

مدل سازی الکترومغناطیسی امواج مغزی بر اساس تحلیل تمام موج

ستار صمدی گرجی^۱، دانشجوی دکتری؛ بیژن ذاکری^۲، دانشیار؛ رضا خانبابایی^۳، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل- بابل- ایران - samadi@nit.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل- بابل- ایران - zakeri@nit.ac.ir

۳- دانشکده علوم پایه- دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل- بابل- ایران - r.khanbabaie@nit.ac.ir

چکیده: در این مقاله با استفاده از مدل سازی الکترومغناطیسی سی نورون ها در مغز، امواج الکترومغناطیسی به صورت تمام موج استخراج شده اند. هم اکنون در تمام مراکز و کلینیک های تحقیقاتی این کار به طور سنتی با استفاده از تقریب شبه استاتیک معادلات ماکسول در الکترومغناطیس انجام می شود ولی میزان خطای حاصل از این تقریب در نتایج نهایی بررسی نمی شود. این موضوع با توجه به افزایش حساسیت حس گرهای مدرن امروزی بیشتر جلب توجه می کند. در این مقاله ابتدا با مروری بر مبانی به کارگیری تقریب شبه استاتیک در تحلیل امواج مغزی، ابهاماتی راجع به شایستگی این تقریب در این مسئله مطرح شده و لزوم حل مسئله به صورت تمام موج بیان می شود. پس از آن میدان های حاصل از یک دوقطبی جریان واقع در مرکز کره ای با رسانایی معلوم توسط بسط توابع بسل و هنکل نوشته شده و با تئوری های پراکندگی در الکترومغناطیس، مسئله به صورت تمام موج حل می گردد. سرانجام منحنی معیار اختلاف نسبی (RDM) بین پاسخ شبه استاتیک و تمام موج برحسب فرکانس و رسانایی های مختلف رسم می شود. نتایج نشان می دهد که خطای حاصله با افزایش فرکانس رشد داشته و می تواند توسط حسگرهای مدرن آشکارسازی شود. از رهاوردهای مهم مدل سازی تمام موج، غنا بخشیدن به اطلاعات حاصل از مغزنگاری الکتریکی (EEG) و مغناطیسی (MEG) و در نتیجه استخراج الگوهای دقیقتری از فعالیت های مغز می باشد.

واژه های کلیدی: امواج مغزی، تقریب شبه استاتیک، مدل سازی، تحلیل تمام موج، بیوالکترومغناطیس، مغزنگاری الکتریکی و مغناطیسی.

Electromagnetic Modeling of Brain Waves based on Full-wave Analysis

Sattar Samadi Gorji¹, PhD student; Bijan Zakeri², Associate professor; Reza Khanbabaie³, Assistant professor

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Babol Institute of Technology, Babol, Iran, Email: samadi@nit.ac.ir

2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Babol Institute of Technology, Babol, Iran, Email: zakeri@nit.ac.ir

3- Faculty of Physics, Babol Institute of Technology, Babol, Iran, Email: r.khanbabaie@nit.ac.ir

Abstract: In this paper by electromagnetic modeling of neurons in brain, the brain waves have been derived in a full-wave way. Now, in all clinics and research centers, traditionally, it has been done by using the quasi-static approximation of the Maxwell equation in electromagnetic. However, the error rate resulting from the approximation has not been studied upon the final results. This issue becomes more noticeable due to increasing the sensitivity of today's modern sensors. In this paper, first, with an overview of the basics of applying quasi-static approximation in the analysis brain waves, ambiguities about the suitability of this approximation are presented and the necessity of full-wave solution of the problem is expressed. Then, in the simplest form, the electromagnetic fields aroused from a current dipole where is located in the center of a sphere with known conductivity is written in terms of Bessel and Hankel function expansion; and the problem has been solved in a full-wave way by using of scattering theories in electromagnetic. Finally, the curve of relative difference measure (RDM) between quasi-static and full-wave solution has been drawn in terms of frequency conductivity. One of the important achievements of full-wave modeling is enriching the information resulted from EEG and MEG and consequently extracting more accurate patterns from brain activities.

Keywords: Brain Waves, Quasi-static Approximation, Full-wave Analysis, Bioelectromagnetics, EEG, MEG.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۹/۱۸

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۲، ۱۳۹۸/۰۵/۱۲ و ۱۳۹۸/۰۸/۱۸

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۰۴

نام نویسنده مسئول: بیژن ذاکری

نشانی نویسنده مسئول: دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل- بابل- ایران.

۱- مقدمه

تاکنون مطالعات زیادی بر روی امواج مغزی حاصل از فعالیت نورون‌های درون مغز صورت گرفته است [۱]. هنگامی که در مغز اطلاعات پردازش می‌شود، جریان‌های کوچکی در دسته‌ای از نورون‌ها جاری می‌شود. از آنجایی که مواد تشکیل‌دهنده مغز رسانا هستند، لذا مسیر این جریان الکتریکی از طریق مواد رسانا در قالب جریان حجمی بسته می‌شود. این توزیع جریان الکتریکی سبب ایجاد پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی در درون سر و پیرامون آن می‌شود که به طور کلی به امواج مغزی موسومند. این پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی که حاوی اطلاعات مفیدی از فعالیت‌های مغز هستند به‌طور غیرتهاجمی اندازه‌گیری می‌شود که به ترتیب با نام مغزنگاری الکتریکی^۱ (EEG) و مغزنگاری مغناطیسی^۲ (MEG) شناخته می‌شوند.

یکی از مسائل مهم در حوزه تشخیص بیماری‌های مغزی و همچنین در علوم شناختی، پی‌بردن به مکان و توزیع نورون‌های فعال در بیماری‌هایی چون صرع، سکته، ضربه مغزی و همچنین در عکس‌العمل‌های ادراکی یا تحریکی انسان می‌باشد [۲]. این مسئله به بیان دیگر معادل این است که منابع جریان (دسته‌های نورون) تولیدکننده پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی در روی سر انسان در بیماری‌های مختلف و همچنین حالات مختلف روحی و حسی، به‌طور دقیق چه توزیعی پیدا می‌کنند؛ موضوعی که به نام مسئله معکوس^۳ شناخته می‌شود [۳، ۴]. به عبارت دقیقتر مسئله معکوس به بازسازی و یا تخمین منابع جریان یعنی مکان، جهت و شدت منبع جریان با استفاده از اندازه‌گیری میدان‌های مغناطیسی یا پتانسیل‌های الکتریکی تولید شده توسط آن جریان‌ها می‌پردازد. این تخمین نیازمند حل مسئله مستقیم^۴ است؛ یعنی محاسبه پتانسیل الکتریکی یا میدان مغناطیسی ناشی از یک منبع جریان معلوم در مکانی معلوم از یک حجم رسانای خاص با ویژگی‌های معلوم (مغز) [۵].

همانطور که مشخص است، EEG و MEG با آشکارسازی فعالیت‌های مغزی به نوعی عمل تصویربرداری از مغز را انجام می‌دهند و به دلیل غیرتهاجمی بودن نسبت به دیگر روش‌های تصویربرداری، جایگاه ویژه‌ای در میان روش‌های موجود در مطالعات مغزشناختی دارند [۶، ۷].

در این مقاله بر روی پایه الکترومغناطیسی و ریاضیات مربوطه برای حل مسئله مستقیم به منظور تفسیر داده‌های تجربی حاصل از آزمایشات MEG و EEG تأکید می‌شود. برای حل مسئله مستقیم باید خصوصیات الکترومغناطیسی مواد تشکیل‌دهنده سر مشخص شود. سر انسان متشکل از بافت‌های مختلفی چون ماده خاکستری، ماده سفید، مایعات مغزی و... بوده و همچنین دو لایه جمجمه و پوست سر نیز در مسیر اندازه‌گیری امواج مغزی قرار دارند. از آنجا که هر یک از این قسمت‌های نامبرده دارای رسانایی مختص به خود هستند [۸]، بنابراین مغز به‌طور کلی یک محیط غیرهمگن (و غیر همسانگرد) در نظر گرفته می‌شود [۹]. علاوه بر این شکل مغز و سر انسان نیز دارای توپولوژی

هندسی خاصی است که بسته به رویکرد تحلیلی یا عددی در حل مسئله مستقیم، می‌توان آن را به یک شکل هندسی منظم (مانند کره‌ها یا بیضی‌های هم‌مرکز) تقریب زد یا از مدل واقعی (منتج از MRI) استفاده نمود. از طرف دیگر فعالیت دسته نورون‌های درون مغز نیز باید با یک منبع جریان شناخته‌شده تقریب زده شود که مفهوم دوقطبی جریان در اینجا یک تقریب رایج است [۱۰].

همه این عوامل سبب پیچیدگی و دشواری در حل مسئله الکترومغناطیسی‌ای که ارتباط‌دهنده پارامترهای منبع جریان درون مغز به پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی بیرون سر است (مسئله مستقیم) می‌شوند. بنابراین حل مسئله مستقیم نیازمند استفاده از مدل‌هایی برای محدود کردن فضای مسئله است. به‌طور کلی در مقالاتی که بر روی استخراج روابط تحلیلی در حل مسئله مستقیم کار می‌شود از مدل کروی چندلایه به‌عنوان سر انسان استفاده شده، چراکه قابل فرمول‌بندی و حل تحلیلی فرم بسته است [۱۱، ۱۲].

به دلیل فرکانس پائین فعالیت‌های مغزی، تمامی مقالاتی که تاکنون بر روی حل مسئله مستقیم کار کرده‌اند از تقریب شبه‌استاتیک معادلات ماکسول استفاده نموده‌اند. تقریب شبه‌استاتیک سبب مستقل شدن میدان الکتریکی و مغناطیسی از یکدیگر می‌شود [۱۳]. اما تقریب شبه‌استاتیک همانطور که از نامش پیداست یک تقریب است و باید میزان خطای حاصل از این تقریب بر روی نتایج نهایی محاسبه شود تا شایستگی آن بررسی گردد. لذا این مقاله برپایه حل مسئله مستقیم به صورت تمام‌موج و بدون هیچگونه تقریب بنا نهاده شده است. واضح است که در مدل‌سازی تمام‌موج وابستگی بین میدان الکتریکی و بین میدان مغناطیسی مورد لحاظ قرار می‌گیرد و منجر به افزایش اطلاعات حاصله از آزمایش‌های EEG و MEG و به تبع آن استخراج الگوهای دقیقتری از فعالیت‌های مغزی می‌گردد.

ساختار مقاله حاضر بدین صورت است: در بخش دوم مدل مسئله معرفی می‌شود. به این منظور ابتدا مدل‌سازی الکترومغناطیسی سیستم نورون‌ها به همراه فضای احاطه‌شده توسط مواد مغزی تشریح می‌شود. سپس نشان داده می‌شود که چگونه معادلات ماکسول در فرکانس‌های پائین فعالیت‌های نورونی مورد ساده‌سازی قرار می‌گیرند. (تقریب شبه‌استاتیک). پس از آن مفهوم «دوقطبی جریان» به‌عنوان ساده‌ترین جریان ممکن از نظر فضایی معرفی می‌شود. با این مفهوم از جریان، هر جریان عمومی‌تری می‌تواند به‌صورت جمع (حتی‌الامکان پیوسته) از دوقطبی‌های جریان به دست آید. سپس در راستای حل مسئله مستقیم، آخرین نتایج مقالات مختلف در جهت استخراج پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی تولیدشده توسط یک جریان نورونی واقع در مدل کروی از سر مبتنی بر تقریب شبه‌استاتیک ارائه می‌گردد. در بخش سوم با طرح ابهاماتی راجع به شایستگی تقریب شبه‌استاتیک در حل مسئله مغز، لزوم استفاده از تحلیل تمام‌موج مورد اثبات واقع می‌شود. در بخش چهارم، به ارائه ایده‌ی مقاله مبنی بر استفاده از تحلیل تمام‌موج برای حل مسئله مستقیم پرداخته می‌شود. به این منظور

است و لذا میدان تولید شده توسط این جریان در بیرون از سر آنقدر ضعیف است که قابل آشکارسازی نمی‌باشد. بنابراین چندصد هزار نورون باید با هم فعالیت نمایند تا بتوان یک سیگنال قابل آشکارسازی از آن دریافت کرد [۵]. این موضوع سبب شده است تا ساده‌ترین مدل منبع جریان نرونی به‌عنوان یک دوقطبی جریان معادل^۶ (ECD) به فرم $\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_d \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$ معرفی شود که در آن δ تابع ضربه و \mathbf{p}_d ممان دوقطبی جریان می‌باشد [۱۰، ۱۶]. این مدل در واقع یک جریان تئوری یکه در نقطه مشخص \mathbf{r}_d درون مغز با بزرگی \mathbf{p}_d است. در میان روش‌های مختلف مدل‌سازی منبع، دوقطبی جریان معادل استفاده گسترده‌ای در کاربردهای کلینیکی دارد [۱۷].

۲-۲- تقریب شبه‌استاتیک

در مقالات مرتبط با مدل‌سازی امواج مغزی به منظور حل مسئله مستقیم، از تقریب شبه‌استاتیک استفاده می‌گردد؛ بدین معنی که در معادلات ماکسول و معادله پیوستگی جریان، از جمله‌های شامل مشتق زمانی ($\frac{\partial \rho}{\partial t}$) که بیانگر تغییرات زمانی هستند صرف‌نظر می‌شود [۱۸]. در صورتی که رسانایی σ و منبع تولیدکننده جریان معلوم باشند، با استفاده از معادلات ماکسول و قانون پیوستگی جریان $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به دست می‌آیند (\mathbf{J} و ρ به ترتیب چگالی جریان کل و چگالی بارهای آزاد می‌باشند). با استفاده رابطه (۱) به همراه قانون گاوس $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ و جایگذاری آن در رابطه قانون پیوستگی جریان، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^p + \nabla \sigma \cdot \mathbf{E} + \omega_0 \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

که در آن $\omega_0 = \sigma / \epsilon_0$ فرکانس مشخصه می‌باشد. حتی برای مجموعه که بخشی از سر با کمترین رسانایی است، مقدار ω_0 تقریباً برابر با 10^9 Hz می‌باشد که بسیار بیشتر از فرکانس فعالیت نرونی مغز است. از اینرو در معادله (۲) جمله $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ در مقایسه با $\omega_0 \rho$ قابل صرف‌نظر کردن است. لذا می‌توانیم بنویسیم [۱۱]:

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (3)$$

همچنین در دو معادله کرل ماکسول داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\sigma \mathbf{E} + \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t) \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (5)$$

که در آن ϵ و σ به ترتیب گذردهی الکتریکی و رسانندگی محیط انتشار می‌باشند. صرف‌نظر کردن از جمله $\epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ در رابطه (۴) مشروط است به اینکه این جمله در مقایسه با جمله $\sigma \mathbf{E}$ بسیار کوچک باشد. این شرط با نوشتن رابطه (۴) به صورت فازوری، معادل با نامساوی $|\sigma \mathbf{E}| \gg |j \omega \epsilon \mathbf{E}|$ خواهد شد؛ که پس از ساده‌سازی به صورت $1 \gg 2\pi f \epsilon / \sigma$ در می‌آید. برای اینکه این شرط چک شود لازم است تا مقادیری نمونه از مغز برای پارامترهای آن انتخاب گردد. با در نظر گرفتن $f = 100 \text{ Hz}$ و $\epsilon = 10^5 \epsilon_0$ و $\sigma = 0.3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ (رسانایی بافت مغز) و $\sigma = 0.3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ [۵] داریم:

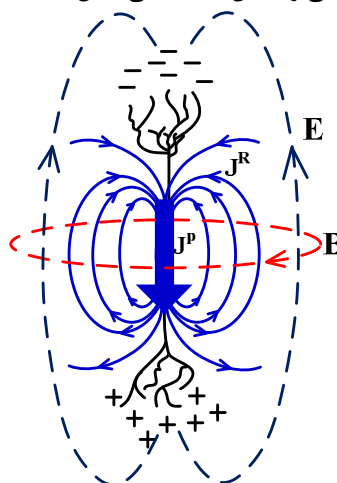
مسئله مستقیم برای یک دوقطبی جریان که در مرکز یک کره رسانا قرار دارد به روش تمام‌موج و با استفاده از نظریه پراکندگی در الکترومغناطیس حل می‌گردد. در بخش پنجم محاسبات شبه‌استاتیک و تمام‌موج برای یک کره با رسانایی خاص که در مرکز آن یک دوقطبی جریان واقع است، مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرد. در انتها نمودار خطای نسبی بین پاسخ‌های تمام‌موج و شبه‌استاتیک به ازای تغییر فرکانس مقایسه می‌شوند.

۲- حل مسئله مستقیم

همانگونه که ذکر شد به دلیل رسانابودن فضای درون سر، کل جریان الکتریکی درون سر به صورت جمع دو جزء با طبیعت مجزا نشان داده می‌شود [۱۲، ۱۴]. یک جزء جریان اولیه یا اصلی (\mathbf{J}^p) نامیده می‌شود که عبارت است از جریانی که در نورون‌ها و بین غشای آن‌ها جاری است و جزء دیگر جریان برگشتی (\mathbf{J}^R) یا جریان اهمی است. جریان اهمی به صورت ضرب رسانایی محلی σ در شدت میدان الکتریکی \mathbf{E} تعریف شده و از مسیری تبعیت می‌کند که وابسته به پروفایل رسانایی محیط فراسلولی است. میدان الکتریکی و مغناطیسی حاصل از فعالیت نورون‌های مغز ناشی از هردو بخش جریان‌های مذکور می‌باشند و باید در محاسبات مسئله مستقیم در نظر گرفته شوند.

۲-۱- مدل مسئله

در شکل ۱ تصویر یک نورون به همراه جریان اصلی، جریان برگشتی، توزیع میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی نشان داده شده است.



شکل ۱: تصویری مفهومی از یک نورون فعال به همراه توزیع جریان

حجمی (\mathbf{J}^R)، میدان الکتریکی (\mathbf{E}) و میدان مغناطیسی (\mathbf{B})

بنابراین جریان کل عبارت خواهد بود از مجموع دو جریان اولیه و برگشتی:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

مطالعات بر روی میدان‌های تولید شده توسط عکس‌العمل‌های حسی^۵ [۱۵] یک ویژگی دوقطبی بودن را برای میدان مغناطیسی اطراف سر و پتانسیل الکتریکی روی پوست سر نشان می‌دهد. از طرفی دیگر ممان جریان عبوری از یک نورون به طور متعارف چیزی در حدود 20 fAm

بدین گونه تقریب شبه‌استاتیک توجیه می‌شود. در بخش بعدی این مقاله، شایستگی استفاده از این تقریب در حل مسئله مستقیم مغزنگاری مورد بررسی دقیق‌تر قرار می‌گیرد.

۲-۳- محاسبه میدان‌ها بر اساس تقریب شبه‌استاتیک

برای هر ناحیه‌ای با رسانایی ثابت، ترکیب رابطه (۳) با رابطه (۱۴) به دست می‌دهد:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^p - \sigma \nabla^2 V = 0 \quad (15)$$

معادله فوق بیانگر تقریب شبه‌استاتیک برای پتانسیل الکتریکی در هر ناحیه‌ای با رسانایی ثابت می‌باشد.

صفر بودن دیورژانس جریان کل طبق رابطه (۳) ایجاب می‌کند که مؤلفه نرمال جریان بین دو مرز که با اندیس‌های ۱ و ۲ نشان داده می‌شوند پیوسته باشد [۱۹] لذا داریم:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)\mathbf{E}_2 \quad (16)$$

به عبارتی دیگر:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_1(1 + j\omega\epsilon_1/\sigma_1)\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_2(1 + j\omega\epsilon_2/\sigma_2)\mathbf{E}_2 \quad (17)$$

از آنجا که در محیط مغز $|\frac{j\omega\epsilon}{\sigma}| \ll 1$ است، لذا شرط فوق را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_1\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_2\mathbf{E}_2 \quad (18)$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی آن پاسخی از معادله (۱۵) است که شرایط مرزی‌ای را ارضا کند که پتانسیل الکتریکی پیوسته بوده و مؤلفه نرمال جریان برگشتی ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma\mathbf{E}$) بر روی ناحیه جداکننده مرزها با رسانایی‌های σ_1 و σ_2 پیوسته باشد [۱۹]. لذا شرایط مرزی مربوط به معادله (۱۵) عبارتند از:

$$V_1 = V_2; \quad \sigma_1 \mathbf{n} \cdot \nabla_1 V = \sigma_2 \mathbf{n} \cdot \nabla_2 V \quad (19)$$

در روابط بالا تساوی سمت چپ بیانگر پیوستگی پتانسیل الکتریکی بر روی مرز و تساوی سمت راست بیانگر پیوستگی مؤلفه نرمال جریان برگشتی بر روی مرز می‌باشد.

برای محاسبه میدان مغناطیسی نیز با توجه به پایستاربودن جریان

کل (رابطه (۳))، می‌توان از قانون بیوساوار استفاده کرد:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \quad (20)$$

که در آن \mathbf{J} طبق رابطه (۱) تعریف می‌شود. ترکیب معادلات (۱۵)، (۱۹) و (۲۰) تقریب شبه‌استاتیک معادلات ماکسول را برای پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی می‌سازند. حل این معادلات برای یک مدل کلی (غیر کروی) از سر نیازمند استفاده از یک راه‌حل عددی ابتدا برای $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ و سپس برای $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ می‌باشد زیرا توزیع جریان برگشتی برای \mathbf{B} نیازمند محاسبه $\nabla\mathbf{V}$ است ($\mathbf{J}^R = \sigma\mathbf{E} = \sigma\nabla V$). اما برای نوع خاصی از هندسه مسئله، راه‌حل‌های تحلیلی موجود می‌باشند که مهمترین آن‌ها یک هندسه کروی است که در آن فرض شده است که رسانایی الکتریکی (σ) فقط به فاصله از مبدأ وابسته است. اگرچه سر انسان یک کره نیست ولی چندان از کره فاصله ندارد و می‌توان با در نظر گرفتن

$$2\pi f\epsilon/\sigma = 2 \times 10^{-3} \ll 1 \quad (6)$$

در نتیجه در معادله (۴) می‌توانیم از ترم $\epsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$ در مقابل $\sigma\mathbf{E}$ صرف نظر نماییم.

برای اثبات اینکه در معادله (۵) ترم $\partial\mathbf{B}/\partial t$ نیز قابل صرف نظر کردن است، از طرفین این معادله کرل می‌گیریم [۵]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\mathbf{E} + \epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}) = -j2\pi f\mu_0(\sigma + j2\pi f\epsilon)\mathbf{E} \quad (7)$$

باید بتوانیم ثابت کنیم که سمت راست رابطه (۵) برابر با صفر است، و این بدان معناست که کرل \mathbf{E} برابر با صفر باشد. صفر بودن کرل \mathbf{E} نشانگر این است که باید میدان \mathbf{E} یک میدان غیرچرخشی (یا پایستار) بوده باشد. بنابراین اگر بتوانیم ثابت کنیم که میدان \mathbf{E} در مغز دارای مؤلفه چرخشی نیست، به هدف خود دست یافته‌ایم. به این منظور ابتدا میدان الکتریکی را طبق قضیه هلمهولتز^۶ به دو بخش چرخشی و غیرچرخشی تجزیه می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که بخش چرخشی میدان، قسمت بسیار کوچک و قابل صرف نظر کردنی از کل میدان \mathbf{E} است. لذا داریم:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \delta\mathbf{E} \quad (8)$$

که در آن جمله اول سمت راست بیانگر جزء غیرچرخشی میدان و جمله دوم بیانگر جزء چرخشی آن است. با نتیجه‌ای که در قسمت قبل مبنی بر قابل صرف نظر کردن ترم $\epsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$ در مقابل $\sigma\mathbf{E}$ به دست آمد، رابطه (۷) را به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \approx -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\mathbf{E}) = -j2\pi f\mu_0\sigma\mathbf{E} \quad (9)$$

با جایگذاری (۸) در (۹) و تعریف $\lambda = (2\pi f\mu_0\sigma)^{-\frac{1}{2}}$ داریم:

$$\nabla \times \nabla \times \delta\mathbf{E} \approx \frac{-j}{\lambda^2}\mathbf{E} \quad (10)$$

در اینجا گفته می‌شود که فاصله مشخصه^۸ که در آن $\delta\mathbf{E}$ تغییر می‌کند برابر با اندازه مشخصه سر (R) است؛ و این یعنی [۱۸]:

$$\nabla \times \nabla \times \delta\mathbf{E} \sim \frac{\delta\mathbf{E}}{R^2} \quad (11)$$

بنابراین داریم:

$$\delta\mathbf{E} \sim \frac{R^2}{\lambda^2}\mathbf{E} \quad (12)$$

با در نظر گرفتن $\sigma = 0.3\Omega^{-1}m^{-1}$ (رسانایی بافت مغز) و $\epsilon = 10^5\epsilon_0$ و $f = 100Hz$ و $R = 0.1m$ داریم:

$$\delta\mathbf{E} \sim 2 \times 10^{-6}\mathbf{E} \quad (13)$$

در نتیجه $\delta\mathbf{E} \ll \mathbf{E}$ ؛ و این یعنی جزء چرخشی میدان الکتریکی بسیار کوچک است و قسمت اعظم آن را جزء غیرچرخشی تشکیل می‌دهد و می‌دانیم که کرل یک میدان غیرچرخشی برابر با صفر است و این یعنی سمت راست رابطه (۵) برابر صفر است. با صفر بودن سمت راست معادله (۵)، میدان \mathbf{E} را می‌توان بر حسب گرادیان پتانسیل الکتریکی به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (14)$$

اطلاعات از آن بوده و این در گرو کمتر کردن هرچه بیشتر تقریب‌ها می باشد. ممکن است این سؤال مطرح گردد که با صرف نظر نکردن از جمله‌های مشتق زمانی در معادلات ماکسول، شاید تفاوت در پاسخ‌های به دست آمده آنقدر کوچک باشد که قابل آشکار سازی نباشند. در پاسخ باید گفت که:

اولاً این موضوع باید بر روی خروجی میدان‌های حاصله به صورت کمی تحقیق شود و دقیقاً میزان این تفاوت روشن گردد. کاری که به صورت مر سوم از سال ۱۹۶۷ تاکنون در مقالات انجام می شود [۲۵] این است که از همان ابتدا با ارائه این استدلال که اندازه جمله‌های مشتق زمانی بسیار ناچیز است، فرم معادلات ماکسول را به شبه‌استاتیک تغییر داده و مسئله را حل می‌نمایند. مهم اینکه هیچ مقاله‌ای تاکنون به این موضوع نپرداخته که در صورت صرف نظر نکردن از این جمله‌ها دقیقاً چه مقدار تفاوت بر روی میدان‌های حاصله ایجاد می شود.

ثانیاً با پیشرفت تکنولوژی سیستم‌های EEG/MEG به همراه شیلدینگ بهتر، این سیستم‌ها روز به روز دارای سطح نویز کمتر و حساسیت بیشتر می‌گردند. لازم به ذکر است که بهترین دقتی که تاکنون برای MEG یافت شده است برابر با $0.01 fT \sqrt{\frac{cm^2}{Hz}}$ [۲۶، ۶] و برای EEG به مقدار $2.7 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$ [۲۸، ۲۷] می‌باشد. لذا به نظر می‌رسد در صورتیکه تفاوت بین داده‌های شبه‌استاتیک و تمام‌موج به مقدار بسیار کم هم باشد، با دستگاه‌های مدرن امروزی قابل آشکار سازی است. در بخش بعدی که شبیه‌سازی تمام‌موج ارائه می‌گردد این تفاوت‌ها به صورت کمی نشان داده خواهد شد.

(۲) همانگونه که در بخش اول ذکر شد، برای صرف نظر کردن از جمله $\frac{\partial E}{\partial t}$ باید شرط $2\pi f \epsilon / \sigma \ll 1$ برقرار باشد. این شرط به ازای پارامترهای درون مغز برقرار است اما در محل اندازه‌گیری که خارج از مغز است این شرط برقرار نمی‌باشد زیرا در خارج از مغز $\sigma = 0$ بوده و $2\pi f \epsilon / \sigma \rightarrow \infty$. بنابراین برای بیرون از مغز نباید از ترم $\frac{\partial E}{\partial t}$ صرف نظر نمود. این مطلب در صرف نظر سازی از جمله $\frac{\partial B}{\partial t}$ برای بیرون از مغز که $\sigma = 0$ است نیز برقرار است، چراکه در صرف نظر سازی از آن، شرط بالا در رابطه (۹) لحاظ شده است.

(۳) در [۲۹] این نکته تاکید شده است که جریان جابجایی (جمله $\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$) نماینده‌ی شارژ خازن موجود در بین غشای نورون‌ها است و نمی‌توان آن را نادیده گرفت. علاوه بر این در [۳۰] نیز تأکید شده است که به علت اینکه اساساً هدف مسئله معکوس در EEG/MEG رصد پدیده‌های نورونی دینامیک است (پتانسیل عمل^۹ دارای زمان خیز در مرتبه ۰/۵ میلی ثانیه است) لازم می‌نماید که جریان جابجایی قابل صرف نظر کردن نباشد. این موضوع در مطالعات مربوط به مسئله‌های تخمین منبع مرتبط با رصد نورون‌ها در بازو اشاره شده است [۳۱].

با وجود استفاده گسترده از مدل چگالی منبع جریان^{۱۰} (CSD) در ضبط پتانسیل فراسلولی در مغز، مکانیسم‌های فیزیکی تولید این سیگنال‌ها هنوز مورد بحث هستند. در حالیکه گمان می‌رفت پتانسیل

مغز، مجموعه و پوست سر به عنوان نواحی کروی متحدالمرکز به یک تقریب نسبتاً خوب برای V و B دست یافت [۱۱].

در صورتیکه σ تابعی از شعاع کره (r) باشد، نشان داده می‌شود که میدان مغناطیسی کل در بیرون سر ناشی از دوقطبی جریان نقطه‌ای با ممان p در مکان r_1 عبارت است از [۱۶، ۲۱-۲۰]:

$$B^{out}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi F^2} [Fp \times r_1 - (p \times r_1 \cdot r) \nabla F] \quad (21)$$

که در آن

$$F = a(r \cdot a + ra) \quad (22)$$

و

$$a = r - r_1 \quad (23)$$

نتیجه با اهمیتی که از معادله (۲۱) برداشت می‌شود این است که اگر ممان دوقطبی p در جهت شعاعی مکانش یعنی r_1 قرار گیرد، آنگاه رابطه $p \times r_1 = 0$ می‌شود و در نتیجه هیچ میدان مغناطیسی‌ای در بیرون از سر وجود نخواهد داشت.

برای یک کره یکنواخت، یک فرمول تحلیلی برای پتانسیل $V(r)$ ناشی از یک ممان دوقطبی جریان p که در مکان r_1 قرار دارد در [۲۲] داده شده است:

$$V(r) = p \cdot \nabla_1 H(r, r_1) \\ H(r, r_1) = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[\frac{2}{|r - r_1|} - \frac{1}{r} \ln \frac{r \cdot (r - r_1) + r|r - r_1|}{2r^2} \right], \quad (24) \\ (r \geq R, r_1 \leq R)$$

که در آن ∇_1 گرادیان نسبت به مختصات منبع است. لازم به ذکر است که روابط کاملتری برای پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی به ترتیب در [۲۳] و [۲۴] ارائه شده است. در این مقالات محاسبات مربوط به حل مسئله مستقیم، برای کره‌ی چندلایه و غیر همسانگرد تعمیم داده شده است.

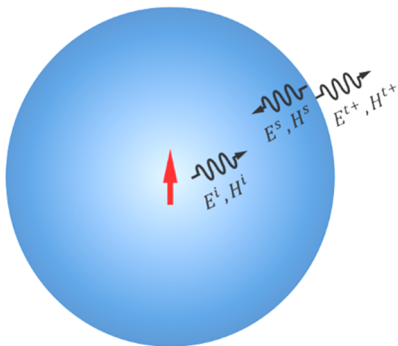
۳- تأملاتی بر تقریب شبه‌استاتیک

همانطور که در بخش قبل ذکر شد، به دلیل طبیعت فرکانس پایین فعالیت‌های نورونی مغز، از جمله‌های شامل مشتق زمانی در معادلات ماکسول صرف نظر می‌شود. در این صرف نظر سازی‌ها تأملاتی مطرح است که ذیلاً به آن‌ها اشاره می‌گردد:

(۱) اساساً هنگامی که در مسائل فیزیکی یک متغیری متشکل از جمع دو یا چند جزء باشد بطوریکه یکی از جزءهای آن در مقایسه با اجزای دیگر به مراتب بزرگتر باشد، معمولاً از جنبه مهندسی جزء یا اجزای کوچک مورد صرف نظر سازی قرار می‌گیرد (مانند صرف نظر کردن از برخی جملات بسط تیلور)، که این صرف نظر سازی‌ها موجب کاهش حجم محاسبات و تحلیل سریعتر می‌گردد. حال اگر در همان جزء کوچکی که صرف نظر می‌شود اطلاعات ارزشمندی نهفته باشد، آیا این صرف نظر سازی موثر است؟ یا اینکه باید روی آن سرمایه‌گذاری شود، هر چند به قیمت افزودن حجم محاسبات باشد؟ پرواضح است که در تحلیل سیگنال‌های مغزی آنچه مهم است تحصیل هرچه بیشتر

گرفتن تست EEG به داده‌هایی از منبع جریان دست یافت که سبب بی‌نیازی به گرفتن تست MEG گردد (البته عکس این قضیه هم صادق است).

به منظور حل تمام‌موج مسئله مستقیم در مغزنگاری الکتریکی و مغناطیسی ابتدا مسئله در ساده‌ترین فرم حل شده و سپس برای حالت‌های پیچیده‌تر راهکارهای لازم ارائه خواهد شد. حالت ساده شده این مسئله عبارت است از: محاسبه پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی ناشی از یک دوقطبی جریان واقع در مرکز یک کره تلفاتی همگن. هندسه مسئله به همراه میدان‌های تابشی، انعکاسی و انتقالی در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲: دوقطبی جریان در مرکز کره همگن به همراه امواج پراکنده‌گی به منظور حل مسئله ابتدا باید معادله پتانسیل برداری (A) برای یک المان جریان واقع در مرکز دستگاه مختصات نوشته شود. از آنجائیکه شکل پراکنده‌گر کروی است، لذا جهت اعمال شرایط مرزی مناسب لازم است تا پتانسیل برداری و میدان‌های استخراج شده در دستگاه مختصات کروی بیان گردند. تابع پتانسیل برداری موج تابشی از دوقطبی جریان را می‌توان به صورت یک مؤلفه‌ی شعاعی به صورت زیر نوشت [۳۳]:

$$A_r^t = a \hat{H}_1^{(2)}(\beta_d r) P_1(\cos\theta), \quad a = \frac{j\mu_0 \beta_d I l}{4\pi} \quad (25)$$

که در آن $\hat{H}_1^{(2)}$ تابع هنکل کروی شلکائف^{۱۵} نوع دوم، P_1 تابع لژاندر نوع اول، $I l$ ممان دوقطبی جریان و β_d و θ به ترتیب ثابت انتشار و زاویه از محور Z می‌باشد.

فرم پتانسیل برداری موج پراکنده شده از مرکز کره به درون (A_r^s) به همان فرم A_r^t به همراه یک ضریب مجهول b نوشته می‌شود با این تفاوت که بجای تابع هنکل کروی شلکائف نوع دوم، از تابع بسل کروی شلکائف که یک موج ساکن را نشان می‌دهد ساخته شده است.

$$A_r^s = b \hat{H}_1(\beta_d r) P_1(\cos\theta) \quad (26)$$

فرم پتانسیل برداری موج انتقال یافته به محیط بیرون از کره (A_r^{t+}) نیز به همان فرم A_r^t به همراه یک ضریب مجهول c نوشته می‌شود.

$$A_r^{t+} = c \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 r) P_1(\cos\theta) \quad (27)$$

ضرایب مجهول b و c باید با اعمال شرایط مرزی پیوستگی مؤلفه مماسی میدان الکتریکی و مغناطیسی بر روی مرکز کره به دست آیند. به این منظور می‌بایست ابتدا عبارت میدان الکتریکی و مغناطیسی کل درون و بیرون کره نوشته شود. پتانسیل برداری مؤلفه میدان‌های درون

فراسلولی منحصراً توسط جریان‌های تراغشایی^{۱۱} تولید می‌شود، مطالعات اخیر نشان می‌دهد که جریان‌های انتشاری^{۱۲}، افقی^{۱۳} و جابجایی^{۱۴} فراسلولی – که به طور سنتی نادیده گرفته می‌شوند – نیز می‌توانند به میزان قابل توجهی در ضبط پتانسیل فراسلولی شرکت داشته باشند [۲۹]. در نادیده گرفتن جریان جابجایی و القای مغناطیسی به طور ضمنی فرض می‌شود که در محدوده فرکانس فیزیولوژیکی، رسانایی بافت مستقل از فرکانس سیگنال است و جریان‌های انتشاری، افقی و جابجایی در فضای فراسلولی در مقایسه با جریان شناور اهمی قابل صرف نظر کردن است. اما اعتبار این فرض‌ها در مطالعات اخیر زیر سؤال رفته است [۲۹]. در [۳۲] یک مدل تئوری مورد توسعه قرار گرفت که پیش‌بینی می‌کند که انتشار یونی در فضای فراسلولی اصلی ترین دلیل برای وابستگی پتانسیل میدان محلی به فرکانس است.

در تمام استدلال‌هایی که برای صرف نظر سازی‌ها آورده شده است، فرض بر این قرار داده شده که محیط مسئله یک محیط خطی، همه‌سویکسانگرد و همگن است [۲۵]. در حالیکه مغز انسان به طور واقعی این خصوصیات را ندارد [۸] و به همین دلیل طبیعتاً در شرایط واقعی این استدلال‌ها زیر سؤال می‌رود.

۴- محاسبه میدان‌ها بر اساس تحلیل تمام‌موج

تأملاتی که در بخش قبل به آن‌ها اشاره شد ما را ترغیب نموده که برای اولین بار مقادیر میدان‌های الکترومغناطیسی ناشی از نورون‌های مغز را با روش تمام‌موج استخراج کرده و تفاوت‌های آن را با مقادیر حاصل از روش شبه‌استاتیک نشان دهیم. استفاده از مدل تمام‌موج بجای تقریب شبه‌استاتیک از دوجنبه حائز اهمیت زیادی است:

الف) هنگامی که در حل مسئله مستقیم MEG و EEG از مبنای تقریب شبه‌استاتیک (و نه تمام‌موج) استفاده می‌گردد، خود به خود بخشی از اطلاعات ثبت شده در نظر گرفته نمی‌شود، و این یعنی در پژوهش‌های مترتب بر این حوزه – چه در علوم شناختی و چه در علوم درمانی – جنبه‌هایی از کنش‌های مغزی مورد غفلت قرار گرفته‌اند. بنابراین با داشتن محاسبات مربوط به مسئله مستقیم در رژیم تمام‌موج می‌توان به دقت‌های بالاتری در مکان‌یابی فعالیت‌های مغزی و نیز تصویربرداری از مغز دست یافت.

ب) بدست آوردن داده‌های EEG بسیار ارزان قیمت‌تر از تحصیل داده‌های MEG می‌باشد. زیرا قیمت دستگاه EEG در حدود چند هزار دلار بوده و درعین حال کم‌حجم است و قابلیت حمل و نقل به هر مکان دلخواهی را دارد. اما از طرف دیگر قیمت دستگاه MEG در حدود چند میلیون دلار بوده و درعین حال بسیار عظیم‌الجثه است و یکبار برای همیشه در سایت نصب می‌شود. استفاده از تقریب شبه‌استاتیک سبب شده است که کوپل بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در نظر گرفته نشود و در نتیجه هریک از EEG و MEG بخشی از اطلاعات را در مورد منابع جریان درون مغز تحصیل کنند. در صورتی که بتوان مسئله مستقیم مغز را به صورت تمام‌موج حل نمود، آنگاه می‌توان تنها با

$$\begin{aligned}
 P_b &= -\varepsilon_0 \beta_a \hat{J}_0(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) + \frac{\varepsilon_0}{R} \hat{J}_1(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) \\
 M_c &= \varepsilon_0 \beta_a \hat{H}_0^{(2)}(\beta_a R) \hat{J}_1(\beta_a R) - \frac{\varepsilon_0}{R} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a R) \hat{J}_1(\beta_a R) \\
 N_c &= -\varepsilon_0 \beta_a \hat{J}_0(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a R) + \frac{\varepsilon_0}{R} \hat{J}_1(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a R) \\
 O_c &= \varepsilon_a \beta_0 \hat{H}_0^{(2)}(\beta_0 R) \hat{J}_1(\beta_a R) - \frac{\varepsilon_d}{R} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) \hat{J}_1(\beta_a R) \\
 P_c &= -\varepsilon_0 \beta_a \hat{J}_0(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) + \frac{\varepsilon_0}{R} \hat{J}_1(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R)
 \end{aligned}$$

بدین ترتیب از رابطه‌های (۳۷) و (۳۸) میدان مغناطیسی درون و بیرون کره به دست می‌آید. برای توزیع پتانسیل الکتریکی درون کره، طبق پیوست (الف) داریم:

$$V = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial A_r}{\partial r} \quad (۴۳)$$

برای پتانسیل الکتریکی درون کره، با جایگذاری (۲۸) در (۴۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 V^{t-} &= -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon_d} \left[a\beta_a \hat{H}_0^{(2)}(\beta_a r) \cos\theta \right. \\
 &\quad - \frac{a}{r} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a r) \cos\theta \\
 &\quad + b\beta_a \hat{J}_0(\beta_a r) \cos\theta \\
 &\quad \left. - \frac{b}{r} \hat{J}_1(\beta_a r) \cos\theta \right] \quad (۴۴)
 \end{aligned}$$

برای توزیع پتانسیل الکتریکی بیرون کره با جایگذاری (۲۷) در (۴۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 V^{t+} &= -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon_0} \left[c\beta_0 \hat{H}_0^{(2)}(\beta_0 r) \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c}{r} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 r) \cos\theta \right] \quad (۴۵)
 \end{aligned}$$

بدین ترتیب میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی برای یک دوقطبی الکتریکی واقع در کره‌ی همگن استخراج شده‌اند

۵- شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

اکنون با استفاده از داده‌های نمونه مغزی، می‌توان شکل الگوی میدان‌ها با تحلیل شبه‌استاتیک را از طریق رابطه‌های (۲۱) و (۲۴) و با تحلیل تمام‌موج از طریق رابطه‌های (۳۷)، (۳۸)، (۴۴) و (۴۵) ترسیم کرده و با یکدیگر مقایسه نمود.

قبل از ترسیم الگوی میدان، پارامترهای انتخاب‌شده برای شبیه‌سازی در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱: پارامترهای شبیه‌سازی

نام پارامتر	نماد	مقدار [مرجع]
فرکانس	f	۱۰۰۰ هرتز [۱۱، ۵]
رسانایی	σ	۰.۳۳ S/m [۱۱]
ضریب دی‌الکتریک	ε_r	۱۰.۵ [۵]
ممان دوقطبی جریان	P	۷۰۰ nAm [۳۵]

در شکل (۳) پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی درون و بیرون کره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر در یک سطح مقطع برشی از آن نشان داده شده است. به منظور اینکه شکل‌ها رنگبندی مناسبی پیدا کند، اندازه میدان‌ها همگی در واحد دسیبیل نشان داده شده است (10log()). بنابراین مثلاً عدد 120- به معنی 10^{-12} می‌باشد.

کره، حاصل جمع پتانسیل برداری تابشی و پراکنده شده (A_r^{t-}) است و به صورت رابطه (۲۸) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 A_r^{t-} &= A_r^i + A_r^s = a\hat{H}_1^{(2)}(\beta_a r) P_1(\cos\theta) \\
 &\quad + b\hat{J}_1(\beta_a r) P_1(\cos\theta) \quad (۲۸)
 \end{aligned}$$

از آنجاکه در این مسئله $\mathbf{F} = 0$ و $\mathbf{A} \neq 0$ است، لذا موج منتشرشده TM^r بوده و معادلات مرتبط‌کننده‌ی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به پتانسیل برداری عبارتند از [۳۴]:

$$E_r = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) A_r \quad (۲۹)$$

$$E_\theta = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \quad (۳۰)$$

$$E_\phi = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} \quad (۳۱)$$

$$H_r = 0 \quad (۳۲)$$

$$H_\theta = \frac{1}{\mu r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \quad (۳۳)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \quad (۳۴)$$

با توجه به اینکه A_r دارای تابعیت ϕ نیست، لذا $H_\theta = 0$ و $E_\phi = 0$ می‌باشند. بنابراین میدان الکتریکی دارای مؤلفه \mathbf{a}_r و \mathbf{a}_θ و میدان مغناطیسی تنها دارای مؤلفه \mathbf{a}_ϕ می‌باشد. مؤلفه \mathbf{a}_ϕ می‌باشد. مطابق زیر به میدان‌های درون و بیرون کره طبق روابط (۳۵) تا (۳۸) مطابق زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 E_\theta^{t-} &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon_d r} \left[-a\beta_a \hat{H}_0^{(2)}(\beta_a r) \sin\theta \right. \\
 &\quad + \frac{a}{r} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a r) \sin\theta \\
 &\quad - b\beta_a \hat{J}_0(\beta_a r) \sin\theta \\
 &\quad \left. + \frac{b}{r} \hat{J}_1(\beta_a r) \sin\theta \right] \quad (۳۵)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_\theta^{t+} &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon_0 r} \left[-c\beta_0 \hat{H}_0^{(2)}(\beta_0 r) \sin\theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c}{r} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 r) \sin\theta \right] \quad (۳۶)
 \end{aligned}$$

$$H_\phi^{t-} = -\frac{1}{\mu r} \left[-a\hat{H}_1^{(2)}(\beta_a r) \sin\theta - b\hat{J}_1(\beta_a r) \sin\theta \right] \quad (۳۷)$$

$$H_\phi^{t+} = -\frac{1}{\mu r} \left[-c\hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 r) \sin\theta \right] \quad (۳۸)$$

با اعمال شرایط مرزی یعنی پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی و مغناطیسی بر روی مرز کره:

$$E_\theta^{t+}(r=R) = E_\theta^{t-}(r=R) \quad (۳۹)$$

$$H_\phi^{t+}(r=R) = H_\phi^{t-}(r=R) \quad (۴۰)$$

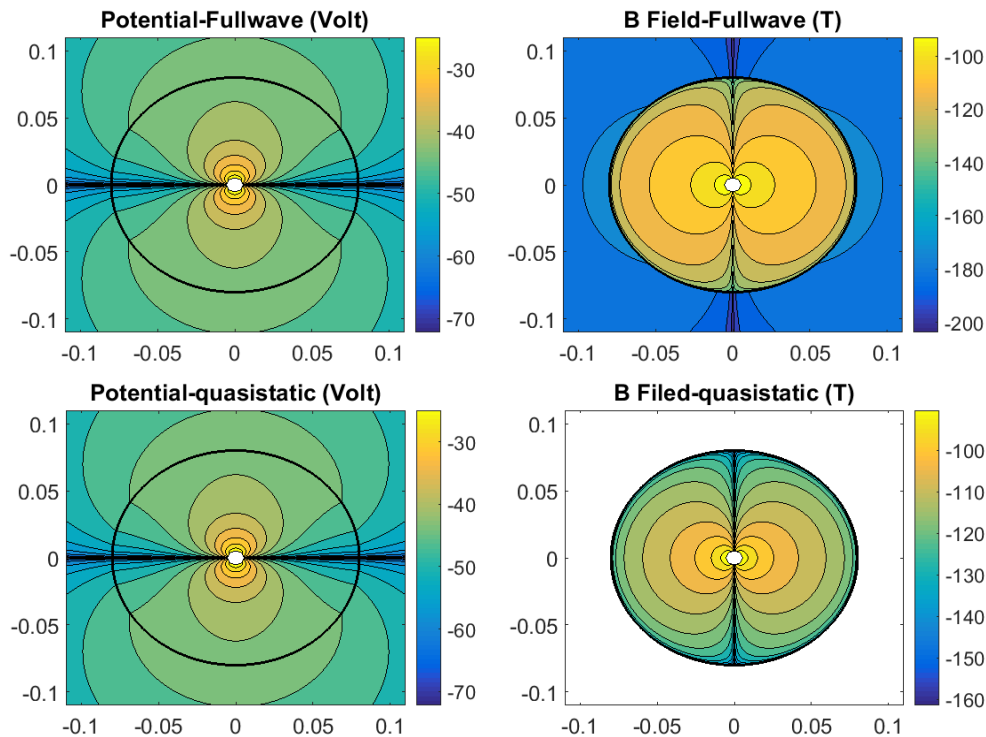
ثابت‌های b و c به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$b = \frac{M_b + N_b}{O_b + P_b} \quad (۴۱)$$

$$c = \frac{M_c + N_c}{O_c + P_c} \quad (۴۲)$$

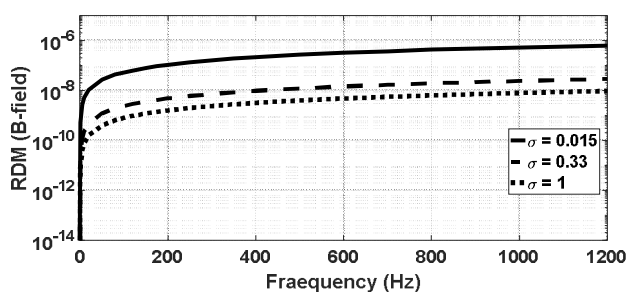
که در آن ثابت‌های M, N, O, P برای هر کدام از b و c عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 M_b &= \varepsilon_0 \beta_a \hat{H}_0^{(2)}(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) - \frac{\varepsilon_0}{R} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) \\
 N_b &= -\varepsilon_a \beta_0 \hat{H}_0^{(2)}(\beta_0 R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a R) + \frac{\varepsilon_0}{R} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_a R) \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) \\
 O_b &= \varepsilon_a \beta_0 \hat{H}_0^{(2)}(\beta_0 R) \hat{J}_1(\beta_a R) - \frac{\varepsilon_d}{R} \hat{H}_1^{(2)}(\beta_0 R) \hat{J}_1(\beta_a R)
 \end{aligned}$$



شکل ۳: راست: اندازه میدان مغناطیسی با تحلیل تمامموج و شبه‌استاتیک؛ چپ: اندازه پتانسیل الکتریکی با تحلیل تمامموج و شبه‌استاتیک

نکته قابل توجه اینکه به دلیل اینکه دوقطبی جریان واقع در مرکز همواره دارای جهت شعاعی است، طبق تحلیل شبه‌استاتیک، اندازه میدان حاصل از آن در بیرون از مغز صرفنظر از اندازه ممان دوقطبی، برابر با صفر است (رابطه (۲۱)). به تعبیری دیگر، در MEG‌های فعلی طبق تحلیل شبه‌استاتیک، نورون‌های شعاعی مورد شناسایی قرار نمی‌گیرند. اما نتایج شکل (۳) طبق تحلیل تمامموج نشان می‌دهد که حتی یک نورون شعاعی هم به طور واقع در بیرون از سر میدان مغناطیسی از خود به جای می‌گذارد و می‌تواند مورد شناسایی قرار گیرد. به منظور اعتبار سنجی راه‌حل ارائه شده در بالا لازم است تا پاسخ‌های تمامموج حاصله برای میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی را در فرکانس صفر با پاسخ‌های شبه‌استاتیک مقایسه کرد. انتظار می‌رود که در این حالت پاسخ‌ها برهم منطبق شوند. اما در اینجا توجه به یک نکته حائز اهمیت است و آن اینکه توابع هنکل شلکائف نوع دوم در هنگامی که آرگومان آن صفر باشد تکین هستند و لذا نمی‌توان در راه‌حل‌های تمامموج فرکانس را دقیقاً برابر صفر قرار داد، بلکه باید حالت حدی آن را در نظر گرفت؛ یعنی فرکانس را برابر با عدد بسیار کوچکی قرار داد و نتایج را مقایسه نمود. به این منظور از معیار اختلاف نسبی^{۱۶} (RDM) طبق رابطه (۴۶) استفاده می‌شود [۳۶].



شکل ۴: معیار خطای نسبی بین پاسخ شبه‌استاتیک و تمامموج برای میدان مغناطیسی

در رابطه بالا i مکان هریک از نودها در مش‌بندی، N تعداد نودها، V_i^A مقدار پتانسیل الکتریکی (یا میدان مغناطیسی) به‌دست‌آمده از روش شبه‌استاتیک در مکان نود i -ام و V_i^A مقدار پتانسیل الکتریکی (یا میدان مغناطیسی) حاصل از راه‌حل تمامموج است. لازم به ذکر است

$$RDM = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (V_i^A - V_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (V_i^A)^2}} \quad (46)$$

پیوست‌ها

برای بدست آوردن پتانسیل الکتریکی از روی تابع پتانسیل برداری مغناطیسی (A) لازم است تا ابتدا معادلات ماکسول در محیط بدون منبع ($\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$) نوشته شوند:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (۱پ)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = j\omega\mu_0\epsilon_c\mathbf{E} \quad (۲پ)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۳پ)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۴پ)$$

از رابطه (۴پ) پتانسیل برداری مغناطیسی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۵پ)$$

با ترکیب رابطه (۵پ) و (۱پ) و توجه به اینکه کرل گرادیان هر میدانی صفر است، پتانسیل الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla V \quad (۶پ)$$

با ترکیب رابطه (۶پ)، (۵پ) و (۶پ) ارتباط بین پتانسیل برداری مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی به دست می‌آید^{۱۷}:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega\mu_0\epsilon_c(-j\omega\mathbf{A} - \nabla V)$$

یا

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \omega^2\mu_0\epsilon_c\mathbf{A} = -j\omega\mu_0\epsilon_c\nabla V \quad (۷پ)$$

باتوجه به رابطه (۲۷) و (۲۸) چون پتانسیل برداری \mathbf{A} تنها دارای مؤلفه \mathbf{a}_r می‌باشد، یعنی:

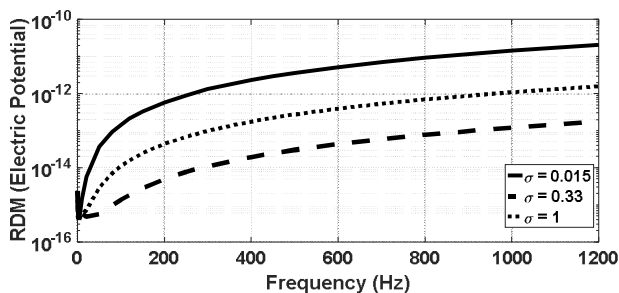
$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_r A_r(r, \theta) \quad (۸پ)$$

لذا از رابطه (۷پ) می‌توان پتانسیل الکتریکی را به صورت ساده زیر به دست آورد:

$$V = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \frac{\partial A_r}{\partial r} \quad (۹پ)$$

مراجع

- [1] محمدعلی گنجعلی و وحید شالچیان، «استخراج الگوهای فضایی طیفی از سیگنال‌های الکتروانسفالوگرام برای تشخیص اختلال شناختی خفیف»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، دوره ۴۸، شماره ۴، صفحه ۱۷۵۲-۱۷۴۱، زمستان ۱۳۹۷.
- [2] T. Ito, H. Otsubo, H. Shiraishi, K. Yagyū, Y. Takahashi, Y. Ueda, F. Takeuchi, K. Takahashi, S. Nakane and S. Kohsaka and S. Saitoh, "Advantageous information provided by magnetoencephalography for patients with neocortical epilepsy," Brain and Development, vol. 37, no. 2, pp. 237-242, 2015.
- [3] J. Ebersole, "EEG voltage topography and dipole source modeling of epileptiform potentials," In Ebersole JS, Pedley TA (Eds), Current practice of clinical electroencephalography. Philadelphia: Lippincott Williams and Wilkins, pp. 732-752, 2003.
- [4] C. Plummer, A. S. Harvey and M. Cook, "EEG source localization in focal epilepsy: where are we now?," Epilepsia, vol. 49, no. 2, pp. 201-218, 2007.
- [5] M. Hämäläinen, R. Hari, R. J. Ilmoniemi, J. Knutila and O. V. Lounasmaa, "Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain." Reviews of Modern Physics, vol. 65, no. 2, pp. 413-497, 1993.
- [6] B. B. Andrei, "Brain's magnetic field: a narrow window to brain's activity," Electromagnetic field and the human body workshop, Technion, December 2010.



شکل ۵: معیار خطای نسبی بین پاسخ شبه استاتیک و تمام‌موج برای پتانسیل الکتریکی

همانطور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، میزان تفاوت بین پاسخ شبه‌استاتیک و تمام‌موج با افزایش فرکانس بیشتر خود را نشان می‌دهد و همچنین این میزان تفاوت به رسانایی لایه مغز نیز حساس است. نوع میزان حساسیت خطای نسبی به میزان رسانایی موضوعی است که در آینده باید مورد بررسی دقیق قرار گیرد.

نکته بسیار مهمی که باید به آن توجه کرد این است که طبق تحلیل شبه‌استاتیک، در تست MEG هرآنچه که آشکار سازی می‌شود یا تماماً از نوروهای مماسی حاصل شده است و یا از مؤلفه مماسی یک نورن. اما واقعیت طبق تحلیل تمام‌موج این است که سیگنال آشکار سازی شده حاصل فعالیت هر دو نوع نورن است. وجود چنین خطایی اثر عمیقی در حل مسئله معکوس و به تبع آن شناخت هرچه بیشتر مغز و فعالیت‌های احساسی و حرکتی آن دارد.

۶- نتیجه

در مدل سازی امواج مغزی به روش شبه‌استاتیک، از جمله‌های مشتق زمانی در معادلات ماکسول صرف‌نظر می‌شود. این صرف‌نظر سازی با ابهاماتی مطرح است که در این مقاله به آن‌ها پرداخته شده است. سپس امواج مغزی بر اساس تحلیل تمام‌موج مورد مدل سازی قرار گرفته‌اند. در این مدل سازی از یک کره با رسانایی متناسب به‌عنوان سر انسان و یک دوقطبی جریان به‌عنوان مدلی برای دسته نوروهای فعال در سر استفاده شده است. در تحلیل تمام‌موج از تئوری پراکندگی در الکترومغناطیس استفاده گردیده و نتایج در مقایسه با پاسخ‌های سنتی شبه‌استاتیک، برای اولین بار، مقایسه شده است. به این منظور معیار اختلاف نسبی RDM برای بیان میزان خطای پاسخ شبه‌استاتیک بکار گرفته شده و منحنی آن برحسب فرکانس و به ازای چند رسانایی مختلف رسم شده است. از نتایج مشخص شده است که طبق انتظار با افزایش فرکانس میزان خطای پاسخ شبه‌استاتیک افزایش می‌یابد و در فرکانس‌های نزدیک به صفر پاسخ‌ها به یکدیگر همگرا می‌شوند. از آنجاکه محاسبات و شبیه سازی برای منبعی در مرکز سر در نظر گرفته شده است، انتظار می‌رود که با خروج منبع جریان از مرکز، میزان خطا بیشتر خود را نشان دهد. حل مسئله تمام‌موج برای منبع جریان واقع در خارج از مرکز دارای دشواری‌هایی می‌باشد و پرداختن به این مسئله جزو پژوهش‌های آتی ما می‌باشد.

- [22] L. Heller, D. van Hulsteyn, "Brain stimulation using electromagnetic sources: theoretical aspects," *Biophysics Journal*, vol. 63, no. 1, pp. 129-138, 1992.
- [23] Y. Petrov, "Anisotropic spherical head model and its application to imaging electric activity of the brain," *physical review*, vol. 86, pp. 1-13, 2012.
- [24] J. O. Nieminen and M. Stenroos, "The magnetic field inside a layered anisotropic spherical conductor due to internal sources," *Journal of Applied Physics*, vol. 119, no. 2023901, pp. 1-12, 2016.
- [25] R. Plonsey and D. B. Heppner, "Considerations of quasi-stationarity in electrophysiological systems," *The Bulletin of mathematical biophysics*, vol. 29, no. 4, pp. 657-664, 1967.
- [26] H. B. Dang and A. C. Maloof and M. V. Romalis, "Ultrahigh sensitivity magnetic field and magnetization measurements with an atomic magnetometer," *Applied Physics Letters*, vol. 97, no. 15:151110, 2010.
- [27] H. J. Scheer, T. Fedele and G. Curio and M. Burghoff, "Extension of non-invasive EEG into the kHz range for evoked thalamocortical activity by means of very low noise amplifiers," *Physiological measurement*, vol. 32, no. 12, p. N73, 2011.
- [28] T. Fedele, H. J. Scheer, M. Burghoff and G. Curio and R. Körber, "Ultra-low-noise EEG/MEG systems enable bimodal non-invasive detection of spike-like human somatosensory evoked responses at 1 kHz," *Physiological measurement*, vol. 36, no. 2, pp. 357-368, 2015.
- [29] S. L. Gratiy, G. Haines, D. Denman, M. Hawrylycz, C. Koch and G. T. Einevoll and C. A. Anastassiou, "From Maxwell's equations to the theory of current-source density analysis," *European Journal of Neuroscience*, vol. 45, no. 8, pp. 1013-1023, 2017.
- [30] R. Albanese and P. B. Monk, "The inverse source problem for Maxwell's equations," *Inverse Problems*, vol. 22, no. 3, pp. 1023-1035, 2006.
- [31] T. Kuiken, Stoykov, M. Popovic and M. Lowery and A. Tafflove, "Finite element modeling of electromagnetic signal propagation in a phantom arm," *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, vol. 9, no. 4, pp. 346-354, 2001.
- [32] C. Bedard and A. Destexhe, "Macroscopic models of local field potentials and the apparent $1/f$ noise in brain activity," *Biophysics Journal*, vol. 96, no. 7, pp. 2589-2603, 2009.
- [33] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, IEEE Press series on Electromagnetic Wave Theory, p. 287, 2001.
- [34] C. A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics," John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 2012.
- [35] T. Ito, H. Otsubo, H. Shiraishi, K. Yagyu, Y. Takahashi, Y. Ueda, F. Takeuchi, K. Takahashi, S. Nakane and S. Kohsaka and S. Saitoh, "Advantageous information provided by magnetoencephalography for patients with neocortical epilepsy," *Brain and Development*, vol. 37, no. 2, pp. 237-242, 2015.
- [36] J. Meijs, O. Weier and M. J. Peters and A. V. Oosterom, "On the numerical accuracy of the boundary element method," *IEEE transactions on biomedical engineering*, vol. 36, no. 10, pp. 1038-1049, 1989.
- [7] مرتضی بهنام و حسین پورقاسم، «شناسایی صرع بر اساس بهینه‌سازی ویژگی‌های ادغامی تبدیل هارتلی با مدل ترکیبی MLP و GA همراه با استراتژی یادگیری ممتیک»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، دوره ۴۵، شماره ۴، صفحه ۶۷-۵۱، زمستان ۱۳۹۴.
- [8] J. Vorwerk, J. Cho, S. Rampp, H. Hamer and T. R. Knösche and C. H. Wolters, "A guideline for head volume conductor modeling in EEG and MEG," *NeuroImage*, vol. 100, pp. 590-607, 2014.
- [9] C. H. Wolters, A. Anwander, X. Tricoche, D. Weinstein and M. A. Koch and R. S. Macleod, "Influence of tissue conductivity anisotropy on EEG/MEG field and return current computation in a realistic head model: a simulation and visualization study using high-resolution finite element modeling," *NeuroImage*, vol. 30, no. 3, pp. 813-826, 2006.
- [10] J. de Munck and B. van Dijk and H. Spekreijse, "Mathematical dipoles are adequate to describe realistic generators of human brain activity," *IEEE Trans Biomed. Eng.* vol. 35, no. 11, pp. 960-966, 1988.
- [11] S. Supek and C. J. Aine, *Magnetoencephalography from Signals to Dynamic Cortical Networks*, Springer press, 2012.
- [12] D. Geselowitz, "On bioelectric potentials in an inhomogeneous volume conductor," *Biophys Journals*, vol. 7, no. 1, pp. 1-11, 1967.
- [13] J. Malmivuo, "Comparison of the properties of EEG and MEG in detecting the electric activity of the brain," *Brain topography*, vol. 25, no. 1, pp. 1-19, 2012.
- [14] Barnard and I. Duck and M. Lynn, "The application of electromagnetic theory to electrocardiology: I. derivation of the integral equations," *Biophysics Journals*, vol. 7, no. 5, pp. 443-462, 1967.
- [15] D. Brenner, J. Lipton and L. Kaufman and S. Williamson, "Somatically evoked magnetic fields of the human brain," *Science*, vol. 199, no. 4324, pp. 81-83, 1978.
- [16] J. Sarvas, "Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem," *Physics in Medicine & Biology*, vol. 32, no. 1, pp. 11-22, 1987.
- [17] M. Z. Koubeissi and N. J. Azar (Editors) "Epilepsy Board Review a Comprehensive Guide", (chap. 23: Magnetoencephalography and Magnetic Source Modeling), pp. 301-307, Springer press, New York, NY, 2017.
- [18] T. V. Zakhharova and P. I. Karpov, and V. M. Bugaevskii, "Localization of the activity source in the inverse problem of magnetoencephalography," *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 28, no. 2, pp. 148-157, 2017.
- [19] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley Press, 1999.
- [20] B. N. Cuffin and D. Cohen, "Magnetic fields of a dipole in special volume conductor shapes," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 4, pp. 372-381, 1977.
- [21] R. Ilmoniemi and M. S. Hamalainen and J. Knuutila, "The forward and inverse problems in the spherical model," *Proceedings of Biomagnetism: applications and theory journal*, Pergamon, New York, pp. 278-282, 1985.

زیر نویس‌ها

⁹ Action potential

¹⁰ Current Source Density

¹¹ Transmembrane currents

¹² Diffusive current

¹³ Advective current

¹⁴ Displacement current

¹⁵ Schelkunoff spherical Hankel function

¹⁶ Relative Difference Measure

^{۱۷} توجه شود که در بحث انتشار امواج کروی TM^f و TE^f از شرط لورنتس برای ساده‌سازی استفاده نمی‌شود. برای توضیحات بیشتر به صفحه ۵۵۰ منبع [۳۴] مراجعه شود.

¹ Electroencephalography

² Magnetoencephalography

³ Inverse Problem

⁴ Forward Problem

⁵ Somatosensory responses

⁶ Equivalent current dipole

^۷ قضیه هلمهولتز: یک بردار که دارای کرل و دیورژانس است و در بینهایت صفر می‌شود را می‌توان به صورت جمع دو جزء یکی غیرچرخشی و دیگری چرخشی (سلونوئیدی) نوشت.

⁸ Characteristic distance