی $\sigma h_n(x,t)=0$ شرط (۷) برقرار است. با توجه به اینکه، $h_n \neq 0$ در نظر گرفته شده است، لذا، صفر بودن b ، صفر بودن σ را نتیجه می‌دهد. بنابراین، در این نقاط، رابطه زیر برقرار است:

و به ترم نامی که در بخش قبل ارائه شد، افزوده می شود. اگر بخش مقاوم کنترل کننده به صورت زیر پیشنهاد شود:

$$u_2(t) = -\rho h_n^{-1}(x, t) \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (32)$$

که شرط زیر برای بهره ρ برقرار است.

$$\rho \geq \varphi(x) + \rho_0 \quad (33)$$

و در آن، ثابت $\rho_0 > 0$ است و تابع معلوم و مثبت $\varphi(x)$ ، باند بالای ترم نامعلوم زیر فرض می شود:

$$|h_n(x, t)d(x, t)| \leq \varphi(x) \quad (34)$$

در این صورت، کنترل کننده غیرخطی مقاوم با رویکرد بهینگی را می توان برای سیستم غیرخطی و متغیر با زمان (۸) برا ساس قضیه زیر ارائه داد.

قضیه ۳: سیستم غیرخطی متغیر با زمان و نامعین (۸) را در نظر بگیرید. قانون کنترلی زیر پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته (۸) را با رویکرد بهینگی تضمین می کند.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ &= u_1(t) - \rho h_n^{-1}(x, t) \operatorname{sgn}(\sigma) \end{aligned} \quad (35)$$

که $u_1(t)$ و $u_2(t)$ به ترتیب در روابط (۱۹) و (۳۲) ارائه شده اند. **اثبات:** قانون کنترلی (۳۵) را در سیستم غیرخطی و متغیر با زمان (۸) جایگذاری کنید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t) + h_n(x, t)(u_1(t) + u_2(t) + d(x, t)) \end{aligned} \quad (36)$$

با توجه به عبارات ذکر شده در رابطه (۱۴)، معادلات سیستم بالا را می توان به فرم زیر توصیف کرد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = f(x, t) + h(x, t)(u_1(t) + u_2(t) + d(x, t)) \quad (37)$$

اگر تابع لیپانوفی مشابه (۱۸)، برای سیستم غیرخطی بالا در نظر گرفته شود، آنگاه با مشتق گیری از این تابع، تساوی زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{V}_1 + \sigma \dot{\sigma} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} \dot{x} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} (f + h(u_1(t) + u_2(t) + d)) \\ &\quad + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + h(u_1(t) + u_2(t) + d)) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} f + \frac{\partial V_1}{\partial x} h(u_1(t) + u_2(t) + d) \\ &\quad + \sigma \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f + \frac{\partial \sigma}{\partial x} h(u_1(t) + u_2(t) + d) \right] \end{aligned}$$

۲-۴- بررسی رویکرد بهینگی کنترل کننده نامی

سیستم (۱۳) و تابع هزینه (۱۶) را در نظر بگیرید. این مسأله منجر به معادله HJB متغیر با زمان زیر می شود که از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی است:

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{\partial V^*}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} h(x, t) \right)^2 + l(x, t) = 0 \quad (27)$$

که

$$V^*(x, t) = \min_{u_1(\cdot)} \int_t^\infty (l(x, t) + u_1(\tau)^2) d\tau \quad (28)$$

تابع $V^*(x, t)$ که به آن تابع مقدار یا تابع بلمن می گویند، مقدار بهینگی تابع هزینه را با هر شرط اولیه ای نشان می دهد. اگر معادله HJB حل شود و $V^*(x, t)$ یافت شود، ورودی کنترلی بهینه ساز u_1^* به صورت زیر تعیین می شود:

$$u_1^* = -\frac{1}{2} h(x, t)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} \quad (29)$$

ولی پیدا کردن پاسخ تحلیلی V^* در عمل ممکن نیست. لذا، باید تقریبی برای آن یافت. اگر قانون کنترلی پیشنهادی (۱۹)، در ساختار معادله (۲۹) دیده شود، آنگاه تساوی زیر برقرار می شود:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{a(x, t) + \sqrt{a(x, t)^2 + l(x, t)(\sigma h_n(x, t))^2}}{\sigma h_n(x, t)} \\ &= -\frac{\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t)\right)^2 + l(x, t)\left(\frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)\right)^2}}{\frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)} \\ &= -\frac{1}{2} h^T \frac{2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t)\right)^2 + l(x, t)\left(\frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)\right)^2}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)\right)^2} \end{aligned} \quad (30)$$

با مقایسه ساختار (۳۰) و (۲۹)، می توان یک حل تقریبی برای $\frac{\partial V^*}{\partial x}$ به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\frac{\partial V^*}{\partial x} \approx 2 \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t)\right)^2 + l(x, t)\left(\frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)\right)^2}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial x} h(x, t)\right)^2} \quad (31)$$

لذا، قانون کنترلی (۱۹)، یک قانون نزدیک به بهینه یا زیربهینه می باشد.

۳-۴- طراحی کنترل کننده مقاوم

در این قسمت، یک ترم کنترلی مقاوم براساس تکنیک مد لغزشی به منظور غلبه بر عدم قطعیت های مدل و اغتشاشات خارجی طراحی

توجه به (۲۳)، صفر شدن a به شرطی که σ هم برابر صفر باشد، نتیجه می‌دهد:

$$a(x,t)|_{\sigma=0} = -X_1^T Q X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \quad (۴۳)$$

از سوی دیگر صفر شدن σ ، نتیجه می‌دهد که x_n ترکیب خطی از حالت‌های X_1 به صورت $X_1 = -c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_{n-1} X_{n-1}$ است. لذا، صفر شدن همزمان X_1 و σ ، صفر شدن همه متغیرهای حالت را نتیجه می‌دهد. بنابراین، تابع $\sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} + \rho_0 |\sigma|$ تابعی مثبت معین است. در نتیجه، با انتخاب تابع مثبت معین $W(x) = \sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} + \rho_0 |\sigma|$ ، شرط پایداری مجانبی $\dot{V}(x) \leq -W(x)$ حاصل می‌شود و اثبات می‌شود که قانون کنترلی $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته (۳۷) را با رویکرد بهینگی تضمین می‌کند.

تذکر ۲: همان‌طور که مشاهده می‌شود، تکنیک مد لغز شی که بخش مقاوم براساس آن طراحی شده است، با نسخه‌های معمولی مد لغز شی متفاوت است. در مد لغز شی کلاسیک، قسمت اول قانون کنترلی، ترم‌های پیوسته آن، به نحوی طراحی می‌شوند که ترم‌های معلوم مشتق سطح لغزش ($\dot{\sigma}$) صفر شوند [۲]. اما در تکنیک پیشنهادی، ترم پیوسته قانون کنترلی، به نحوی طراحی می‌شود که رویکرد بهینگی در آن لحاظ گردد.

۵- شبیه‌سازی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی کنترل‌کننده پیشنهادی، آن را به یک سیستم پاندول اینرسی متغیر با زمان اعمال کرده و نتایج شبیه‌سازی نشان داده می‌شوند.

سیستم پاندول اینرسی متغیر با زمان همان‌طور که در شکل‌های ۱ نشان داده شده است، شامل یک صفحه 1° ، میله و گوی سیار^{۱۱} است که در طول میله حرکت می‌کند. معادلات ریاضی این سیستم به صورت زیر است [۲۶-۲۵]:

$$\begin{aligned} (I_0 + m_m y^2(t)) \ddot{\lambda}(t) + (c_v + 2m_m y(t) \dot{y}(t)) \dot{\lambda}(t) \\ + (P_0 + m_m g_0 y(t)) \sin(\lambda(t)) = \tau(t) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{12} m_p (a_p^2 + b_p^2) + m_p d_p^2 + \frac{1}{12} m_b L_b^2 \\ &+ m_b d_b^2 + \frac{1}{2} m_m r_m^2 \\ P_0 &= m_p g_0 d_p + m_b g_0 d_b \end{aligned} \quad (۴۵)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial V_1}{\partial x} f + \underbrace{\left[\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_{n-1}} \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \right]}_{=0} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x,t) \end{bmatrix} (u_1(t) + u_2(t) + d) \\ &+ \sigma \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f + \underbrace{\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_{n-1}} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} \right]}_{\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x,t) \end{bmatrix} (u_1(t) + u_2(t) + d) \right] \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} f \\ &+ \sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} f + [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n(x,t) \end{bmatrix} (u_1(t) + u_2(t) + d) \right) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} f + \sigma \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f + h_n(x,t) d + h_n(x,t) (u_1(t) + u_2(t)) \right] \end{aligned} \quad (۳۸)$$

با جایگذاری $u_1(t)$ و $u_2(t)$ در (۳۸)، تساوی زیر برقرار می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V_1}{\partial x} f + \sigma \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f + h_n(x,t) d \right. \\ &+ h_n(x,t) \left(-\frac{a(x,t) + \sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2}}{\sigma h_n(x,t)} \right. \\ &\left. \left. - \rho h_n^{-1}(x,t) \operatorname{sgn}(\sigma) \right) \right] \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} f + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - a(x,t) - \sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} \\ &+ \sigma [h_n(x,t) d - \rho \operatorname{sgn}(\sigma)] \end{aligned} \quad (۳۹)$$

از طرفی، با توجه به رابطه (۲۰)، تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} f + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x} f = a(x,t) \quad (۴۰)$$

بنابراین، با جایگذاری (۴۰) در (۳۹)، عبارت $\dot{V}(x)$ برابر است با

$$\dot{V}(x) = -\sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} + \sigma [h_n(x,t) d - \rho \operatorname{sgn}(\sigma)] \quad (۴۱)$$

حال، با انتخاب ρ براساس (۳۳) و (۳۴)، عبارت زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} + |\sigma| |h_n(x,t) d| - \rho |\sigma| \\ &\leq -\sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} + \varphi(x) |\sigma| - (\rho_0 + \varphi(x)) |\sigma| \\ &= -\sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} - \rho_0 |\sigma| \end{aligned} \quad (۴۲)$$

برای اینکه بتوان پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته (۳۷) را نتیجه گرفت، تابع $\sqrt{a(x,t)^2 + (\sigma h_n(x,t))^2} + \rho_0 |\sigma|$ باید مثبت معین باشد. مثبت بودن این تابع بدیهی است؛ چراکه هر دو ترم

که در آن ξ_2 قسمت نامی و معلوم ξ_2 و $\delta(t)$ یک ترم نامعلوم شامل همه عدم قطعیت‌های ξ_2 است. با فرض $0 \leq c_v \leq 1$ و ماکزیمم خطای 0.5 (rad/s) در تخمین $\dot{y}$ ، $|\delta(t)| \leq 1$ به دست می‌آید. بنابراین رابطه (۴۶) ساختاری مشابه (۸) دارد و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \xi_1(y(t))\sin(x_1) - \xi_2(y(t), \dot{y}(t))x_2 \end{bmatrix}}_f + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3(y(t)) \end{bmatrix}}_h (u + d(x, y(t))) \quad (49)$$

که در آن $d(x, y(t)) = -\delta(t)x_2$ یک تابع نامعلوم است و با فرض $|\delta(t)| \leq 1$ رابطه $|d| \leq |x_2|$ برقرار است.

جدول ۱: مشخصات اجزای پاندول اینرسی متغیر با زمان

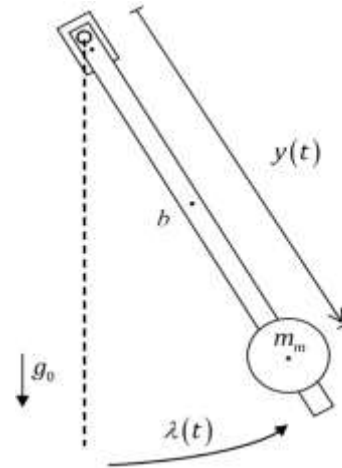
اجزای پاندول متغیر با زمان	اندازه (m)	جرم (kg)	فاصله مرکز جرم از (m) O
صفحه	$a_p = 0.044$ $b_p = 0.063$	$m_p = 0.0713$	$d_p = 0.01$
میله	$L_b = 1$	$m_b = 0.29$	$d_b = 0.5$
گوی سیار	$r_m = 0.05$	$m_m = 0.5025$	$y(t)$

هدف، طراحی کنترل کننده غیرخطی پایدارساز و مقاوم در برابر ترم نامعلوم $d(x, y(t))$ برای سیستم (۴۹) با در نظر گرفتن تابع هزینه زیر در مجموعه $D = \{x \in R^2 : |x_1| \leq \pi \text{ و } |x_2| \leq 1\}$ است.

$$J = \int_0^\infty (10(x_1^2 + x_2^2) + u_1(t)^2) dt \quad (50)$$

حال، با توجه به رابطه (۱۹) و به ازای $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\sigma$ در آن $\sigma = x_1 + x_2$ است و $I = 10(x_1^2 + x_2^2)$ ترم نامی قانون کنترلی $u_1(t)$ طراحی می‌شود. همچنین، با انتخاب پارامتر $\rho > 9.8$ ، ترم مقاوم $u_2(t)$ طراحی می‌گردد.

نتایج شبیه سازی به ازای سناریوهای مختلف ارائه شده است. در سناریوی اول، ترم نامعلوم $d(x, y(t))$ به صورت $d(x, y(t)) = -x_2 \sin(t)$ لحاظ شده است و نتایج حاصل از شبیه سازی‌ها در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده است. شکل ۲ پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد. پاسخ زمانی ورودی کنترلی و تابع هزینه نیز به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده است. به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، روش مذکور با یک روش کنترلی بهینه که به تازگی برای سیستم‌های غیرخطی در مرجع [۲۷] ارائه شده، مقایسه گردیده است. در مرجع [۲۷] قانون کنترل بهینه برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی براساس روش حل عددی حاصل گردیده است و همان‌طور که در [۲۷] نشان داده شده است، روش مذکور منجر به



شکل ۱: ساختار پاندول اینرسی متغیر با زمان

گوی، جرم میله، جرم صفحه و گشتاور اعمالی به پاندول است و شتاب گرانش زمین نیز $g_0 = 9.8 \text{ (N/kg)}$ در نظر گرفته شده است. در واقع با بالا و پایین شدن گوی سیار و حرکت آن بر روی میله، طول مؤثر میله یعنی $y(t)$ که فاصله بین جرم گوی سیار از نقطه O را نشان می‌دهد، مرتباً با زمان تغییر می‌کند و یک سیستم پارامترهای متغیر با زمان حاصل می‌شود. در سیستم مذکور $0.1 \leq y(t) \leq 1$ است. سایر پارامترها نیز در جدول ۱ داده شده است. هدف، طراحی گشتاور $\tau(t)$ است به نحوی که $\lambda(t)$ را در زاویه π رگوله کند. بنابراین، با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $u(t) = \tau(t)$ و ورودی کنترلی $x_1 = \lambda - \pi \text{ (rad)}$ ، $x_2 = \dot{\lambda} \text{ (rad/s)}$ می‌توان معادلات فضای حالت را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\xi_1(y)\sin(x_1 + \pi) - \xi_2(y, \dot{y})x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3(y) \end{bmatrix} u \quad (46)$$

که در آن ξ_1, ξ_2 و ξ_3 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_1(y(t)) &= \frac{P_0 + m_m g_0 y(t)}{I_0 + m_m y^2(t)} \\ \xi_2(y(t), \dot{y}(t)) &= \frac{c_v + 2m_m y(t) \dot{y}(t)}{I_0 + m_m y^2(t)} \\ \xi_3(y(t)) &= \frac{1}{I_0 + m_m y^2(t)} \end{aligned} \quad (47)$$

فرض کنید که ξ_2 دارای عدم قطعیت‌های ناشی از پارامتر نامعلوم c_v و اندازه گیری غیردقیق $\dot{y}(t)$ است. بنابراین، ξ_2 را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \xi_2(y, \dot{y}) &= \xi_3(y)(c_v + 2m_m y \dot{y}) \\ &= \hat{\xi}_2(y, \dot{y}) + \xi_3(y)\delta(t) \end{aligned} \quad (48)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با اعمال کنترل‌کننده پیشنهادی به پاندول، متغیرهای حالت در حضور عدم قطعیت‌ها، از مقادیر اولیه خود به صفر همگرا می‌شوند و در نتیجه $\lambda(t)$ نیز به زاویه مطلوب π رگوله می‌شود. به علاوه، ویژگی‌های مطلوب پاسخ گذرا نیز به خوبی دیده می‌شود.

شش سناریوی دیگر به‌ازای شرایط اولیه متفاوت داده شده در جدول شماره ۲، تابع هزینه ذکر شده در رابطه (۵۰) و با اضافه نمودن یک سیگنال اغتشاشی جمع‌شونده به ورودی کنترلی در رابطه (۴۹) انجام پذیرفته‌اند تا دو موضوع مقاوم‌بودن و عملکرد بهینه روش پیشنهادی مورد بررسی قرار بگیرد. در این موارد تأثیر سیگنال اغتشاشی جمع‌شونده در تابع $d(x, y(t))$ لحاظ شده و شبیه‌سازی‌ها به‌ازای $d(x, y(t)) = -x_2 \sin(t) + 0.5 \cos(t)$ صورت پذیرفته است. این موارد در شبیه‌سازی مربوط به هر شش سناریوی مختلف اعمال و نتایج آن بر مبنای شاخص مقدار نهایی تابع هزینه در جدول ۲ ارائه شده است. شبیه‌سازی‌های صورت‌پذیرفته نشان از عملکرد مناسب روش پیشنهادی چه از نقطه‌نظر عملکرد مقاوم آن و چه از نظر مقدار تابع هزینه نهایی دارد. در هر یک از سناریوهای ارائه شده در جدول ۲، مقدار تابع هزینه پیشنهادی بسیار نزدیک به مقدار تابع هزینه حاصل از اعمال روش مرجع [۲۷] می‌باشد. لازم به یادآوری است که روش مرجع [۲۷] یک روش عددی بسیار قوی از نقطه‌نظر عملکرد مطلوب و بهینه است و نتایج جدول ۲ گویای عملکرد مطلوب روش پیشنهادی در سناریوهای مختلف با درصد تفاوت کم براساس شاخص تابع هزینه پیشنهادی می‌باشد. نکته قابل توجه این است که نتایج حاصل از اعمال روش پیشنهادی براساس یک قانون کنترلی با حل تحلیلی و دارای یک فرم بسته است که با تغییر شرایط اولیه عوض نمی‌شود در صورتی که روش مرجع [۲۷] یک روش حل عددی است که کل مراحل بدست آوردن سیگنال کنترلی با هر تغییر شرایط اولیه باید مجدداً انجام شود.

جدول ۲: نتایج شبیه‌سازی‌ها در سناریوهای مختلف

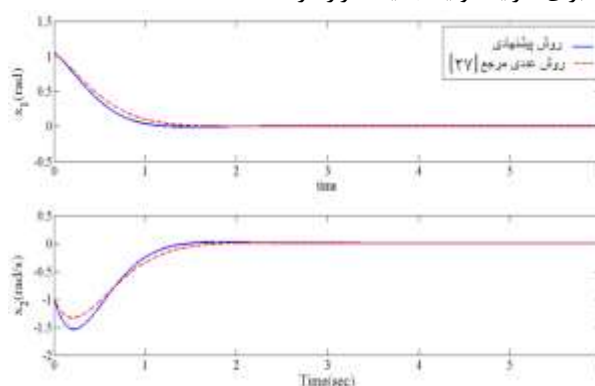
شرایط اولیه کنترل‌کننده	مقدار نهایی تابع هزینه					
	(0,1,2)	(-0.1,2)	(-0.3,2)	(0.3,-3)	(0.5,5)	(0.4,0)
کنترل‌کننده مرجع [۲۷]	0.3719	0.6501	1.1892	1.6977	7.504	1.3905
کنترل‌کننده پیشنهادی	0.3801	0.6633	1.2001	1.738	7.67	1.402
درصد تفاوت	2.20%	2.03%	0.91%	2.37%	2.21%	0.82%

۶- نتیجه‌گیری

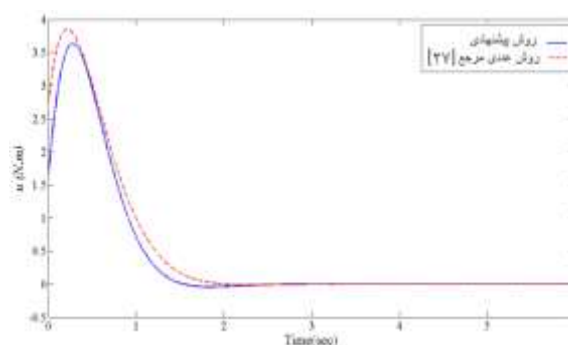
در این مقاله، یک کنترل‌کننده پایدارساز مقاوم جدید با رویکرد بهینگی، برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی ناخودگردان ارائه شد. این کنترل‌کننده دارای دو بخش نامی و مقاوم بود که با در نظر گرفتن رویکردهای بهینگی و مقاوم طراحی شدند. در طراحی هر دو بخش این کنترل‌کننده، ایده‌پردازی‌های جدیدی صورت گرفت.

طی مسیرهای بهینه توسط متغیرهای حالت می‌گردد. با در نظر گرفتن تابع هزینه یکسان، نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی و روش عددی مرجع [۲۷] در اشکال ۲ تا ۴ با هم مقایسه گردیده‌اند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که پاسخ‌های حاصل از روش پیشنهادی بسیار به نتایج تحلیل بهینه نزدیک می‌باشند. عدم تفاوت محسوس بین نتایج ارائه شده در شبیه‌سازی روش پیشنهادی با نتایج مرجع [۲۷] گویای عملکرد مطلوب روش پیشنهادی در دنبال نمودن مسیر بهینه می‌باشد.

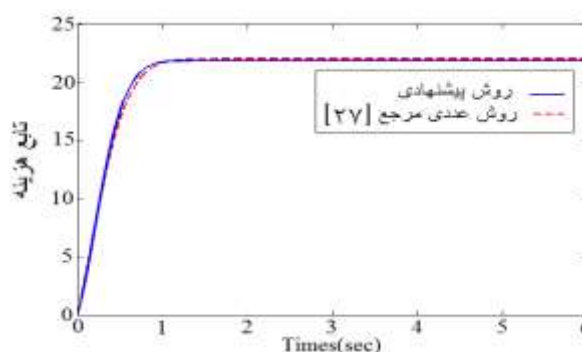
علاوه بر آن روش پیشنهادی این مزیت را نیز دارا می‌باشد که ساختار قانون کنترلی پیشنهادی دارای یک فرم بسته است، برخلاف روش‌های حل عددی که قانون کنترلی حاصل کاملاً وابسته به شرایط اولیه است و با تغییر شرایط اولیه باید تمام روال حل عددی مجدداً برای شرایط اولیه جدید تکرار گردد.



شکل ۲: پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته



شکل ۳: پاسخ زمانی ورودی کنترلی



شکل ۴: پاسخ زمانی تابع هزینه

- output feedback control," *International Journal of Control*, in press, 2019.
- [8] T. Binazadeh and M. H. Shafiei. "Extending satisficing control strategy to slowly varying nonlinear systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 4, pp. 1071-1078, 2013.
- [9] MG. Plessen, D. Bernardini, H. Esen and A. Bemporad, "Spatial-based predictive control and geometric corridor planning for adaptive cruise control coupled with obstacle avoidance," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 1, pp. 38-50, 2018.
- [10] T. Binazadeh and M. H. Shafiei, "Output tracking of uncertain fractional-order nonlinear systems via a novel fractional-order sliding mode approach," *Mechatronics*, vol. 23, no. 7, pp. 888-892, 2013.
- [11] R. Bellman, *Dynamic Programming*, University Press, Princeton, N.J., 1957.
- [12] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory an Introduction*, New York: Prentice Hall, 1970.
- [13] Y. Hu, P. Y. Madec and A. Richou, "A probabilistic approach to large time behavior of mild solutions of HJB equations in infinite dimension," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 53, no. 1, pp. 378-398, 2015.
- [14] IA. Prado, MD. Pereira, DF. de Castro, DA. dos Santos and JM. Balthazar, "Experimental evaluation of HJB optimal controllers for the attitude dynamics of a multirotor aerial vehicle," *ISA Transactions*, vol. 77, pp. 188-200, 2018.
- [15] NS. Tripathy, IN. Kar and K. Paul. "Suboptimal robust stabilization of discrete-time mismatched nonlinear system," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 5, no. 1, pp. 352-9, 2018.
- [16] SP. Zhu and G. Ma, "An analytical solution for the HJB equation arising from the Merton problem," *International Journal of Financial Engineering*, vol. 5, no. 1, pp. 185008, 2018.
- [17] T. Cheng, F.L. Lewis and M. Abu-Khalaf, "A neural network solution for fixed-final time optimal control of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 43, no. 3, pp. 482-490, 2007.
- [18] WY. Tsai and A. Fahim, "A numerical scheme for a singular control problem: Investment-consumption under proportional transaction costs," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 333, pp. 170-84, 2018.
- [19] P. Brunovský, A. Černý and J. Komadel, "Optimal trade execution under endogenous pressure to liquidate: Theory and numerical solutions," *European Journal of Operational Research*, vol. 264, no. 3, pp. 1159-71, 2018.
- [20] H. Yoshioka and Y. Yaegashi, "Singular stochastic control model for algae growth management in dam downstream," *Journal of biological dynamics*, vol. 12, no. 1, pp. 242-70, 2018.
- [21] E.D. Sontag, "A universal construction of artstein's theorem on nonlinear stabilization," *Systems and Control Letters*, vol. 13, no. 2, pp. 117-123, 1989.
- [22] E.D. Sontag, "A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 21, no. 3, pp. 462-471, 1983.
- [23] A. Primbs, *Nonlinear Optimal Control: A receding horizon approach*. PhD Thesis, California Institute of Technology, 1999.
- [۲۴] علیرضا حکیمی، طاهره بینازاده، "تولید چرخه حدی پایدار و مقاوم در سیستم‌های غیرخطی دارای عدم قطعیت با استفاده از کنترل-کننده مد لغزشی"، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۲، صفحات ۴۸۱-۴۸۹، ۱۳۹۶.
- [25] A. Bellino, A. Fasana, E. Gandino, L. Garibaldi and S. Marchesiello, "A time-varying inertia pendulum: analytical modelling and experimental identification," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 47, no. 1, pp. 120-138, 2014.
- [26] T. Binazadeh and M. H. Shafiei. "Robust stabilization of uncertain nonlinear slowly-varying systems: application in a

مهم‌ترین نوآوری این مقاله، ارائه یک تابع لیاپانوف کنترلی جدید برای سیستم نامی متغیر با زمان مورد مطالعه بود. همچنین، از آنجا که پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌ها، توسط همین تابع پیشنهادی تضمین می‌شود، لذا این تابع، یک تابع لیاپانوف کنترلی مقاوم است. ساختار تابع لیاپانوف کنترلی، به نحوی بود که معادله سطح لغزش مستقیماً در آن استفاده شد. به منظور نشان دادن کاربردی بودن روش کنترلی پیشنهادی، روش مذکور بر روی یک پاندول متغیر با زمان اعمال شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها کارایی روش پیشنهادی را نشان دادند.

پیوست

قضیه ۴: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (51)$$

که در آن، $x(t) \in D \subseteq R^n$ بردار حالت و D محدوده‌ای شامل مبدأ $x=0$ می‌باشد و $f(x, t): R^n \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ تابعی تکه‌ای پیوسته و محلی لیبشیتز است. در این صورت، اگر برای همه زمان‌های $t \geq 0$ ، $f(0, t) = 0$ باشد، مبدأ نقطه تعادل برای (۵۱) است. اگر $x=0$ مبدأ سیستم (۵۱) باشد و تابع پیوسته دیفرانسل پذیر $V(x, t): D \times [0, \infty)$ یافت شود به نحوی که

$$\begin{aligned} W_1(x) \leq V(x, t) \leq W_2(x) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \end{aligned} \quad (52)$$

که در آن، $W_1(x)$ ، $W_2(x)$ و $W(x)$ توابع مثبت معین پیوسته هستند؛ آنگاه، نقطه تعادل $x=0$ پایدار مجانبی یکنوا است [۲].

مراجع

- [۱] سمانه محمدپور، طاهره بینازاده، "طراحی کنترل‌کننده غیرخطی تطبیقی جهت همزمان سازی مقاوم سیستم‌های آشوبی در حضور اشباع محرک" *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۳، صفحات ۱۲۱۳-۱۲۲۲، ۱۳۹۶.
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Prentice Hall, 2002.
- [3] E. Jafari and T. Binazadeh "Modified composite nonlinear feedback control for output tracking of non-step signals in singular systems with actuator saturation," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 16, pp. 4885-4899, 2018.
- [4] G.A. Garcia, S. Kashmiri and D. Shukla, "Nonlinear control based on H-infinity theory for autonomous aerial vehicle," *IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2017.
- [5] T. Binazadeh and M. H. Shafiei. "A novel approach in the finite-time controller design," *Systems Science and Control Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 119-124, 2014.
- [6] J. Zhao and GP. Liu, "Time-variant consensus tracking control for networked planar multi-agent systems with non-holonomic constraints," *Journal of systems science and complexity*, vol. 31, no. 2, pp. 396-418, 2018.
- [7] A. Dastaviz and T. Binazadeh, "Simultaneous stabilization for a collection of uncertain time-delay systems using sliding-mode

Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 29, no. 6, pp. 2614-2624, 2018.

time-varying inertia pendulum," *ISA Transactions*, vol. 53, no. 2, pp. 373-379, 2014.

[27] W. Gao and Z. P. Jiang, "Learning-based adaptive optimal tracking control of strict-feedback nonlinear systems," *IEEE*

زیر نویس ها

- ⁷ Sliding Surface
- ⁸ Sliding mode control (SMC)
- ⁹ Beam
- ¹⁰ Plate
- ¹¹ Travelling Mass

- ¹ Time-varying / non autonomous
- ² Time-invariant / autonomous
- ³ Hamilton Jacobi Belman (HJB)
- ⁴ Suboptimal Controllers
- ⁵ Control Lyapunov Function (CLF)
- ⁶ Primbs