

کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده خطی ناخودگردان: رهیافت نامساوی ماتریسی خطی

محمد رضا رضانی آل^۱، دانشجوی دکتری کنترل، علی وحیدیان کامیاد^۲، استاد، ناصر پریز^۳، استاد
 ۱- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - mramezani@gmail.com
 ۲- دانشکده ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - avkamyad@yahoo.com
 ۳- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - n-pariz@um.ac.ir

چکیده: سیستم‌های سوئیچ شونده خطی کلاس مهمی از سیستم‌های سوئیچ شونده هستند که بسیاری از سیستم‌های غیرخطی را می‌توان توسط آن‌ها مدل کرد. در این مقاله کنترل بهینه این سیستم‌ها به همراه اثبات پایداری و مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت وارده بر سیستم بررسی شده است. متغیرهای طراحی، ورودی‌های کنترل پیوسته و سیگنال سوئیچ گسسته‌ای هستند که باید به گونه‌ای طراحی گردند که یک تابع هزینه معین حداقل گردد. در روش ارائه شده ابتدا به هر یک از زیرسیستم‌ها یک تابع لیاپانوف مربعی مجهول اختصاص داده می‌شود. این توابع لیاپانوف بایستی در یک دستگاه نامعادلات صدق کنند تا شرایط رسیدن به کران پایین تابع هزینه حاصل گردد. برای آنکه پایداری نمایی کل سیستم سوئیچ شونده تضمین گردد این توابع علاوه بر شرایط مذکور باید در شرایط قضیه پایداری نمایی ارائه شده نیز صدق نمایند. در ادامه و برای به دست آوردن توابع لیاپانوف هر زیرسیستم، قانون کنترل، قانون سوئیچ بین زیرسیستم‌ها و کران پایین تابع هزینه، دو دسته شرایط بیان شده به یک دسته نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل می‌گردند که بایستی حل شوند. علاوه بر این، بهینگی کران پایین تابع هزینه نیز طبق قضیه‌ای بیان و اثبات می‌گردد. در انتها، مقاوم بودن رهیافت ارائه شده نسبت به عدم قطعیت‌های متغیر با زمان با نرم محدود وارده بر دینامیک‌های هر زیر سیستم نیز نشان داده خواهد شد. کارآیی روش پیشنهادی به کمک ارائه چند مثال بیان می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های سوئیچ شونده خطی، کنترل بهینه، نامساوی‌های خطی ماتریسی، توابع لیاپانوف.

Optimal Control of Non-Autonomous Switched Linear Systems: Linear Matrix Inequality Approach

M. R. Ramezani-al¹, A. Vahidian Kamyad², N. Pariz³,

1,2, 3- Faculty of Electrical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract: Switched linear system is an important class of switched systems which can model a wide range of nonlinear systems. In this paper, optimal control, stability and robustness of these systems are discussed. Continuous control inputs and discrete switching signal are the design variables to obtain the lower bound of a given cost function. In the proposed method, first, we assign a quadratic Lyapunov function to each subsystem such that must satisfy a set of inequalities to reach the lower bound of the cost. Second, to guarantee the exponential stability of overall system, these quadratic functions also must satisfy the conditions of presented exponential stability theorem. To obtain Lyapunov functions, state-feedback control inputs, switching signal and lower bound of the cost function, two sets of obtained inequalities are converted to a set of Linear Matrix Inequalities (LMIs) that must be solved. Moreover, optimality of the lower bound is proved. Finally, robustness of presented method against norm bounded time-varying uncertainties is shown. Several examples illustrate the efficiency of presented method.

Keywords: Switched linear systems, Optimal control, Linear matrix inequality, Lyapunov functions.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۲/۳/۲۰

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۲/۹/۱۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۲/۱۰/۴

نام نویسنده مسئول: محمد رضا رضانی آل

نشانی نویسنده مسئول: ایران - مشهد - بلوار وکیل آباد - دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده مهندسی برق

۱- مقدمه

کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده از جمله زمینه‌هایی است که اخیراً مورد توجه بسیاری از محققین علم کنترل قرار گرفته است. در کنترل این کلاس از سیستم‌های سوئیچ شونده متغیرهای طراحی می‌تواند تنها سیگنال‌های گسسته سوئیچ (برای سیستم‌های سوئیچ شونده خطی خودگردان^۱) و یا سیگنال‌های سوئیچ به همراه ورودی‌های کنترل پیوسته (برای سیستم‌های سوئیچ شونده خطی ناخودگردان^۲) باشند. در ادامه مروری کوتاه بر اهم کارهای انجام شده بر روی کنترل بهینه این سیستم‌ها خواهیم داشت.

در [۳-۱] مسئله کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده خودگردان با یک تابع معیار مربعی و بر روی افق زمانی بینهایت به همراه یک دنباله سوئیچ ثابت مطالعه شده است. در این مراجع قانون سوئیچ بهینه توسط گسسته‌سازی یکنواخت فضای حالت به دست می‌آید. هم چنین در [۴] مسئله تعیین زمان سوئیچ مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این تحقیق نیز مشابه بسیاری از تحقیقات دیگر در این زمینه، پاسخ حلقه باز را ارائه می‌دهد و مبتنی بر انتخاب تعداد متناهی از سوئیچ‌های از پیش تعیین شده و بهینه‌سازی زمان‌های سوئیچ با در نظر گرفتن تابع معیار معین است. برای چنین حل‌های حلقه بازی می‌توان با افزایش تعداد سوئیچ‌ها شبیه‌سازی را بهبود بخشید ولی از آن جا که این روش‌ها از الگوریتم‌های جستجو استفاده می‌نمایند هزینه محاسبات افزایش چشمگیری خواهد داشت. در [۵] مسئله بهینه‌سازی با توجه به این که لحظات سوئیچ و دنباله سوئیچ به عنوان متغیرهای تصمیم در نظر گرفته شوند توسعه داده شده است ولی الگوریتم ارائه شده همگرایی به نقطه بهینه سراسری را تضمین نمی‌کند و تنها برای انحرافات کوچک حول نقطه حالت اولیه معتبر است. نویسندگان مقاله [۵] در ادامه و در [۶] یک حل بهینه سراسری که بتواند قانون فیدبکی کنترل بهینه را برای تمام حالات اولیه تعیین نماید ارائه نمودند ولی هم چنان هزینه محاسبات این الگوریتم بسیار بالا بود. در [۷] مسئله کنترل بهینه سیستم سوئیچ شونده خودگردان با تابع هزینه مربعی و افق زمانی بینهایت برای تعداد ثابتی از سوئیچ‌ها مطالعه شده است و یک راه حل عددی مناسب برای محاسبه نواحی سوئیچ ارائه گردیده است. در [۸] مسئله کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده خودگردان مرجع [۷] هنگامی که تعداد سوئیچ‌ها به سمت بینهایت میل می‌کند مورد بررسی قرار گرفته است.

اخیراً تحقیقات مهمی در زمینه کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده خطی گسسته ناخودگردان انجام شده است. در [۹] مسئله پایدارسازی نمایی سیستم‌های سوئیچ شونده خطی گسسته با زمان بر اساس توابع کنترل لیاپانوف^۳ مورد مطالعه قرار گرفته و یک الگوریتم مناسب نیز برای رسیدن به یک تابع کنترل لیاپانوف و استراتژی پایدارسازی ارائه شده است.

در [۱۰] سیستم‌های مورد مطالعه در [۹] با رهیافت برنامه‌ریزی پویا مورد مطالعه قرار گرفته و ضمن توصیف و تحلیل تابع لیاپانوف، یک

استراتژی کنترل بهینه ارائه شده و الگوریتمی کارا برای حل مسئله تنظیم کننده خطی مربعی زمان گسسته پیشنهاد شده است. نتایج نشان می‌دهد که به طور چشم‌گیری محاسبات کاهش می‌یابد. برای مطالعه بیش‌تر به مراجع [۱۴-۱۱] مراجعه شود.

برخی تحقیقات در زمینه کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده پیوسته از حل تقریبی برای یافتن قانون کنترل و سوئیچ از طریق پیدا نمودن یک حد پایین برای تابع هزینه استفاده می‌نمایند. در [۱۸-۱۵] از نامعادلات هامیلتون-ژاکوبی-بلمن^۴ برای استخراج یک حد پایین قطعی بر روی تابع هزینه با استفاده از روشی مبتنی بر گسسته‌سازی فضای حالت برای حل عددی این نامعادلات استفاده شده است. در این روش نامعادلات هامیلتون-ژاکوبی-بلمن به تعداد متناهی برنامه‌ریزی خطی که خواص کران پایین تابع معیار را حفظ می‌کند گسسته شده‌اند و بر مبنای تابع هزینه، یک قانون کنترل و سوئیچ تقریبی به دست می‌آید.

یکی از مزایای این روش قابل اعمال بودن به سیستم‌های سوئیچ غیرخطی و از اشکالات بزرگ آن می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. اول آن که پیچیدگی حل با افزایش حالات به طور نمایی افزایش می‌یابد. دوم آن که هیچ گونه تحلیل پایداری برای کل سیستم سوئیچ شونده (غیرخطی و خطی) انجام نشده است و سوم آنکه قانون کنترل و سوئیچ به صورت تقریبی به دست می‌آیند.

در [۱۹] نیز همانند [۱۸] از رهیافت برنامه‌ریزی پویا برای کلاسی از سیستم‌های سوئیچ شونده و هابرید استفاده شده است و نوآوری آن در به دست آوردن یک کران بالا برای خطای ناشی از گسسته‌سازی است که بر مبنای مدل‌سازی خطا به صورت یک مدل آشفتگی در دینامیک‌های سیستم و تابع هزینه صورت می‌گیرد.

در مقاله پیش رو ضمن به دست آوردن کران پایین بهینه تابع هزینه، قوانین کنترل و سوئیچ طراحی شده و پایداری نمایی کل سیستم سوئیچ شونده خطی ناخودگردان اثبات می‌گردد. هم چنین مقاوم بودن طراحی در مواجهه با عدم قطعیت‌های وارده بر هر زیر سیستم نیز اثبات می‌گردد.

ساختار مقاله به این ترتیب سازماندهی شده است. در بخش دوم سیستم‌های سوئیچ شونده خطی مورد مطالعه معرفی می‌گردد. در بخش سوم ضمن بیان ارتباط بین کران پایین تابع هزینه و توابع لیاپانوف هر زیرسیستم، پایداری نمایی کل سیستم اثبات می‌گردد. در بخش چهارم رهیافت نامساوی خطی برای تعیین توابع لیاپانوف، کنترل و سوئیچ بهینه بیان می‌گردد. در بخش پنجم مقاوم بودن روش پیشنهادی در مواجهه با عدم قطعیت‌ها اثبات می‌گردد و در بخش ششم و هفتم شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری ارائه می‌گردد.

۲- سیستم‌های سوئیچ شونده خطی ناخودگردان

رابطه (۱) معادلات یک سیستم سوئیچ شونده خطی ناخودگردان را در فضای حالت بیان می‌نماید. این مدل از مدل‌های مهم سیستم‌های

۳- ارتباط بین کران پایین تابع هزینه، توابع لیاپانوف زیر سیستم‌ها

در این بخش ابتدا به بیان قضیه‌ای پرداخته می‌شود که ارتباط کران پایین تابع معیار (۲) را با توابع لیاپانوف اختصاص یافته هر یک از زیر سیستم‌های سیستم سوئیچ شونده بیان می‌نماید. این قضیه در [۱۶] برای سیستم‌های هایبرید اثبات شده است و در این جا برای سیستم‌های سوئیچ شونده خطی بیان می‌گردد. سپس در قضیه ۲ و با استفاده از مفهوم و تعریف پایداری نمایی در سیستم‌های غیرخطی اثبات می‌شود که در صورتی که توابع مثبت صادق در شرایط قضیه ۱ در شرایط این قضیه نیز صدق کنند آنگاه کل سیستم سوئیچ شونده دارای پایداری نمایی خواهد بود.

قضیه ۱: در صورتی که توابع مثبت $q(t) \in \tilde{Q}$, $V_q: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ (که V_q توابعی پیوسته و متعلق به C^1 باشند) وجود داشته باشند که در شرایط زیر صدق کنند

$$\frac{\partial V_q(x)}{\partial x} (A_q x + B_q u) + x^T Q_q x + u^T R_q u \geq 0, \quad (4)$$

$$\forall x(t) \in X, u(t) \in \Omega_u, q(t) \in \tilde{Q}.$$

$$V_r(x) - V_q(x) + S(x, q, r) \geq 0, \quad (5)$$

$$\forall x(t) \in S_{q,r}, q(t), r(t) \in \tilde{Q}, q \neq r$$

$$0 = V_{q(t_f)}(x_f). \quad (6)$$

آنگاه برای هر شرط اولیه‌ای مانند (x_0, q_0) ، تابع $V_{q(t_0)}(x_0)$ کران پایین تابع هزینه را برای آن که سیستم سوئیچ شونده از هر حالت اولیه (x_0, q_0) به حالت نهایی $(x_f, q(t_f))$ برای $\forall t \in [t_0, t_f]$ انتقال داده شود بیان می‌نماید. در روابط (۴) تا (۶)، $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترل پیوسته و بردار حالت سیستم $q(t) \in \tilde{Q}$ سیگنال سوئیچ است و $S_{q,r}$ ناحیه مجاز برای سوئیچ از زیرسیستم q به r را نشان می‌دهد.

اثبات: فرض نمایید $\hat{u}(\cdot)$ و $\hat{q}(\cdot)$ سیگنال‌های کنترل پیوسته و گسسته‌ای باشند که تحت آن‌ها سیستم سوئیچ شونده از حالت اولیه (x_0, q_0) در زمان $t_f = t_{M+1}$ به حالت نهایی (x_f, q_f) منتقل می‌شود. هم چنین فرض نمایید \hat{x}_k^- و \hat{x}_k^+ را $x_k = \hat{x}_k^-$ و $x_k = \hat{x}_k^+$ می‌شود. در صورتی که $\hat{q}_k = \hat{q}(t)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$ سیستم سوئیچ شونده از حالت اولیه (x_0, q_0) به حالت نهایی $(x_f, q(t_f))$ اتفاق بیفتد رابطه (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$J(x_0, \hat{q}_0) = \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} (x^T Q_q x + u^T R_q u) dt + \sum_{k=1}^M s(x_k^-, \hat{q}_{k-1}, \hat{q}_k) \quad (7)$$

از طرفی با توجه به خاصیت نامساوی در انتگرال‌ها و با استفاده از روابط (۴) و (۵)، با جایگذاری عبارت $(x^T Q_q x + u^T R_q u)$

سوئیچ شونده و هایبرید است که در مرجع [۲۰] بیان شده است و بسیاری از سیستم‌های پیچیده و غیرخطی را می‌توان به شکل آن‌ها مدل کرد.

$$\dot{x} = A_{q(t)}x(t) + B_{q(t)}u(t) \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

که $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترل پیوسته و $q(t) \in \tilde{Q} = \{1, 2, \dots, N\}$ متغیر گسسته‌ای است که اجازه انتخاب بین N زیرسیستم مختلف سیستم سوئیچ شونده را می‌دهد. $A_{q(t)}$ و $B_{q(t)}$ ماتریس‌های توصیف کننده هر یک از زیر سیستم‌های خطی سیستم سوئیچ شونده را بیان می‌نمایند که وابسته به $q(t)$ می‌باشند و زوج $(A_{q(t)}, B_{q(t)})$ برای هر زیرسیستم کنترل پذیر هستند. در این مقاله کنترل بهینه کلاس سیستم‌های سوئیچ شونده خطی (۱) مورد بحث قرار می‌گیرد که هدف، کمینه کردن تابع هزینه (۲) است.

$$J(x, q) = \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q_q x + u^T R_q u) dt + \sum_{k=1}^M s(x(t_k), q(t_k^-), q(t_k^+)) \quad (2)$$

هدف از مسئله کنترل بهینه تعیین ورودی کنترل پیوسته $u(t)$ و سیگنال گسسته $q(t)$ در معادلات دینامیکی سیستم سوئیچ شونده (۱) است به طوری که سیستم را از شرایط اولیه (x_0, q_0) در لحظه t_0 به حالت نهایی x_f در لحظه t_f ببرد به گونه‌ای که t_f آزاد باشد. در صورتی که زمان t_f بینهایت در نظر گرفته شود مسئله کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده با افق بینهایت^۵ را خواهیم داشت. در تابع هزینه (۲) ماتریس‌های Q_q و R_q مثبت معین بوده و M تعداد سوئیچ بین زیر سیستم‌ها را نشان می‌دهد که نامعین است و $s(x, q, r) > 0$ بیانگر هزینه سوئیچ از زیر سیستم q به زیر سیستم r می‌باشد. به این ترتیب مسئله کنترل بهینه مورد نظر را با استفاده از روابط (۱) و (۲) به صورت زیر می‌توان بیان نمود.

$$\text{Min}_{u, q} J(x, q)$$

$$s.t$$

$$\dot{x} = A_{q(t)}x(t) + B_{q(t)}u(t) \quad (3)$$

$$J(x, q) = \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q_q x + u^T R_q u) dt + \sum_{k=1}^M s(x(t_k), q(t_k^-), q(t_k^+))$$

در بخش بعد ارتباط بین کران پایین تابع هزینه با توابع لیاپانوفی که به هر زیر سیستم اختصاص می‌یابد بیان شده و قضایای مربوط ارائه و اثبات می‌گردند.

پایین تابع هزینه در مسئله کنترل بهینه سیستم‌های هایبرید و سوئیچ شونده استفاده شده است. بر اساس این روش سیگنال ورودی کنترل پیوسته و سوئیچ گسسته برای به دست آوردن کران پایین تابع هزینه تقریب زده می‌شد.

از مزایای این روش قابل اعمال بودن به سیستم‌های سوئیچ شونده غیرخطی است. ولی از اشکالات بزرگ آن این است که اولاً با افزایش متغیرهای حالت سیستم، پیچیدگی حل به طور نمایی افزایش می‌یابد. ثانیاً هیچ گونه تحلیل پایداری برای کل سیستم سوئیچ شونده انجام نشده است و ثالثاً آن که قانون کنترل و سوئیچ به صورت تقریبی به دست می‌آیند. هم چنین قانون کنترل پیوسته فیدبکی نیست.

قبل از بیان نتایج اصلی مقاله، لم‌های زیر که در اثبات قضایا استفاده می‌شود بیان می‌شود.

لم ۱ ([۲۱])

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن مثبت معین باشد. آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\lambda_{\min} \|x(t)\|^2 \leq x^T(t)Ax(t) \leq \lambda_{\max} \|x(t)\|^2, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

که λ_{\min} و λ_{\max} به ترتیب مقادیر ویژه حداقل و حداکثر ماتریس A هستند.

لم ۲ ([۲۲])

ماتریس‌های حقیقی D ، E و F را با ابعاد مناسب در نظر بگیرید. اگر رابطه $F^T F \leq I$ برقرار باشد آن گاه برای هر اسکالر مثبت $\varepsilon > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon^{-1} DD^T + \varepsilon E^T E. \quad (11)$$

۳-۱- پایداری نمایی سیستم سوئیچ شونده

سیستم (۱) را به طور نمایی پایدار گوئیم اگر بردار حالت‌های سیستم در رابطه زیر صدق کند.

$$\|x(t)\| \leq k_1 e^{-k_2 t} \|x(0)\|, \quad (12)$$

که در این رابطه، $k_1 > 0$ ، $k_2 > 0$ و $x(0)$ بردار شرایط اولیه سیستم هستند. در قضیه زیر پایداری نمایی سیستم‌های غیرخطی ([۲۳]) را برای سیستم‌های سوئیچ شونده مورد بحث در این مقاله تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۲: در صورتی که توابع مذکور $V_q : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ صادق در قضیه ۱ در شرایط زیر نیز صدق کنند آنگاه سیستم سوئیچ شونده (۱) دارای پایداری نمایی خواهد بود (α ، β و γ اسکالرهایی مثبت هستند):

$$\begin{aligned} \alpha \|x(t)\|^2 &\leq V_q(x) \leq \beta \|x(t)\|^2, \\ \dot{V}_q(x) &\leq -\gamma \|x(t)\|^2, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, q(t) \in \tilde{Q} \\ V_r(x) &\leq V_q(x), \quad \forall x(t) \in S_{q,r}, q(t), r(t) \in \tilde{Q} \end{aligned} \quad (13)$$

و نیز عبارت $(s(x_k^-, \hat{q}_{k-1}, \hat{q}_k))$ با $-\frac{\partial V_{\hat{q}_k}(x)}{\partial x}(A_{\hat{q}}x + B_{\hat{q}}u)$ و نیز اعمال شرط نهایی (۶) و اینکه $V_{\hat{q}_{k-1}}(x_k^-) - V_{\hat{q}_k}(x_k^-)$ رابطه (۷) را می‌توان به صورت زیر در آورد:

$$\begin{aligned} J(x_0, \hat{q}_0) &= \sum_{k=1}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} (x^T Q_{\hat{q}} x + u^T R_{\hat{q}} u) dt + \\ &\sum_{k=1}^M s(x_k^-, \hat{q}_{k-1}, \hat{q}_k) \geq \\ &\sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[-\frac{\partial V_{\hat{q}_k}(x)}{\partial x}(A_{\hat{q}}x + B_{\hat{q}}u) \right] dt + \\ &\sum_{k=1}^M \{V_{\hat{q}_{k-1}}(x_k^-) - V_{\hat{q}_k}(x_k^-)\} = \\ &\sum_{k=0}^M \{V_{\hat{q}_k}(x_k) - V_{\hat{q}_k}(x_{k+1})\} + \\ &\sum_{k=1}^M \{V_{\hat{q}_{k-1}}(x_{k-1}) - V_{\hat{q}_k}(x_k)\} = \\ &V_{\hat{q}_0}(x_0) - V_{\hat{q}_M}(x_{M+1}) = V_{\hat{q}_0}(x_0) \end{aligned} \quad (8)$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

نکته ۱: در اینجا نماد q در $V_q(x)$ بیانگر شماره زیر سیستم است و به معنی آن است که سوئیچ از زیر سیستم q ممکن است به بقیه زیر سیستم‌ها اتفاق بیافتد.

نکته ۲: توابع $V_q(x)$ ای که در قضیه ۱ صدق می‌کنند را توابع لیاپانوف چندگانه سیستم (۱) می‌نامند.

از آن جایی که توابع به دست آمده $V_q(x)$ در بخش قبل کران پایین تابع هزینه را در اختیار قرار می‌دهند قانون کنترل پیوسته و قانون سوئیچ گسسته را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_{u \in \Omega_u} \left\{ \frac{\partial V_q(x)}{\partial x}(A_q x + B_q u) + x^T Q x + u^T R u \right\} \\ q^* &= \arg \min_{x \in S_{q,v}} \{V_v(x) + s(x, v, q)\} \end{aligned} \quad (9)$$

همان‌گونه که در روابط بالا مشاهده می‌شود سیگنال کنترل پیوسته $u^*(\cdot)$ بر اساس حداقل کردن تابع هزینه به دست می‌آید و سیگنال سوئیچ $q^*(\cdot)$ نیز به این ترتیب تعیین می‌گردد که سوئیچ زمانی اتفاق می‌افتد که یک حالت گسسته برای تابع لیاپانوفی که دارای کران پایین‌تری از تابع لیاپانوف حالت گسسته جاری منهای هزینه سوئیچ می‌باشد وجود داشته باشد.

نکته ۳: بدون از دست دادن عمومیت و در ادامه مقاله، هزینه سوئیچ از زیر سیستم‌ها به یکدیگر $s(x, q, r) = 0$ در نظر گرفته می‌شود.

مشکل اساسی در محاسبه قانون کنترل و سیگنال سوئیچ رابطه (۹)، تعیین توابع لیاپانوف $V_q(x)$ صادق در روابط (۴) تا (۶) در قضیه ۱ است. در [۱۵] و [۱۶] از رهیافت برنامه‌ریزی پویا و از طریق گسسته‌سازی فضای حالت برای به دست آوردن توابع لیاپانوف و کران

از آن جا که $V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-2k_2t}$ برای $t \in (0, t_1)$ برقرار است و $V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-2k_2t}$ نیز برای $t \in (t_k, t_{k+1})$ برقرار است بنابراین $V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-2k_2t}$ برای $t \in (t_k, t_{k+2})$ برقرار بوده و بنا بر اصل استقرا رابطه (۱۵) برقرار و درست خواهد بود.

نکته ۴: ضرایب α و β در رابطه (۱۳) ارتباط نزدیکی با مقادیر ویژه ماتریس‌های P_q دارند. برای نشان دادن این موضوع، از آن جایی که توابع لیاپانوف پیشنهادی $V_q(x)$ مربعی هستند با استفاده از لم ۲ می‌توان نوشت:

$$\lambda_{\min} \|x(t)\|^2 \leq V_q(x) = x^T P_q x \leq \lambda_{\max} \|x(t)\|^2 \quad (21)$$

بنابراین با انتخاب $\alpha = \lambda_{\min}(P_q)$ و $\beta = \lambda_{\max}(P_q)$ ارتباط این ضرایب مثبت با مقادیر ویژه حداقل و حداکثر ماتریس‌های مثبت معین مربوط به هر یک از زیرسیستم‌ها به دست می‌آید. قضیه ۳ نحوه به دست آوردن این ماتریس‌های مثبت معین را بیان می‌نماید. به این ترتیب دو عدد مثبت $k_1 > 0$ ، $k_2 > 0$ طبق رابطه (۱۴) قابل محاسبه هستند.

۴- رهیافت نامساوی خطی برای به دست آوردن توابع لیاپانوف، کنترل بهینه و قانون سوئیچ

در این بخش، توابع لیاپانوف هر زیرسیستم، سیگنال کنترل فیدبک و سوئیچ بهینه با استفاده از تشکیل و حل یک دسته نامساوی‌های ماتریسی خطی به دست آمده و پایداری نمایی کل سیستم اثبات می‌گردد. در رهیافت ارائه شده، ابتدا به هر یک از زیرسیستم‌ها یک تابع لیاپانوف مربعی به شکل $V_q(x, q) = V_q(x) = x^T P_q x$ اختصاص می‌یابد. در صورتی که ماتریس‌های $q(t) \in \tilde{Q}$ ، $P_q = P_q^T$ مثبت معین باشند $V_q(x)$ ها توابعی نامنفی بوده و با توابع لیاپانوف بیان شده در قضیه ۱ مطابقت کامل دارند ($V_q : X \rightarrow R^+$). سپس قضیه ۳ نحوه به دست آوردن بهره کنترل و ماتریس‌های مثبت معین را در توابع لیاپانوف پیشنهادی بیان می‌نماید. قضیه ۴ نیز حل بهینه را تضمین می‌نماید.

قضیه ۳: در صورتی که ماتریس‌های $M_q = M_q^T$ و N_q برای تمام $q(t) \in \tilde{Q}$ و اسکالر مثبت λ وجود داشته باشند که در نامساوی‌های ماتریسی (۲۲) صدق کنند آنگاه سیستم (۱) با قانون سوئیچ $q^* = \arg \min_{x \in S_{q,v}} \{V_q(x)\}$ و قانون کنترل فیدبک حالت $u(x) = N_q M_q^{-1} x$ پایدار نمایی خواهد بود و ماتریس‌های مجهول مثبت معین هر زیر سیستم $P_q = P_q^T$ و بهره فیدبک حالت K_q به ترتیب از روابط $P_q = M_q^{-1}$ ، $P_q = M_q^{-1}$ و $K_q = N_q M_q^{-1}$ و $\gamma = \lambda^{-1}$ به دست می‌آیند.

اثبات: برای اثبات پایداری باید نشان دهیم که دو عدد مثبت $k_1 > 0$ ، $k_2 > 0$ وجود دارند به طوری که رابطه (۱۲) برقرار بوده به طوری که:

$$k_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, k_2 = \left(\frac{\gamma}{2\beta}\right) \quad (14)$$

برای اثبات اگر بتوانیم نشان دهیم که تابع لیاپانوف سیستم $V(x(t))$ در رابطه (۱۵) صدق کند (دقت نمایید که این تابع در لحظاتی که سیستم سوئیچ شونده بر روی یکی از زیر سیستم‌ها قرار می‌گیرد می‌تواند بیانگر تابع لیاپانوف مربوط به آن زیر سیستم باشد):

$$V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-2k_2t}, t \geq 0 \quad (15)$$

آنگاه رابطه (۱۲) را می‌توان به کمک شرط اول قضیه ۲ به دست آورد. بنابراین کافی است که رابطه (۱۵) اثبات گردد. برای اثبات از استقرا استفاده می‌گردد. فرض نمایید که در لحظات $t \in [0, t_1)$ سیستم سوئیچ شونده در زیرسیستم P ام قرار بگیرد. بنابراین تابع لیاپانوف سیستم را می‌توان به صورت $V(x(t)) = V_p(x(t))$ ، $t \in [0, t_1)$ در نظر گرفت. با استفاده از شرط اول و دوم قضیه ۲ داریم:

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma \|x(t)\|^2 \leq -\frac{\gamma}{\beta} V(x) \quad (16)$$

بنابراین

$$V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-\frac{\gamma}{\beta}t} = V(x_0)e^{-2k_2t}, t \in [0, t_1) \quad (17)$$

اگر t_1 نامحدود باشد به این معنی است که مسیرهای حالت هرگز ناحیه مربوط به زیر سیستم P یعنی S_p را ترک نمی‌کنند و این به معنی آن است که رابطه (۱۷) برقرار شده است. در غیر این صورت فرض کنید که مسیرهای حالت از نواحی مختلف عبور کنند و در ناحیه مربوط به زیرسیستمی مانند S_q برای $t \in (t_k, t_{k+1})$ قرار بگیرد. حال فرض کنید که داشته باشیم:

$$V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-\frac{\gamma}{\beta}t} = V(x_0)e^{-2k_2t}, t \in (t_k, t_{k+1}) \quad (18)$$

فرض نمایید که مسیرهای حالت در زمان $t > t_{k+1}$ و در ناحیه S_r برای زمان‌های $t \in (t_{k+1}, t_{k+2})$ قرار بگیرد به گونه ای t_{k+2} ممکن است بینهایت باشد. به طور مشابه می‌توان نشان داد که:

$$V(x(t)) \leq V(x(t_{k+1}))e^{-2k_2(t-t_{k+1})}, t \in (t_{k+1}, t_{k+2}) \quad (19)$$

از سویی دیگر شرط سوم رابطه (۱۳) نشان می‌دهد که $V_r(x(t_{k+1} + \epsilon)) \leq V_q(x(t_{k+1} - \epsilon))$ که $\epsilon > 0$ ، $\epsilon \rightarrow 0$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(t_{k+1}))e^{-2k_2(t-t_{k+1})} \\ &\leq V(x_0)e^{-2k_2t_{k+1}}e^{-2k_2(t-t_{k+1})} = \\ &V(x_0)e^{-2k_2t}, t \in (t_{k+1}, t_{k+2}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{cases} M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q \geq \\ -M_q Q_q M_q - N_q^T R_q K_q N_q, \\ M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q \leq \\ -M_q \lambda^{-1} M_q \end{cases} \quad (27)$$

نامساوی بالا را می‌توان به صورت مربعی زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} M_q A_q^T + A_q M_q + N_q^T B_q^T + B_q N_q + \\ \begin{bmatrix} M_q^T & 0 \\ N_q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_q & 0 \\ 0 & R_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_q \\ N_q \end{bmatrix} \geq 0, \\ M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q \leq \\ -M_q \lambda^{-1} M_q \end{cases} \quad (28)$$

با دانستن این که $\begin{bmatrix} Q_q & 0 \\ 0 & R_q \end{bmatrix} > 0$ و با استفاده از لم شور (۲۴)، رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q & M_q^T & N_q^T \\ M_q & -Q_q^{-1} & 0 \\ N_q & 0 & -R_q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (29)$$

$$\begin{cases} M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q & M_q^T \\ M_q & -\lambda \end{cases} \leq 0, \\ M_q > 0,$$

که دو دسته نامساوی خطی ماتریسی با متغیرهای مجهول $M_q = M_q^T$ و N_q و اسکالر $\lambda > 0$ برای تمام $q(t) \in \tilde{Q}$ است. با حل نامساوی‌های ماتریسی (۲۹)، $P_q = M_q^{-1}$ ، توابع لیاپانوف و $K_q = N_q M_q^{-1}$ بهره فیدبک حالت $V_q(x) = x^T P_q x$ متعاقباً قانون کنترل پیوسته $u^*(x) = K_q x$ به دست می‌آید.

نکته ۵: قضیه ۳ شرط کافی برای به دست آوردن قانون کنترل و حداقل تابع هزینه را فراهم می‌نماید. اما این که چگونه ماتریس‌های P_q را بهینه کنیم تا به حداقل تابع هزینه مسئله برسیم قابل بحث است. در قضیه ۴ و با استفاده از لم شور (۲۴)، شرایط رسیدن به پاسخ بهینه نشان داده خواهد شد.
قضیه ۴: برای سیستم سوئیچ شونده (۱) و تابع هزینه (۲) در صورتی که مسئله بهینه‌سازی (۳۰)

$$\begin{bmatrix} M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q & M_q^T & N_q^T \\ M_q & -Q_q^{-1} & 0 \\ N_q & 0 & -R_q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q & M_q^T \\ M_q & -\lambda \end{bmatrix} \leq 0, \\ M_q > 0, \quad (22)$$

اثبات: برای اثبات، قانون کنترل به صورت فیدبک حالت $u = K_q x$ انتخاب می‌شود. با توجه به قضیه ۱، کنترل بهینه و توابع لیاپانوف $V_q(x)$ باید در شرایط (۴) تا (۶) صدق کنند. به این ترتیب با جایگذاری کنترل فیدبک حالت در رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned} x^T (A_q + B_q K_q)^T P_q x + x^T P_q (A_q + B_q K_q) x + \\ x^T Q_q x + x^T K_q^T R_q K_q x \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

هم چنین با توجه به قضیه ۲ این توابع بایستی در رابطه دوم (۱۳) صدق کنند.

$$\begin{aligned} x^T (A_q + B_q K_q)^T P_q x + x^T P_q (A_q + B_q K_q) x \\ \leq -\gamma \|x\|^2 = -x^T \gamma x \end{aligned} \quad (24)$$

با توجه به مربعی بودن توابع لیاپانوف هر یک از زیرسیستم‌ها، سمت چپ رابطه (۲۴) برابر با $\dot{V}_q(x)$ است. روابط (۲۳) و (۲۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} (A_q + B_q K_q)^T P_q + P_q (A_q + B_q K_q) \geq \\ -Q_q - K_q^T R_q K_q, \\ (A_q + B_q K_q)^T P_q + P_q (A_q + B_q K_q) \leq \\ -\gamma \end{cases} \quad (25)$$

طرفین رابطه بالا را از چپ و راست در ماتریس مثبت معین P_q^{-1} ضرب می‌نماییم:

$$\begin{cases} P_q^{-1} (A_q + B_q K_q)^T + (A_q + B_q K_q) P_q^{-1} \geq \\ -P_q^{-1} Q_q P_q^{-1} - P_q^{-1} K_q^T R_q K_q P_q^{-1}, \\ P_q^{-1} (A_q + B_q K_q)^T + (A_q + B_q K_q) P_q^{-1} \leq \\ -P_q^{-1} \gamma P_q^{-1} \end{cases} \quad (26)$$

با انتخاب $M_q = P_q^{-1}$ ، $N_q = K_q P_q^{-1}$ و $\lambda = \gamma^{-1}$ داریم:

که در این رابطه ماتریس‌های N_q و C_q ماتریس‌های ثابت معلوم با بعد مناسب و ماتریس F_q متغیر با زمان نامعلومی است که محدود بوده و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$F_q^T F_q \leq I \quad (33)$$

قضیه ۵: در صورتی که ماتریس‌های $M_q = M_q^T$ و N_q برای تمام $q(t) \in \tilde{Q}$ و اسکالر مثبت λ وجود داشته باشند که در نامساوی‌های ماتریسی (۳۴) زیر صدق کنند آنگاه سیستم دارای عدم قطعیت (۳۱) با قانون سوئیچ $q^* = \arg \min_{x \in S_{q,v}} \{V_v(x)\}$ و قانون کنترل فیدبک حالت

$u(x) = N_q M_q^{-1} x$ پایدار نمایی خواهد بود و ماتریس‌های مجهول مثبت معین هر زیرسیستم $P_q = P_q^T$ ، بهره فیدبک حالت K_q و γ به ترتیب از روابط $P_q = M_q^{-1}$ ، $K_q = N_q M_q^{-1}$ و $\gamma = \lambda^{-1}$ به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} G_q & M_q^T & N_q^T & C_q^T \\ M_q & -\lambda & 0 & 0 \\ N_q & 0 & -\varepsilon & 0 \\ C_q & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (34)$$

که در رابطه بالا $G_q = M_q A_q^T + N_q^T B_q^T + A_q M_q + B_q N_q$ و ε یک مثبت دلخواه است.

اثبات: مشابه با اثبات قضیه ۳ که سیستم فاقد عدم قطعیت بود و با توجه به روابط (۳۱) و (۳۲)، رابطه (۲۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q)^T P_q + P_q (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q) \geq -Q_q - K_q^T R_q K_q, \\ (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q)^T P_q + P_q (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q) \leq -\gamma \end{cases} \quad (35)$$

طرفین رابطه بالا را از چپ و راست در ماتریس مثبت معین P_q^{-1} ضرب می‌نماییم:

$$\begin{cases} P_q^{-1} (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q)^T + (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q) P_q^{-1} \geq -P_q^{-1} Q_q P_q^{-1} - P_q^{-1} K_q^T R_q K_q P_q^{-1}, \\ P_q^{-1} (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q)^T + (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q) P_q^{-1} \leq -P_q^{-1} \gamma P_q^{-1} \end{cases} \quad (36)$$

به طور مشابه با انتخاب $M_q = P_q^{-1}$ و $N_q = K_q P_q^{-1}$ و $\gamma = \lambda^{-1}$ داریم:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{M_1, M_2, \dots, M_N, W_q} \text{Tr}(W_q) \\ & \text{s.t} \\ & i) \quad (29) \end{aligned} \quad (30)$$

$$ii) \quad \begin{bmatrix} W_q & x_0^T \\ x_0 & M_q \end{bmatrix} > 0, \quad q(t) \in \tilde{Q}$$

دارای حل $(\tilde{M}_1, \tilde{W}_1), (\tilde{M}_2, \tilde{W}_2), \dots, (\tilde{M}_N, \tilde{W}_N)$ باشد آنگاه یک قانون کنترل بهینه $u^*(t) = \tilde{K}_q x(t)$ وجود خواهد داشت و حداقل تابع هزینه به صورت $J^* = \text{Min}_{q \in \tilde{Q}} x_0^T \tilde{M}_q^{-1} x_0$ به دست می‌آید.

اثبات: در صورتی که $(\tilde{M}_1, \tilde{W}_1), (\tilde{M}_2, \tilde{W}_2), \dots, (\tilde{M}_N, \tilde{W}_N)$ حل‌های مسئله بهینه‌سازی (۳۰) باشند بنابراین جواب‌های شدنی شرط اول قضیه می‌باشند و بر طبق قضیه ۳ $u^*(t) = \tilde{K}_q x(t)$ یک قانون کنترل بهینه برای سیستم سوئیچ شونده (۱) است. به علاوه آن که به کمک لم شور ([۲۴]) می‌توان شرط دوم قضیه را با $W_q > x_0^T M_q^{-1} x_0$ معادل دانست. بنابراین کمینه‌سازی $\text{Tr}(W_q)$ کمینه‌سازی $\text{Tr}(x_0^T M_q^{-1} x_0)$ را نیز به دنبال خواهد داشت. بنابراین حداقل تابع هزینه عبارت است از $J^* = \text{Min}_{q \in \tilde{Q}} x_0^T \tilde{M}_q^{-1} x_0$. بهینه بودن حل مسئله بهینه سازی (۳۰) از محذب بودن تابع هدف آن و شرایط قضیه نتیجه می‌گردد.

۵- کنترل بهینه سیستم‌های خطی سوئیچ شونده دارای عدم قطعیت

در این بخش مقاوم بودن روش کنترلی پیشنهادی هنگامی که سیستم (۱) دارای عدم قطعیت باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات سیستم سوئیچ شونده دارای عدم قطعیت را در این بخش به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = (A_{q(t)} + \Delta A_{q(t)})x(t) + B_{q(t)}u \quad (31)$$

$$x(t_0) = x_0 \in R^n$$

که ΔA_q ماتریسی است که عدم قطعیت متغیر با زمان سیستم را در ماتریس توصیف کننده سیستم نشان می‌دهد و در فرض ۱ صدق می‌کند. نکته قابل ذکر آن است که این ساختار عدم قطعیت در مراجع مهمی مورد استفاده قرار گرفته است. هم چنین تابع هدف را نیز تابع هدف (۲) در نظر بگیرید.

فرض ۱ ([۲۵])

عدم قطعیت‌های پارامتری متغیر با زمان با نرم محدود ΔA_q در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\Delta A_q = N_q F_q C_q \quad (32)$$

۶- شبیه‌سازی

در این بخش چندین مثال در کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده خطی ناخودگردان ارائه خواهد شد. در شبیه‌سازی‌ها از جعبه ابزار YALMIP در نرم افزار MATLAB 7.10 به منظور حل نامساوی‌های ماتریسی استفاده شده است. برای راحتی و بدون از دست دادن عمومیت رهیافت ارائه شده در این مقاله و بر طبق نکته ۳، هزینه سوئیچ بین زیرسیستم‌ها به یک دیگر صفر در نظر گرفته شده است. **مثال ۱:** در این مثال تمام زیرسیستم‌ها پایدار بوده و معادلات حالت آن‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{subsystem 1: } \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ \text{subsystem 2: } \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ \text{subsystem 3: } \dot{x} &= \begin{bmatrix} -3.5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ \text{subsystem 4: } \dot{x} &= \begin{bmatrix} -3.5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (41)$$

تابع هزینه، تابع هزینه (۲) با $Q_q = R_q = 2I$, $q \in \bar{Q} = \{1, 2, 3, 4\}$ است. شرایط اولیه را $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -6$ فرض می‌کنیم. با استفاده از حل نامعادلات ماتریسی قضایای ۳ و ۴، بهره‌های بهینه کنترل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K_1 = [1.4408 \quad 3.6088], K_2 = [1.4534 \quad -1.7894], \\ K_3 = [-0.2509 \quad -1.4032], K_4 = [-0.2509 \quad 1.4032]$$

در شبیه‌سازی فرض بر این است که ابتدا زیرسیستم دو فعال است. شکل (۱) متغیرهای حالت، کنترل بهینه $u^*(t)$ و سیگنال سوئیچ $q^*(t)$ را نشان می‌دهد و شکل (۲) مربع نرم بردار حالت سیستم سوئیچ شونده $\|x(t)\|^2$ و توابع لیاپانوف هر زیر سیستم را بر حسب زمان نمایش می‌دهد. با توجه به استراتژی سوئیچ (رابطه دوم معادله (۹) و یا رابطه سوم معادله (۱۳)) سیستم سوئیچ شونده از زیر سیستم اولیه دو به زیر سیستم یک که مقدار تابع لیاپانوف آن کم‌تر از تابع لیاپانوف زیرسیستم دو است سوئیچ می‌شود و از این به بعد با توجه به نزدیک بودن و کم‌تر بودن توابع لیاپانوف زیر سیستم‌های یک و چهار سوئیچ بین این دو زیرسیستم اتفاق می‌افتد. شکل (۲) نیز $\|x(t)\|^2$ را نشان می‌دهد که با گذشت زمان و به صورت نمایی به سمت صفر میل می‌کند و رابطه (۱۲) را تایید می‌نماید.

مثال ۲: در این مثال یکی از زیرسیستم‌ها ناپایدار بوده و معادلات حالت زیرسیستم‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} M_q (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q)^T + \\ (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q) M_q \geq \\ -M_q Q_q M_q - M_q K_q^T R K_q M_q, \\ \\ M_q (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q)^T + \\ (A_q + N_q F_q C_q + B_q K_q) M_q \leq -M_q \lambda^{-1} M_q \end{cases} \quad (37)$$

با استفاده از لم ۳ رابطه زیر را می‌توان نوشت:

$$N_q F_q C_q M_q + M_q C_q^T F_q^T N_q^T \leq \\ \varepsilon^{-1} N_q N_q^T + \varepsilon M_q^T C_q^T C_q M_q \quad (38)$$

بنابراین با استفاده از (۳۷) و (۳۸) نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} M_q A_q + M_q A_q^T + B_q K_q M_q + M_q K_q^T B_q^T + \\ \varepsilon^{-1} N_q N_q^T + \varepsilon M_q^T C_q^T C_q M_q - M_q Q_q M_q \\ -M_q K_q^T R K_q M_q \geq 0 \\ \\ M_q A_q^T + M_q A_q + B_q K_q M_q + M_q K_q^T B_q^T + \\ \varepsilon^{-1} N_q N_q^T + \varepsilon M_q^T C_q^T C_q M_q + M_q \lambda^{-1} M_q \leq 0 \end{cases} \quad (39)$$

نکته ۶: نامساوی اول رابطه (۳۹) از نامساوی اول (۳۷) و نامساوی (۳۸) نتیجه می‌گردد. در خصوص نامساوی دوم رابطه (۳۹) نیز می‌توان چنین استدلال نمود که اگر متغیرهای طراحی M_q و K_q در این نامساوی صدق کنند مطمئناً با توجه به نامساوی رابطه (۳۸) نامساوی دوم رابطه (۳۷) نیز صدق خواهند کرد. بنابراین با حل نامساوی‌های (۳۹) و به دست آوردن ماتریس‌های M_q و K_q ، مسئله کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده دارای عدم قطعیت حل می‌گردد. دو دسته نامساوی رابطه (۳۹) را به کمک روند شور می‌توان به صورت رابطه (۳۴) نوشت.

قضیه ۶: برای سیستم سوئیچ شونده دارای عدم قطعیت (۳۱) با عدم قطعیت‌های صادق در (۳۲) و تابع هزینه (۲) در صورتی که مسئله بهینه‌سازی:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{M_1, M_2, \dots, M_N, W_q} \text{Tr}(W_q) \\ & s.t \\ & i) \quad (39) \end{aligned} \quad (40)$$

ii) $\begin{bmatrix} W_q & x_0^T \\ x_0 & M_q \end{bmatrix} > 0, q(t) \in \bar{Q}$

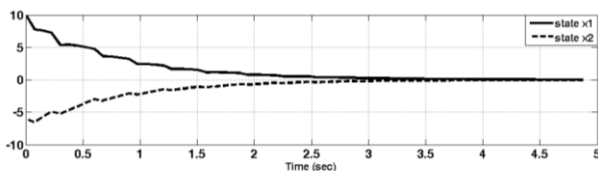
دارای حل $(\tilde{M}_1, \tilde{W}_1), (\tilde{M}_2, \tilde{W}_2), \dots, (\tilde{M}_N, \tilde{W}_N)$ باشد آنگاه یک قانون کنترل بهینه $u^*(t) = \tilde{K}_q x(t)$ وجود خواهد داشت و حداقل تابع هزینه به صورت $J^* = \text{Min}_{q \in \bar{Q}} x_0^T \tilde{M}_q^{-1} x_0$ به دست می‌آید.

اثبات: مشابه اثبات قضیه ۴ است.

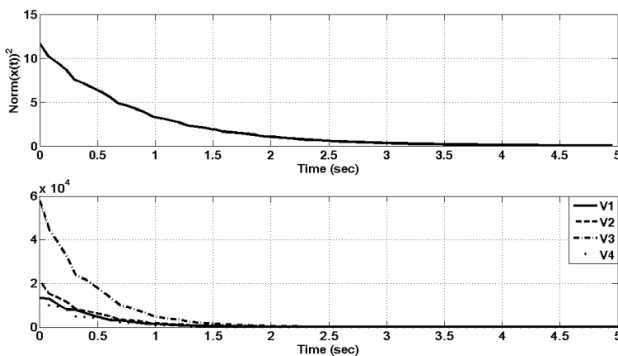
$$K_1 = [0.0537 \quad -1.0849], K_2 = [4.3693 \quad 2.4256],$$

$$K_3 = [-3.2634 \quad 2.0447], K_4 = [1.8135 \quad -0.0072]$$

در شبیه‌سازی فرض بر این است که ابتدا سیستم یک فعال است. شکل (۵) متغیرهای حالت، کنترل بهینه $u^*(t)$ و سیگنال سوئیچ $q^*(t)$ را نشان می‌دهد و شکل (۶) مربع نرم بردار حالت سیستم سوئیچ شونده $\|x(t)\|^2$ و توابع لیاپانوف هر زیر سیستم را بر حسب زمان نمایش می‌دهد. با توجه به رابطه استراتژی سوئیچ، سیستم سوئیچ شونده از زیرسیستم اولیه یک به زیرسیستم دو و سپس به زیرسیستم چهارم منتقل می‌گردد و از این پس بین دو زیرسیستم دو و چهار سوئیچ می‌نماید. استراتژی سوئیچ بر حسب مقادیر توابع لیاپانوف هر زیرسیستم بوده و بر این اساس سوئیچ انتخاب می‌گردد. شکل (۶) نیز $\|x(t)\|^2$ را نشان می‌دهد که با گذشت زمان و به صورت نمایی به سمت صفر میل می‌کند و رابطه (۱۲) را تایید می‌نماید.



شکل (۱): حالت‌های x_1, x_2 و سیگنال سوئیچ $q(t)$ مثال ۱



شکل (۲): مربع نرم حالات و توابع لیاپانوف هر زیر سیستم مثال ۱

$$\text{subsystem 1 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$\text{subsystem 2 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u,$$

$$\text{subsystem 3 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -3.5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad (42)$$

$$\text{subsystem 4 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} 3.5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

تابع هزینه را همان تابع هزینه مثال ۲ در نظر می‌گیریم. شرایط اولیه نیز $x_1(0) = 6, x_2(0) = -6$ است. در این مثال نیز با استفاده از حل نامعادلات ماتریسی قضایای ۳ و ۴، بهره‌های بهینه کنترل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K_1 = [1.4408 \quad 3.6088], K_2 = [1.4534 \quad -1.7894],$$

$$K_3 = [-0.2509 \quad -1.4032], K_4 = [1.7430 \quad -0.3530]$$

در شبیه‌سازی فرض بر این است که ابتدا زیرسیستم دو که زیر سیستمی پایدار است فعال باشد. شکل (۳) متغیرهای حالت، کنترل بهینه $u^*(t)$ و سیگنال سوئیچ $q^*(t)$ را نشان می‌دهد و شکل (۴) مربع نرم بردار حالت سیستم سوئیچ شونده $\|x(t)\|^2$ و توابع لیاپانوف هر زیر سیستم را بر حسب زمان نمایش می‌دهد. با توجه به استراتژی سوئیچ، سیستم سوئیچ شونده از زیرسیستم اولیه دو به زیر سیستم یک و سپس دوباره به زیرسیستم دو منتقل می‌گردد و با توجه به شکل (۴) تغییر می‌نماید. نکته قابل توجه آن است که در این سیگنال سوئیچ زیرسیستم چهار نیز که زیر سیستمی ناپایدار است انتخاب می‌گردد و با توجه به آن که استراتژی سوئیچ بر حسب مقادیر توابع لیاپانوف هر زیر سیستم می‌باشد انتخاب می‌گردد. شکل اول (۴) نیز $\|x(t)\|^2$ را نشان می‌دهد که با گذشت زمان و به صورت نمایی به سمت صفر میل می‌کند و رابطه (۱۲) را تایید می‌نماید.

مثال ۳: در این مثال تمام زیرسیستم‌ها ناپایدار بوده و معادلات حالت زیرسیستم‌ها به صورت زیر است :

$$\text{subsystem 1 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -2.5 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$\text{subsystem 2 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad (43)$$

$$\text{subsystem 3 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -3.5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u,$$

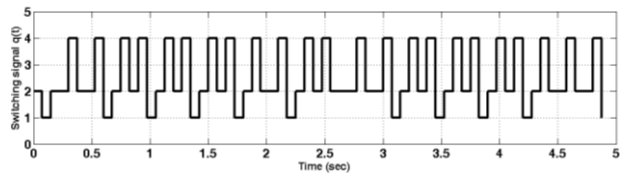
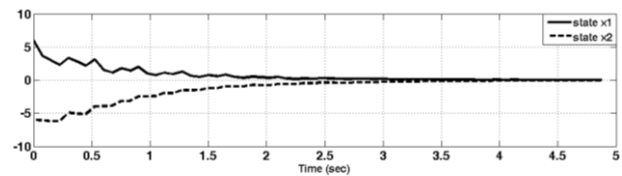
$$\text{subsystem 4 : } \dot{x} = \begin{bmatrix} -3.5 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix} u.$$

در این مثال نیز همان تابع هزینه مثال قبل در نظر گرفته می‌شود. شرایط اولیه را نیز $x_1(0) = 6, x_2(0) = -10$ فرض می‌نماییم. در این مثال نیز با استفاده از حل نامعادلات ماتریسی قضایای ۳ و ۴، بهره‌های کنترل به صورت زیر به دست می‌آید.

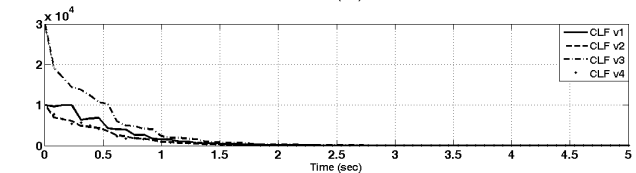
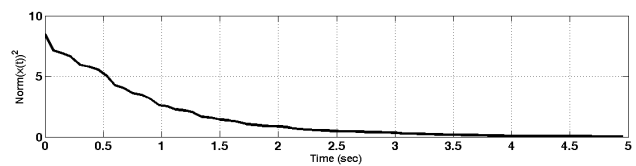
گسسته ارائه گردید. در این روش ضمن بیان ارتباط بین کران پایین تابع هزینه و توابع لیپانوف اختصاص داده شده به هر یک از زیر-سیستم‌ها، سیگنال کنترل و سوئیچ به گونه ای طراحی می‌گردد که تضمین کننده پایداری نمایی سیستم سوئیچ شونده باشد. بهینه بودن طراحی و مقاوم بودن آن نسبت به عدم قطعیت‌های وارده به هر زیر-سیستم نیز بیان و اثبات می‌گردد. روش فوق قابل تعمیم به سیستم‌های سوئیچ شونده خطی است که در آن‌ها زیرسیستم‌ها دارای عدم قطعیت پارامتری بوده و دارای قید بر روی حالات و ورودی‌ها باشند.

مراجع

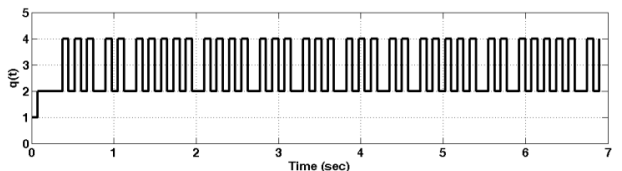
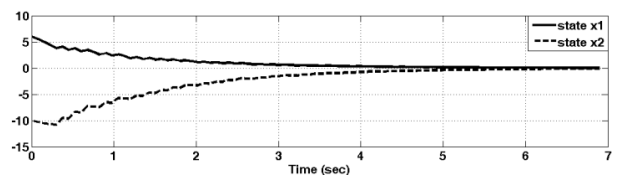
- [1] A. Giua, C. Seatzu, and C. Van Der Mee, "Optimal control of autonomous linear systems switched with a pre-assigned finite sequence," In Proceedings IEEE International Symposium on Intelligent Control, pp. 144–149, 2001.
- [2] D. Corona, A. Bemporad, A. Giua and C. Seatzu, "Optimal state-feedback quadratic regulation of linear hybrid automata," In IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems, pp. 407–412, 2003.
- [3] P. Colaneri, J. C. Geromel and A. Astolfi, "Stabilization of continuous-time nonlinear switched systems," Conference on Decision and Control, Sevilla, 2005.
- [4] X. Xuping and P.J. Antsaklis, "Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No. 1, pp. 2-16, 2004.
- [5] A. Bemporad, A. Giua and C. Seatzu, "A master-slave algorithm for the optimal control of continuous-time switched affine systems," 41th IEEE Conf. on Decision and Control, Vol. 2, pp. 1976–1981, 2002.
- [6] A. Bemporad, A. Giua and C. Seatzu, "Synthesis of state-feedback optimal controllers for continuous-time switched linear systems," In Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control, Vol. 3, pp. 3182–3187, 2002.
- [7] W. Spinelli, P. Bolzern and P. Colaneri, "Computation of lower bounds for the optimal quadratic cost of linear switched systems," In Proceeding of American Control Conference, pp. 5444-5449, 2006.
- [8] C. Seatzu, D. Corona A. Giua and A. Bemporad, "Optimal control of continuous-time switched affine systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 51, No. 5, pp. 726- 741, 2006.
- [9] W. Zhang and H. Jianghai, "Optimal quadratic regulation for discrete-time switched linear systems: a numerical approach," American Control Conference, pp. 4615-4620, 2008.
- [10] W. Zhang, A. Abate and H. Jianghai, "Stabilization of discrete-time switched linear systems: a control-Lyapunov function approach," In Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2009), pp. 411-425, 2009.
- [11] W. Zhang, A. Abate and H. Jianghai, "Efficient suboptimal solutions of switched LQR problems," IEEE Proceeding of American Control Conference, pp. 1084-1091, 2009.
- [12] W. Zhang, A. Abate, H. Jianghai and M. Vitus, "Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems," Automatica, Vol.45, No.11, pp. 2526–2536, 2009.



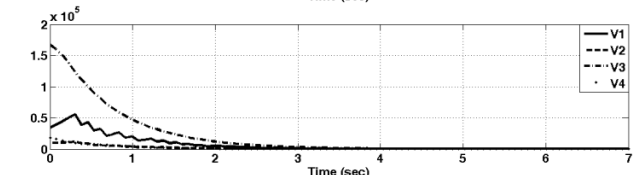
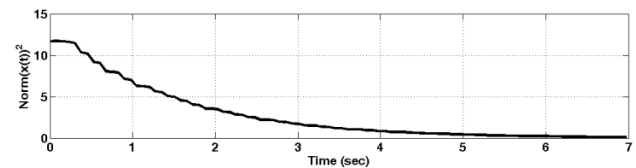
شکل (۳): حالت‌های x_1 ، x_2 و سیگنال سوئیچ $q(t)$ مثال ۲



شکل (۴): مربع نرم حالات و توابع لیپانوف هر زیر سیستم مثال ۲



شکل (۵): حالت‌های x_1 ، x_2 و سیگنال سوئیچ $q(t)$ مثال ۳



شکل (۶): مربع نرم حالات و توابع لیپانوف هر زیر سیستم مثال ۳

۷- نتیجه

در این مقاله کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ شونده خطی ناخودگردان با طراحی سیگنال کنترل فیدبک حالت و قانون سوئیچ

- [13] W. Zhang, H. Jianghai and A. Abate, "On the value functions of the discrete-time switched LQR problem," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.54, No.11, pp. 2669-2674, 2009.
- [14] W. Zhang, J. Hu and A. Abate, "Infinite horizon switched lqr problems in discrete time: a suboptimal algorithm with performance analysis," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, No. 7, pp. 1815-1820, 2012.
- [15] S. Hedlund and A. Rantzer, "Convex dynamic programming for hybrid systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.47, No.9, pp. 1536- 1540, 2002.
- [16] S. Hedlund and A. Rantzer, "Optimal control of hybrid systems," In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 4, pp. 3972-3977, 1999.
- [17] A. Rantzer and M. Johansson, "Piecewise linear quadratic optimal control," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 4, pp. 629-637, 2000.
- [18] A. Rantzer, "On relaxed dynamic programming in switching systems," IEE Proceedings Special Issue on Hybrid Systems, 2006.
- [19] M. Rungger and O. Strusburg, "A numerical method for the optimal control based on dynamic programming," Nonlinear Analysis: Hybrid systems, Vol. 5, No. 2, pp. 254-274, 2011.
- [20] M. S. Branicky, *Studies in Hybrid Systems: Modeling, Analysis, and Control*, Ph.D. dissertation, Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, 1995.
- [21] C. D. Mayer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2000.
- [22] R. Wang and J. Zhao, "Non-fragile hybrid guaranteed cost control for a class of uncertain switched linear systems," Journal of Control Theory and Applications, Vol. 4, No. 3, pp. 32-37, 2006.
- [23] K. H. Khalil, *Nonlinear Systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [24] S. Boyd, L. El Ghaoui, F. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, The SIAM press, 1994.
- [25] P. Shi, E. Boukas, Y. Shi and R. Agrawal, "Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems," Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 157, pp. 435-451, 2003.

زیر نویس‌ها

-
- ¹ Autonomous Switched Linear Systems
² Non-Autonomous Switched Linear Systems
³ Control Lyapunov Functions
⁴ Hamilton-Jacobi-Bellman
⁵ Infinite Horizon Optimal Control of Switched Linear Systems
⁶ Multiple Lyapunov Functions