

# اجماع گروهی مبتنی بر رهبر سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر زمانی

عرفان شهامت خواه<sup>۱</sup>، کارشناس ارشد؛ محمد طباطبایی<sup>۲</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر - اصفهان - ایران - shahamatkhah@gmail.com

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر - اصفهان - ایران - tabatabaei@iaukhsh.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، اجماع گروهی<sup>۱</sup> مبتنی بر رهبر<sup>۲</sup> برای سیستم‌های چندعاملی<sup>۳</sup> مرتبه کسری<sup>۴</sup> زمان گسسته<sup>۵</sup> با تاخیر زمانی، بررسی شده است. در ابتدا، دو گروه در نظر گرفته شده‌اند. سپس، مساله، به تعداد دلخواهی گروه نیز تعمیم یافته است. عامل‌ها، انتگرال‌گیرهای مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر در ورودی، فرض شده‌اند. ارتباط بین عامل‌ها با یک شبکه ارتباطی جهت‌دار<sup>۶</sup> با ساختار ثابت، توصیف شده است. مساله اجماع گروهی برای عامل‌های ذکر شده، به تحلیل پایداری مجانبی برای یک سیستم مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر، منجر شده است. با توجه به این ایده، شرط لازم و کافی برای دستیابی به اجماع گروهی مبتنی بر رهبر، بر حسب بهره‌های کنترلی عامل‌ها، استخراج شده است. همچنین مقدار بهینه بهره‌های کنترلی، برای کمینه کردن یک شاخص عملکرد خاص، محاسبه شده است. شبیه‌سازی‌های عددی، کارآیی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم‌های چندعاملی، سیستم‌های مرتبه کسری زمان گسسته، اجماع مبتنی بر رهبر، اجماع گروهی، انتگرال‌گیر مرتبه کسری.

## Leader-Following Group Consensus of Discrete-Time Fractional-Order Multi-Agent Systems with Time-Delay

E. Shahamatkhah, M.Sc.<sup>1</sup>; M. Tabatabaei, Assistant Professor<sup>2</sup>

1- Department of Electrical Engineering, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran,  
Email: shahamatkhah@gmail.com

2- Department of Electrical Engineering, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran,  
Email: tabatabaei@iaukhsh.ac.ir

**Abstract:** In this paper, the leader-following group consensus of discrete-time fractional-order multi-agent systems with time-delay is studied. At First, two groups are considered. Then, the problem is extended to arbitrary number of groups. The agents are considered as discrete-time fractional order integrators with input time delay. The interaction between agents is described with a directed communication graph with fixed topology. The group consensus problem for the considered agents leads to asymptotic stability analysis of a discrete-time fractional order system with time-delay. Based on this idea, the necessary and sufficient condition to reach the leader-following group consensus in terms of the controller gains of agents is extracted. Moreover, the optimal value of the controller gains is calculated to minimize a special performance index. Numerical simulations show the performance of the proposed method.

**Keywords:** Multi-agent systems, discrete-time fractional-order systems, leader-following consensus, group consensus, fractional-order integrator.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۰۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۷/۰۱/۱۳ و ۱۳۹۷/۰۵/۰۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۸/۱۸

نام نویسنده مسئول: محمد طباطبایی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - اصفهان - خمینی شهر - منظره - بلوار دانشجو - دانشگاه آزاد خمینی شهر - دانشکده مهندسی برق.

## ۱- مقدمه

ایده سیستم‌های چندعاملی و کنترل جمعی، با الهام از حرکت جمعی حیوانات مانند حرکت جمعی پرندگان، ماهی‌ها و ... مطرح شده است [1]. کاربرد سیستم‌های چندعاملی در شبکه‌های حسگر [2]، و سایل نقلیه خودکار [3] و ربات‌های متحرک [4]، باعث ترغیب محققین برای آرایه روش‌های جدیدی برای کنترل سیستم‌های چندعاملی، شده است [1]. این روش‌ها به منظور دستیابی به اهداف مختلف مانند اجماع<sup>۲</sup> [5]، شکل‌پذیری<sup>۳</sup> [6] و حرکت گروهی<sup>۴</sup> [7] ایجاد شده‌اند. اگر حالت‌های تمامی عامل‌ها در یک سیستم چندعاملی به یک مقدار مشخص و مشترک میل کند، در این صورت می‌گوییم اجماع رخ داده است. ممکن است هدف از تحقق اجماع در یک سیستم چندعاملی، همگرایی حالت‌های عامل‌ها به حالت‌های یکی از اعضاء که رهبر نامیده می‌شود، باشد. در این صورت، این اجماع را اجماع مبتنی بر رهبر گویند. در اجماع مبتنی بر رهبر، سیگنال کنترلی هر عامل، به گونه‌ای انتخاب می‌شود که حالت‌های آن تا حد امکان به حالت‌های رهبر نزدیک شود [5]. بدین منظور، هر عامل باید توسط رهبر و دیگر عامل‌ها، اطلاعات دریافت کند.

تاکنون پژوهش‌های متعددی در مورد اجماع بدون رهبر و اجماع مبتنی بر رهبر در سیستم‌های چندعاملی انجام شده است. در این پژوهش‌ها، دینامیک عامل‌ها بعضاً به صورت تک‌انتگرال‌گیر، دو انتگرال‌گیر و یا یک دینامیک مرتبه بالا در حالت کلی در نظر گرفته شده‌اند. در کاربردهای عملی، اجماع سیستم‌های چندعاملی با دینامیک تک‌انتگرال‌گیر یا دو انتگرال‌گیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. اجماع مبتنی بر رهبر در سیستم‌های چندعاملی با دینامیک دو انتگرال‌گیر همراه با تاخیر ثابت و تاخیر متغیر با زمان در [8, 9] بررسی شده است. در [10]، اجماع مبتنی بر رهبر برای سیستم‌های چندعاملی با دینامیک تک‌انتگرال‌گیر و با در نظر گرفتن اغتشاش و تاخیرهای ارتباطی عامل‌ها با یکدیگر بررسی شده است. اجماع سیستم‌های چندعاملی با دینامیک دو انتگرال‌گیر و در حوزه زمان گسسته با شبکه ارتباطی ثابت در [11] بررسی شده است. در [12]، شرایط اجماع زمان محدود مبتنی بر رهبر، برای سیستم‌های چندعاملی با دینامیک مرتبه دو (دو انتگرال‌گیر) غیرخطی بررسی شده است. همچنین، اجماع زمان محدود برای سیستم‌های چندعاملی مبتنی بر رهبر با دینامیک دو انتگرال‌گیر و بدون اندازه‌گیری سرعت عامل‌ها در [13] بررسی شده است. در [14]، اجماع سیستم‌های چندعاملی، با دینامیک دو انتگرال‌گیر و با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی برای سرعت عامل‌ها بررسی شده است. همچنین، اجماع سیستم‌های چندعاملی با دینامیک دو انتگرال‌گیر و با در نظر گرفتن اغتشاشات خارجی در [15] [17] بررسی شده است.

در توصیف رفتار بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از قبیل انتشار<sup>۱۰</sup>، از عملگرهای مرتبه کسری استفاده شده است [18]. عملگرهای مرتبه کسری، درجه آزادی بیشتری برای توصیف رفتار یک سیستم

ایجاد می‌کنند. از این درجه آزادی بالاتر ایجاد شده، در طراحی کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری برای افزایش کارایی سیستم نیز استفاده شده است [19, 20]. در سال‌های اخیر، اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری، مورد توجه محققان قرار گرفته است. در [21]، با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست تعمیم یافته، شرایط لازم و کافی برای اجماع سیستم‌های مرتبه کسری تاخیردار استخراج شده است. از همین ایده، برای بررسی اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با ورودی نامتجانس و تاخیر ارتباطی، استفاده شده است [22]. در [23]، شرایط کافی برای اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری نامعین بر حسب نامعادلات ماتریسی خطی آرایه شده است. در [24]، اجماع مبتنی بر رهبر برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با شبکه ارتباطی ثابت، بررسی شده است. اجماع در سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با در نظر گرفتن تاخیرهای ارتباطی در [25]، مورد مطالعه قرار گرفته است. مساله اجماع مقاوم سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با در نظر گرفتن اغتشاشات خارجی با فرض شبکه ارتباطی جهت‌دار ثابت در [26]، مورد بررسی قرار گرفته است. در [27]، اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با حالت مرجع، بررسی شده است. یک ساختار کنترلی توزیع شده مبتنی بر رویکرد، برای اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با مدل‌های خطی، آرایه شده است [28]. در [29]، شرایط لازم و کافی جهت تحقق اجماع برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با عوامل دو انتگرال‌گیر، استخراج شده‌اند. اجماع در سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری با عوامل خطی و غیرخطی همراه با تاخیر زمانی در سیگنال ورودی در [30] بررسی شده است. در [31]، مفهوم ناحیه اجماع برای سیستم‌های چندمرتبه‌ای مرتبه کسری معرفی شده و یک ساختار کنترلی چندمرحله‌ای جهت مشخص کردن ناحیه مذکور، معرفی شده است. برای بهبود مقاومت سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری در برابر تاخیر ارتباطی، مشتق مرتبه کسری مبتنی بر تاخیر حالت‌ها در [32]، معرفی شده است. در [33]، مساله اجماع نامایی مبتنی بر رهبر سیستم‌های چندعاملی غیرخطی مرتبه کسری با در نظر گرفتن تاخیر درونی برای هر عامل و همچنین تاخیر ارتباطی، مورد مطالعه قرار گرفته است.

در اجماع سیستم‌های چندعاملی، همگرایی تمام عامل‌ها به یک حالت مشترک، در نظر می‌باشد. ولی، برخی تحقیقات، متمرکز بر اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی می‌باشد. بدین گونه که این سیستم‌ها به چند دسته یا گروه تقسیم شده و هدف آن است که گروه‌های متفاوت، به حالت‌های متفاوتی همگرا شوند. در واقع، اجماع، حالت خاصی از اجماع گروهی می‌باشد وقتی تعداد گروه‌ها برابر یک فرض شود. لازم به ذکر است که این اجماع در هر گروه انجام شده و بین گروه‌ها هیچ اجماعی انجام نمی‌شود. اجماع گروهی در اظهار عقاید گروه‌های سیاسی مثل گروه‌های دموکرات و جمهوری خواه، نمایان می‌شود. از این جهت در بسیاری از تحقیقات در این زمینه، تعداد گروه‌ها برابر ۲ اختیار شده است. هر چند، بعضاً تعداد گروه‌ها دلخواه نیز

مثال عددی برای بررسی صحت روش کنترلی پیشنهادی ارائه شده‌اند. ضمن اینکه، کاربرد اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری زمان گسسته در تنظیم دمای هوای اتاق‌های یک ساختمان، به‌عنوان یک مثال کاربردی، بررسی شده‌است.

بطور خلاصه، نوآوری‌های مقاله حاضر، به شرح زیر می‌باشند:

الف: در این مقاله، پایداری مجانبی سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان گسسته با تاخیر دلخواه در حالت‌ها، برای نخستین بار بررسی شده‌است.

ب: شرط لازم و کافی برای اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری زمان گسسته با تعداد دلخواهی گروه، استخراج شده‌است.

ج: به‌عنوان یک مثال کاربردی، مساله تنظیم دمای اتاق‌های یک ساختمان به مساله اجماع مبتنی بر رهبر یک سیستم چندعاملی مرتبه‌کسری زمان گسسته تبدیل شده و این مساله، حل شده‌است.

سازمان‌دهی مطالب این مقاله به این صورت می‌باشد که در بخش دوم به معرفی سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان گسسته و بررسی پایداری آنها پرداخته شده‌است. در بخش سوم، نحوه توصیف یک سیستم چندعاملی با استفاده از مفاهیم تئوری شبکه ارتباطی، تشریح شده‌است. اجماع گروهی مبتنی بر رهبر برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری زمان گسسته، در بخش چهارم مورد بررسی قرار گرفته‌است. نتایج شبیه‌سازی در قالب مثال‌های عددی در بخش پنجم ارائه شده‌است. در بخش ششم، یک کاربرد عملی برای اجماع مبتنی بر رهبر سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان گسسته ارائه شده‌است. در نهایت، بخش هفتم به نتیجه‌گیری و بررسی کارهای تحقیقاتی آینده، اختصاص یافته‌است.

## ۲- سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان گسسته

تعاریف متنوعی برای مشتق مرتبه‌کسری وجود دارد. منتهی با توجه به این‌که این مقاله بر روی سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان گسسته متمرکز شده‌است، از تعریف Grunwald-Letnikov که فرم گسسته مشتق مرتبه‌کسری می‌باشد، استفاده شده‌است. مطابق این تعریف، مشتق مرتبه‌کسری تابع زمان پیوسته و هموار  $f(t)$  به صورت  $D_t^\alpha f(t)$  نمایش داده شده و به صورت زیر، بیان می‌شود [18]:

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\alpha$  یک عدد حقیقی مثبت دلخواه می‌باشد. با در نظر گرفتن  $a=0$  و  $t=kh$ ، رابطه تقریبی زیر، حاصل می‌شود:

$$D_t^\alpha f(t) \approx \Delta_h^\alpha f(kh) \quad (2)$$

بقسمی که:

$$\Delta_h^\alpha f(kh) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f((k-j)h) \quad (3)$$

اکنون، یک سیستم زمان پیوسته مرتبه‌کسری با فرم فضای حالت زیر و شرایط اولیه غیرصفر، را در نظر بگیرید:

فرض شده‌است. در [34]، اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی با شبکه ارتباطی متغیر و تاخیر ارتباطی، بررسی شده‌است. مساله اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی با تبادل اطلاعات جهت‌دار در [35]، مطالعه شده‌است. شرایط لازم و کافی برای اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی در [36]، استخراج شده‌است. اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌اول با در نظر گرفتن محدودیت‌های ورودی غیرخطی در [37]، مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در [38]، اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی زمان پیوسته با در نظر گرفتن تاخیر ارتباطی بررسی شده‌است. مساله اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی زمان پیوسته مرتبه‌دوم با شبکه ارتباطی جهت‌دار ثابت، در [39]، مورد بررسی قرار گرفته‌است. در [40]، اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌دوم زمان گسسته با شبکه ارتباطی متغیر و تاخیرهای متغیر با زمان، بررسی شده‌است. مساله اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی نامتناجس با شبکه ارتباطی ثابت یا متغیر در [41]، مطرح شده‌است. اجماع گروهی سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری با در نظر گرفتن عدم قطعیت در دینامیک عامل‌ها در [42]، مورد بررسی قرار گرفته‌است. تمامی تحقیقات انجام شده در مورد اجماع سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری، منحصر به سیستم‌های زمان پیوسته، بوده‌است. اما در عمل، پیاده‌سازی یک کنترل‌کننده زمان گسسته به مراتب راحت‌تر از کنترل‌کننده زمان پیوسته مشابه آن می‌باشد. لذا، در این پژوهش، اجماع گروهی مبتنی بر رهبر برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری زمان گسسته با تاخیر زمانی در ورودی، مورد بررسی قرار گرفته‌است. دینامیک عامل‌ها و رهبر، به صورت انتگرال‌گیرهای مرتبه‌کسری زمان گسسته یا سیستم‌های شبه مرتبه‌اول زمان گسسته با تاخیر زمانی در ورودی، در نظر گرفته شده و نحوه ارتباط عامل‌ها با یکدیگر با یک شبکه ارتباطی جهت‌دار ثابت، توصیف شده‌است. در ابتدا، با توجه به ابزارهای ارائه شده در [43، 44] برای تحلیل پایداری یک سیستم زمان گسسته مرتبه‌کسری بدون تاخیر، شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان گسسته با تاخیر زمانی دلخواه در حالت‌ها، استخراج شده‌است. سپس بر اساس شرط حاصله، مساله اجماع گروهی برای سیستم‌های چندعاملی مرتبه‌کسری زمان گسسته با تاخیر، مورد بررسی قرار گرفته‌است. عامل‌ها، انتگرال‌گیرهای مرتبه‌کسری با تاخیر در ورودی، فرض شده‌اند. سپس با فرض یک شبکه ارتباطی دوطرفه متشکل از دو گروه، شرایط لازم و کافی برای دستیابی به اجماع گروهی برای یک سیستم چندعاملی با عامل‌های مذکور، بر حسب بهره‌های کنترلی عامل‌ها، استخراج شده‌است. در واقع، حداکثر مقدار بهره کنترلی برای دستیابی به اجماع گروهی بر حسب مرتبه‌کسری، مشخصات شبکه ارتباطی، پررود نمونه‌برداری و میزان تاخیر زمانی، محاسبه شده‌است. همچنین، مقدار بهره کنترلی بهینه برای کمینه‌کردن جمع وزن‌دار انرژی خطای اجماع عامل‌ها و انرژی سیگنال کنترلی عامل‌ها، محاسبه شده‌است. سپس نتایج حاصله برای یک شبکه ارتباطی با تعداد دلخواهی گروه، تعمیم یافته‌است. چندین

در نظر گرفته می‌شوند. میزان ارتباط رهبر و عامل‌ها در  $G_1$ ، توسط ماتریس  $D_1 = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  و در  $G_2$ ، توسط ماتریس  $D_2 = \text{diag}(d_{n+1}, \dots, d_{n+m})$  تعیین می‌شود. به گونه‌ای که اگر عامل  $s_i$  در ارتباط با  $s_j^*$  باشد آنگاه  $d_i = 1$  و در غیر این صورت  $d_i = 0$  می‌باشد. به طور کلی می‌توان گفت میزان ارتباط عامل‌ها و رهبر در شبکه ارتباطی  $G$  توسط ماتریس  $D = \text{diag}(D_1, D_2)$  تعیین می‌شود.

در صورتی که بین هر دو گروه مجزا در یک شبکه ارتباطی جهت‌دار، مسیری جهت‌دار باشد، آنگاه شبکه ارتباطی را اکیدا متصل<sup>17</sup> می‌گویند. در صورتیکه، در یک شبکه ارتباطی، حداقل یک گره دارای مسیری به تمام گره‌های دیگر باشد، آنگاه شبکه ارتباطی مورد نظر دارای درخت پوشا<sup>18</sup> می‌باشد. در یک شبکه ارتباطی جهت‌دار، اگر از هر گره، مسیری به گره  $s_i$  باشد، آنگاه گره  $s_i$  را قابل دسترس سرتاسری<sup>19</sup> گویند.

**فرض ۱:** در این مقاله ارتباط بین عامل‌ها به صورت جهت‌دار و تحت شبکه ارتباطی ثابت اکیدا متصل، در نظر گرفته می‌شود.

**فرض ۲:** ارتباط بین شبکه‌های ارتباطی  $G_1$  و  $G_2$ ، متعادل می‌باشد. یعنی:

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} = 0, i \in G_1; \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0, i \in G_2 \quad (7)$$

**تذکر ۱:** این بدین معناست که  $a_{ij}, \forall (i, j) \in I$  می‌توانند مقادیر مثبت یا منفی یا صفر، اختیار کنند به قسمی که  $I = \{(i, j) : i \in G_1, j \in G_2\} \cup \{(i, j) : j \in G_1, i \in G_2\}$ . البته  $a_{ij}, \forall (i, j) \in G_1$  و  $a_{ij}, \forall (i, j) \in G_2$  الزاماً، مقادیری بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشند.

**فرض ۳:** میزان ارتباط هر عامل با عامل‌های گروه دیگر همواره کمتر از میزان ارتباط با رهبر خود می‌باشد. یعنی:

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} |a_{ij}| \leq d_i, i \in G_1; \quad \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq d_i, i \in G_2 \quad (8)$$

**فرض ۴:** ماتریس لاپلاسیان ( $L$ ) شبکه ارتباطی، دقیقاً دارای دو مقدار ویژه صفر با بلوک‌های جردن  $1 \times 1$  بوده و تمامی مقادیر ویژه دیگر آن، دارای بخش حقیقی مثبت می‌باشند.

**تذکر ۲:** در مرجع [35]، نشان داده شده است که اگر شبکه ارتباطی در فرض ۱ و ۲، صدق کند، آنگاه با فرض دو گروه، ماتریس لاپلاسیان آن، دارای حداقل دو مقدار ویژه صفر با بلوک‌های جردن  $1 \times 1$  می‌باشد و سایر مقادیر ویژه آن، دارای بخش حقیقی مثبت می‌باشند. اما این که این ماتریس، دقیقاً باید دارای دو مقدار ویژه صفر با بلوک‌های جردن  $1 \times 1$  باشد، اثبات نشده است. لذا ذکر فرض ۴، ضروری می‌باشد.

**تعریف ۱:** فرض کنید  $I_1 = \{1, \dots, n\}$  و  $I_2 = \{n+1, \dots, n+m\}$  باشند و  $\bar{I} = \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2$  که  $\bar{I}_1 = \{i \in I_1, \exists i \in I_2, a_{ii} \neq 0\}$  و  $\bar{I}_2 = \{i \in I_2, \exists i \in I_1, a_{ii} \neq 0\}$  می‌باشند. اگر گره  $l$  متعلق به  $\bar{I}$  باشد، این گره را یک گره متقابل<sup>20</sup> و عامل متناظر با این گره را یک

$$D_i^\alpha \underline{x}(t) = F \underline{x}(t) \quad (4)$$

در رابطه (۳)،  $\underline{x}(t) \in R^M$  بردار فضای حالت،  $F \in R^{M \times M}$ ، ماتریس فضای حالت می‌باشند. همچنین،  $\alpha$  مرتبه مشتق کسری می‌باشد که مقدار آن در بازه  $[0, 1]$  انتخاب می‌شود. با توجه به روابط (۲) و (۳)، فرم زمان گسسته معادله (۴) به صورت زیر حاصل شده است [18]:

$$\Delta_T^\alpha \underline{x}(k+1) = F \underline{x}(k) \quad (5)$$

که  $T$ ، پریود نمونه برداری بوده و  $\Delta_T^\alpha \underline{x}(k+1)$  به صورت زیر، قابل بیان است:

$$\Delta_T^\alpha \underline{x}(k+1) = T^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \underline{x}(k+1-j) \quad (6)$$

### ۳- نظریه شبکه ارتباطی

شبکه ارتباطی، مجموعه‌ای از گره‌ها<sup>۱</sup> و لبه‌ها<sup>۱۲</sup> بوده که به صورت  $G = (S, E, A)$  نمایش داده می‌شود. به گونه‌ای که  $S = \{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+m}\}$  مجموعه‌ی گره‌ها و  $E \subseteq S \times S$  مجموعه‌ی لبه‌ها را نمایش می‌دهند. اعضای مجموعه‌ی  $E$  به صورت  $e_{ij} = (s_i, s_j)$  نشان داده می‌شوند و هم‌سایه‌های هر گره  $s_i$ ، توسط مجموعه‌ای به صورت  $N_i = \{s_j \in S : (s_i, s_j) \in E\}$  مشخص می‌شوند. ماتریس همجواری<sup>۱۳</sup> شبکه ارتباطی  $G$ ، ماتریسی به ابعاد  $(n+m) \times (n+m)$  بوده و به صورت  $A = [a_{ij}]$  مشخص می‌شود. در واقع میزان ارتباط گره‌ها با یکدیگر توسط ماتریس  $A$  مشخص می‌شود به گونه‌ای که اگر  $(s_i, s_j) \in E, i \neq j$  برقرار باشد، آنگاه  $a_{ij} \neq 0$  بوده و در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  می‌باشد. عناصر روی قطر اصلی ماتریس  $A$  همگی صفر فرض می‌شوند. ماتریس لاپلاسیان<sup>۱۴</sup> شبکه ارتباطی  $G$  به صورت  $L = [l_{ij}]$  تعریف می‌شود به گونه‌ای که برای  $i \neq j$  به صورت  $l_{ij} = -a_{ij}$  تعریف می‌شود.

اکنون فرض کنید که شبکه ارتباطی  $G$ ، متشکل از دو زیر شبکه ارتباطی  $G_1$  و  $G_2$  می‌باشد به گونه‌ای که زیر شبکه ارتباطی  $G_1 = (S_1, E_1, A_1)$  متشکل از مجموعه عامل‌های  $S_1 = \{s_1, \dots, s_n\}$  و زیر شبکه ارتباطی  $G_2 = (S_2, E_2, A_2)$  متشکل از مجموعه عامل‌های  $S_2 = \{s_{n+1}, \dots, s_{n+m}\}$  می‌باشد. متعاقباً، ماتریس‌های  $A_1$  و  $A_2$  میزان ارتباط عامل‌ها در هریک از زیر شبکه‌های ارتباطی  $G_1$  و  $G_2$  را بیان می‌کنند و در صورتی که روابط  $a_{ij} \neq a_{ji}, \forall (i, j) \in G_1$  و  $a_{ij} \neq a_{ji}, \forall (i, j) \in G_2$  برقرار باشد، شبکه‌های ارتباطی  $G_1$  و  $G_2$  جهت‌دار<sup>۱۵</sup> می‌باشند.

همچنین رهبر<sup>۱۶</sup> در شبکه ارتباطی  $G$  به صورت  $s_j^*, j \in J := \{1, 2\}$  مشخص می‌شود. به گونه‌ای که  $s_1^*$  برای زیر شبکه ارتباطی  $G_1$  و  $s_2^*$  برای زیر شبکه ارتباطی  $G_2$  به عنوان رهبر

**اثبات:** چون  $|z|=1$  می‌باشد، لذا  $z = e^{j\varphi}$  به قسمی که  $\varphi = \arg(z)$  می‌باشد. باید در نظر داشت که  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  می‌باشد. اکنون، نتیجه می‌شود:

$$w = T^{-\alpha} e^{(k_0+1)j\varphi} (1 - e^{-j\varphi})^\alpha \quad (12)$$

با توجه به رابطه (۱۲) و با کمی ساده‌سازی، نتیجه می‌شود:

$$|w| = \left( \frac{2}{T} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right)^\alpha \quad (13)$$

اکنون با توجه به رابطه (۱۲) و کمی ساده‌سازی، نتیجه می‌شود:

$$\varphi^w = (k_0 + 1 - \frac{\alpha}{2})\varphi + \frac{\alpha\pi}{2} \quad (14)$$

با توجه به این که  $\varphi \in [0, 2\pi]$  می‌باشد و با توجه به رابطه (۱۴)، نامساوی زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\alpha\pi}{2} \leq \varphi^w \leq 2\pi(k_0 + 1) - \frac{\alpha\pi}{2} \quad (15)$$

با توجه به روابط (۱۳) و (۱۴)، نتیجه می‌شود:

$$|w| = \left( \frac{2}{T} \left| \sin \frac{\varphi^w - \frac{\alpha\pi}{2}}{2(k_0 + 1) - \alpha} \right| \right)^\alpha \quad (16)$$

بنابراین، با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶)، لم، ثابت شده است.

**تذکره ۳:** می‌توان نشان داد که ناحیه داخل دایره واحد ( $|z| < 1$ ) در صفحه  $Z$ ، با نگاشت  $w = T^{-\alpha} z^{k_0+1} (1 - z^{-1})^\alpha$ ، به ناحیه زیر در صفحه  $w$  (ناحیه درون مرز (۱۰))، قابل تبدیل می‌باشد:

$$\varphi^w \in \left[ \frac{\alpha\pi}{2}, 2\pi(k_0 + 1) - \frac{\alpha\pi}{2} \right] \quad \wedge \quad |w| < \bar{w} \quad (17)$$

به قسمی که  $\bar{w}$ ، مطابق رابطه (۱۱)، محاسبه می‌شود.

**قضیه ۱:** سیستم توصیف شده با معادله (۹)، پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$\varphi_i^F \in \left[ \frac{\alpha\pi}{2}, 2\pi(k_0 + 1) - \frac{\alpha\pi}{2} \right] \quad \wedge \quad |\lambda_i^F| < |\rho_i| \quad (18)$$

به قسمی که  $\lambda_i^F$  مقدار ویژه  $i$  ام ماتریس  $F$  بوده و  $\varphi_i^F$  نیز آرگومان به قسمی که  $\varphi^w$  و  $|w|$  به ترتیب، فاز و اندازه  $w$  می‌باشند. ضمناً،  $\bar{w}$  از رابطه زیر، محاسبه می‌شود:

$$|\rho_i| = \left( \frac{2}{T} \left| \sin \frac{\varphi_i^F - \frac{\alpha\pi}{2}}{2(k_0 + 1) - \alpha} \right| \right)^\alpha \quad i = 1, \dots, M \quad (19)$$

**اثبات:** با توجه به نتایج به دست آمده در [43]، می‌توان نوشت:

$$Z\{\Delta_T^\alpha \underline{x}(k+1)\} = T^{-\alpha} z(1 - z^{-1})^\alpha [X(z) - \underline{x}(0)] \quad (20)$$

عامل متقابل و در غیر این صورت، این گرہ را یک گرہ منفعل<sup>۲۱</sup> و عامل متناظر با آن را یک عامل منفعل گویند [39].

**لم ۱:** با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ و ۲ و ۴، در شبکه ارتباطی جهت‌دار  $G$ ، اگر تمامی گرہ‌های متقابل این شبکه ارتباطی، قابل دسترس سرتاسری بوده و به طور مستقیم با رهبر خود در ارتباط باشند، آنگاه تمامی مقادیر ویژه ماتریس  $H = L + D$  غیر صفر بوده و دارای جزء حقیقی مثبت می‌باشند [39].

#### ۴- بیان مساله

در این قسمت، اجماع گروهی مبتنی بر رهبر برای سیستم‌های چندعاملی با دینامیک مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر در ورودی، بررسی می‌شود به گونه‌ای که تمامی عامل‌ها دارای دینامیک شبه مرتبه اول یا انتگرال گیر با مشتق مرتبه کسری با تاخیر، می‌باشند. در ابتدا، شرایط لازم و کافی برای پایداری سیستم‌های مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر دلخواه در حالت‌ها، استخراج شده است. سپس، با فرض تعداد گرہ‌ها برابر ۲، مساله اجماع گروهی بررسی و حل خواهد شد. سپس، مساله برای یک شبکه ارتباطی با تعداد دلخواهی گرہ، تعمیم خواهد یافت. دقت شود که در کلیه تحلیل‌ها، دینامیک رهبرها و عامل‌ها به طور یکسان در نظر گرفته می‌شوند.

#### ۴-۱- بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر زمانی

یک سیستم مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر که با معادله حالت زیر توصیف شده است، را در نظر بگیرید:

$$\Delta_T^\alpha \underline{x}(k+1) = F \underline{x}(k - k_0) \quad (9)$$

که  $k_0$ ، میزان تاخیر می‌باشد و یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. با فرض  $k_0 = 0$ ، سیستم (۹) به سیستم (۵)، قابل تبدیل می‌باشد. در سیستم توصیف شده با معادله (۹)، شرایط اولیه، مخالف صفر فرض می‌شود.

**لم ۲:** نگاشت  $w = T^{-\alpha} z^{k_0+1} (1 - z^{-1})^\alpha$ ، ناحیه  $|z|=1$  (روی دایره واحد) در صفحه  $Z$  را به ناحیه زیر در صفحه  $w$ ، نگاشت می‌کند:

$$\varphi^w \in \left[ \frac{\alpha\pi}{2}, 2\pi(k_0 + 1) - \frac{\alpha\pi}{2} \right] \quad \wedge \quad |w| = \bar{w} \quad (10)$$

به قسمی که  $\varphi^w$  و  $|w|$  به ترتیب، فاز و اندازه  $w$  می‌باشند. ضمناً،  $\bar{w}$  از رابطه زیر، محاسبه می‌شود:

$$\bar{w} = \left( \frac{2}{T} \left| \sin \frac{\varphi^w - \frac{\alpha\pi}{2}}{2(k_0 + 1) - \alpha} \right| \right)^\alpha \quad (11)$$

بدیهی است اگر رهبر، بدون سیگنال کنترلی فرض شود، آنگاه  $u_j^*(k) = 0, j = 1, 2$  می‌باشد.

**تعریف ۲:** اجماع گروهی مبتنی بر رهبر برای سیستم‌های (۲۳) و

(۲۴)، حاصل می‌شود اگر سیگنال کنترلی  $u_i(k)$  متناظر با هر عامل به گونه‌ای تعیین شود که رابطه‌ی زیر، به‌ازای هر حالت اولیه  $x_i(0), i = 1, \dots, n+m$  همواره برقرار باشد:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_l(k) - x_l^*(k)\| = 0, \quad l = 1, \dots, n \quad (25)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_j(k) - x_j^*(k)\| = 0, \quad j = n+1, \dots, n+m$$

اکنون، اگر خطای موقعیت عوامل گروه اول و دوم با رهبر خود، به ترتیب به‌صورت  $\tilde{x}_l(k) = x_l(k) - x_l^*(k), l = 1, \dots, n$  و  $\tilde{x}_j(k) = x_j(k) - x_j^*(k), j = n+1, \dots, n+m$  بیان شوند، آنگاه با توجه به روابط (۲۳) و (۲۴)، می‌توان نوشت:

$$\Delta_T^\alpha \tilde{x}_i(k+1) = u_i(k - k_0) - u_i^*(k - k_0), \quad i \in G_j, \quad j = 1, 2 \quad (26)$$

بدیهی است اجماع گروهی برای سیستم‌های (۲۳) و (۲۴)، اتفاق خواهد افتاد اگر و تنها اگر  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_i(k)\| = 0, i = 1, \dots, n+m$  اتفاق افتد. اکنون، برای دستیابی به اجماع گروهی، سیگنال کنترلی برای عامل‌های هر یک از گروه‌ها، به‌صورت زیر فرض شده‌اند:

$$u_i(k) = \begin{cases} k_1 \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)) + k_1 \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} x_j(k) \\ + k_1 d_i (x_i^*(k) - x_i(k)) + u_i^*(k), & i \in G_1 \\ k_1 \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} x_j(k) + k_1 \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)) \\ + k_1 d_i (x_i^*(k) - x_i(k)) + u_i^*(k), & i \in G_2 \end{cases} \quad (27)$$

$N_{1i} = \{s_j \in S_1 : (s_i, s_j) \in E\}$  و  $N_{2i} = \{s_j \in S_2 : (s_i, s_j) \in E\}$  می‌باشد و

با توجه به تعریف  $\tilde{x}_i(k)$  و با توجه به فرض ۲، رابطه (۲۷)، به‌صورت زیر قابل تبدیل می‌باشد:

$$u_i(k) = \begin{cases} k_1 \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) + k_1 \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} \tilde{x}_j(k) \\ - k_1 d_i \tilde{x}_i(k) + u_i^*(k), & i \in G_1 \\ k_1 \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} \tilde{x}_j(k) + k_1 \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) \\ - k_1 d_i \tilde{x}_i(k) + u_i^*(k), & i \in G_2 \end{cases} \quad (28)$$

اکنون رابطه (۲۸)، به‌شکل زیر قابل بازنویسی است:

که  $\underline{x}(0)$  بردار حالت اولیه و  $X(z)$ ، تبدیل Z بردار  $\underline{x}(k)$  می‌باشند. اکنون، با گرفتن تبدیل از طرفین رابطه (۹) و با توجه به رابطه (۲۰)، نتیجه می‌شود:

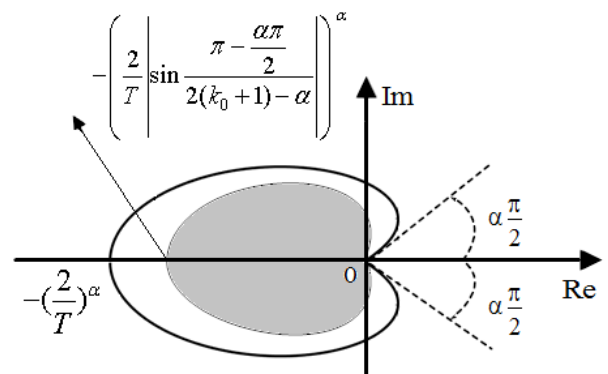
$$(T^{-\alpha} z(1-z^{-1})^\alpha I - Fz^{-k_0})X(z) = T^{-\alpha} z(1-z^{-1})^\alpha \underline{x}(0) \quad (21)$$

که  $I$ ، یک ماتریس همبندی  $M \times M$  می‌باشد. اکنون مشخص است که با توجه به رابطه (۲۱)، شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم (۹)، آن است که تمام ریشه‌های معادله مشخصه زیر در داخل دایره واحد باشند:

$$\det(wI - F) = 0 \quad (22)$$

به‌قسمی که  $w = T^{-\alpha} z^{k_0+1} (1-z^{-1})^\alpha$ . اکنون مشخص است که  $w$  مقدار ویژه ماتریس  $F$  می‌باشد. لذا، با توجه به تذکر ۳ و رابطه (۱۷)، بدیهی است که شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم (۹)، برقراری رابطه (۱۸)، می‌باشد و قضیه، اثبات می‌شود.

ناحیه هاشورخورده نشان داده‌شده در شکل ۱، ناحیه پایداری سیستم (۹) را نشان می‌دهد. مشخص است که ناحیه پایداری نسبت به ناحیه پایداری سیستم بدون تاخیر (۵)، کوچکتر است و با افزایش میزان تاخیر، ناحیه پایداری کوچکتر می‌شود.



شکل ۱: ناحیه پایداری برای سیستم مرتبه‌کسری زمان گسسته (۹)

#### ۲-۴-۲ اجماع گروهی مبتنی بر رهبر سیستم‌های چندعاملی

##### مرتبه‌کسری زمان گسسته با تاخیر زمانی با دوگروه

دینامیک تمامی عامل‌ها، به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌است:

$$\Delta_T^\alpha x_i(k+1) = u_i(k - k_0), \quad i = 1, \dots, n+m \quad (23)$$

به‌قسمی که  $x_i(k)$  و  $u_i(k)$ ، به‌ترتیب موقعیت و سیگنال کنترلی عامل  $i$  در زمان  $k$  می‌باشند و  $k_0$ ، میزان تاخیر ورودی عامل‌ها می‌باشد و  $\alpha \in (0, 1]$  در نظر گرفته می‌شود. دینامیک رهبر، به‌صورت زیر فرض شده‌است:

$$\Delta_T^\alpha x_j^*(k+1) = u_j^*(k - k_0), \quad j = 1, 2 \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)،  $x_j^*(k)$ ، موقعیت رهبر گروه  $j$  ام در لحظه  $k$  می‌باشد. همچنین،  $u_j^*(k)$ ، سیگنال کنترلی رهبر  $j$  ام در لحظه  $k$  می‌باشد.

از طرف دیگر با فرض صادق بودن فرض‌های ۱ تا ۴ و با توجه به لم ۱، تمامی مقادیر ویژه  $\mu_i$  غیر صفر بوده و دارای قسمت حقیقی مثبت می‌باشند. یا در واقع  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(\mu_i) \leq \frac{\pi}{2}$  می‌باشد.

اکنون، با در نظر گرفتن  $k_1 > 0$ ، فاز مقادیر ویژه برابر است با:

$$\varphi_i = \arg(\lambda_i) = \arg(-k_1 \mu_i) = \pi + \arg(\mu_i) \quad (۳۵)$$

بنا بر این  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_i \leq \frac{3\pi}{2}$  می‌باشد. لذا با فرض  $\alpha \in (0, 1]$

$\varphi_i \in \left[ \frac{\alpha\pi}{2}, 2\pi(k_0+1) - \frac{\alpha\pi}{2} \right]$  می‌باشد. یا در واقع، شرط زاویه برای

پایداری مجانبی سیستم (۳۲) که در قضیه ۱، مطرح شده است، صادق می‌باشد. اکنون کفایت شرط اندازه براساس رابطه‌ی (۱۸) برای مقادیر ویژه  $(\lambda_i, i = 1, \dots, n+m)$  برقرار شود. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$|-\mu_i k_1| < \left( \frac{2}{T} \left| \sin \frac{\pi + \varphi_i - \frac{\alpha\pi}{2}}{2(k_0+1) - \alpha} \right| \right)^\alpha, i = 1, \dots, n+m \quad (۳۶)$$

با توجه به رابطه (۳۶)، می‌توان نوشت:

$$k_1 < \left( \frac{\left( \frac{2}{T} \right)^\alpha \left| \sin \frac{\pi}{2} (2-\alpha) + \varphi_i \right|^\alpha}{|\mu_i|} \right), i = 1, \dots, n+m \quad (۳۷)$$

با توجه به رابطه (۳۷)، می‌توان رابطه (۳۳) را نتیجه گرفت و قضیه اثبات است.

#### ۴-۳- اجماع گروهی مبتنی بر رهبر سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری زمان گسسته با تاخیر زمانی با تعداد دلخواهی گروه

در حالت کلی، یک سیستم چندعاملی متشکل از  $N$  عامل و  $p$  گروه و  $p$  رهبر را در نظر بگیرد. در واقع، شبکه ارتباطی، متشکل از زیرشبکه‌های ارتباطی  $G_h = (S_h, E_h, A_h), h = 1, \dots, p$  می‌باشد. ماتریس  $A_h$ ، بیانگر میزان ارتباط عامل‌ها با یکدیگر در زیرشبکه ارتباطی  $G_h$  می‌باشد. رهبر در زیرشبکه ارتباطی  $G_h$  با  $s_h^*$  بیان شده است. میزان ارتباط عامل‌ها با رهبرها در کل شبکه ارتباطی با ماتریس  $D = \text{diag}(D_1, \dots, D_p)$  نمایش داده می‌شود به قسمی که ماتریس  $D_h, D_h$  بیانگر میزان ارتباط عامل‌های زیرگروه  $G_h$  با رهبر  $s_h^*$  می‌باشد. فرض کنید، فرض ۱، کماکان برقرار باشند. اکنون، فرض‌های ۲ و ۳ و ۴، که محدودیت‌های لازم در شبکه ارتباطی برای اثبات اجماع گروهی را توصیف می‌کنند به ترتیب به صورت فرض‌های ۵ و ۶ و ۷، ذکر شده در زیر، قابل تعمیم می‌باشند:

$$u_i(k) = \begin{cases} k_1 \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) + k_1 \tilde{x}_i(k) \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} - k_1 d_i \tilde{x}_i(k) + k_1 \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) + u_i^*(k), i \in G_1 \\ k_1 \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) + k_1 \tilde{x}_i(k) \sum_{j \in N_{1i}} a_{ij} - k_1 d_i \tilde{x}_i(k) + k_1 \sum_{j \in N_{2i}} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) + u_i^*(k), i \in G_2 \end{cases} \quad (۲۹)$$

اکنون با توجه به فرض ۲، رابطه (۲۹) به صورت زیر قابل بیان است:

$$u_i(k) = k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{x}_j(k) - \tilde{x}_i(k)) - k_1 d_i \tilde{x}_i(k) + u_j^*(k), i \in G_l, l = 1, 2 \quad (۳۰)$$

در رابطه (۳۰)،  $N_i = N_{1i} \cup N_{2i}$  می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۳۰) در (۲۶)، می‌توان نوشت:

$$\Delta_T^\alpha \tilde{x}_i(k+1) = k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{x}_j(k-k_0) - \tilde{x}_i(k-k_0)) - k_1 d_i \tilde{x}_i(k-k_0) \quad (۳۱)$$

اکنون با توجه به تعریف ماتریس‌های  $D, L$  و  $H$ ، رابطه (۳۱)، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\Delta_T^\alpha \tilde{x}(k+1) = -k_1 H \tilde{x}(k-k_0) \quad (۳۲)$$

به گونه‌ای که  $\tilde{x}(k) = [\tilde{x}_1(k), \dots, \tilde{x}_n(k), \tilde{x}_{n+1}(k), \dots, \tilde{x}_{n+m}(k)]^T$  لذا، اجماع گروهی مبتنی بر رهبر در سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری زمان گسسته توصیف شده با روابط (۲۳) و (۲۴)، وابسته به پایداری مجانبی سیستم مرتبه کسری زمان گسسته (۳۲)، می‌باشد.

**قضیه ۲:** با فرض تحقق فرض‌های ۱ تا ۴، شرط لازم و کافی برای اجماع گروهی سیستم چندعاملی توصیف شده با روابط (۲۳) و (۲۴)، به صورت زیر می‌باشد:

$$0 < k_1 < \frac{2^\alpha}{T^\alpha} \min \left( \frac{\left| \sin \frac{\pi}{2} (2-\alpha) + \arg(\mu_i) \right|^\alpha}{|\mu_i|} \right), \quad (۳۳)$$

$i = 1, \dots, n+m$

به قسمی که  $\mu_i, i = 1, \dots, n+m$  مقادیر ویژه ماتریس  $H$  می‌باشند.

**اثبات:** مقادیر ویژه ماتریس فضای حالت سیستم (۳۲)  $(\lambda_i, i = 1, \dots, n+m)$  به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\lambda_i = -k_1 \mu_i, \quad i = 1, \dots, n+m \quad (۳۴)$$

$$J = \sum_{k=k_0}^{N_s-1} \sum_{i=1}^N \{ \tilde{x}_i^2(k+1) + \gamma u_i^2(k - k_0) \} \quad (42)$$

به‌قسمی که  $\gamma$ ، یک ضریب وزنی می‌باشد که کوچک‌تر بودن آن، نشان‌دهنده اهمیت بیشتر کیفیت پاسخ در مقایسه با هزینه کنترلی می‌باشد. همچنین،  $N_s$ ، زمان نشست پاسخ یا زمان تقریبی رسیدن به اجماع گروهی می‌باشد که با سعی و خطا تعیین می‌شود. در واقع یک مساله بهینه‌سازی با محدودیت، برای کمینه‌کردن شاخص عملکرد (۴۲)، تحت قید (۳۳) برای انتخاب بهره کنترلی بهینه، بایستی حل شود. در این مقاله از دستور FMINCON نرم افزار مطلب برای حل مساله بهینه‌سازی مذکور، استفاده شده‌است.

### ۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، صحت الگوریتم پیشنهادی در قالب دو مثال عددی، نشان داده شده‌است.

**مثال ۱:** شبکه ارتباطی جهت‌دار  $G$  متشکل از هفت عامل، در شکل ۲ را در نظر بگیرید. عامل‌های  $s_1 - s_3$  و  $s_4 - s_7$  به ترتیب متعلق به زیر شبکه‌های ارتباطی  $G_1$  و  $G_2$  می‌باشند. همچنین  $s_1^*$  و  $s_2^*$  به ترتیب برای این زیر شبکه‌های ارتباطی به‌عنوان رهبر در نظر گرفته شده‌اند. عامل‌های  $s_1$  و  $s_4$  عامل‌های متقابل بوده و بطور مستقیم با رهبر گروه خود در ارتباط هستند همچنین فرض‌های ۳ و ۲ در شبکه ارتباطی  $G$  صادق می‌باشند. دینامیک عامل‌ها و رهبرها به‌صورت تک‌انتگرال‌گیر مرتبه‌کسری گسسته و مطابق روابط (۲۳) و (۲۴) در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به ارتباط بین عامل‌ها و رهبرها با یکدیگر، ماتریس لاپلاسی  $L$  و ماتریس  $D$  به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**فرض ۵:** ارتباط بین تمام گروه‌ها، متعادل می‌باشد. یعنی:

$$\sum_{j \in G_r} a_{ij} = 0, i \in G_h, h \neq r, h, r = 1, \dots, p \quad (38)$$

**فرض ۶:** میزان ارتباط هر عامل با عامل‌های گروه‌های دیگر همواره کمتر از میزان ارتباط با رهبر خود می‌باشد. یعنی:

$$\sum_{j \in G_r} |a_{ij}| \leq d_i, i \in G_h, h \neq r, h, r = 1, \dots, p \quad (39)$$

**فرض ۷:** ماتریس لاپلاسی  $(L)$  شبکه ارتباطی، دقیقاً دارای  $p$  مقدار ویژه صفر با بلوک‌های جردن  $1 \times 1$  بوده و تمامی مقادیر ویژه دیگر آن، دارای بخش حقیقی مثبت می‌باشند.

با فرض برقراری فرض‌های ۱ و ۵ و ۶ و ۷، در مرجع [39] نشان داده شده‌است که لم ۱، در یک شبکه ارتباطی چندگروهی نیز، صادق می‌باشد.

اکنون، فرض کنید دینامیک عامل‌ها با معادله (۲۳) که در آن  $i = 1, \dots, N$  می‌باشد، توصیف شوند. همچنین، فرض کنید، رهبرهای تمام  $p$  گروه، با معادله (۲۴)، توصیف شوند، با این تفاوت که  $j = 1, \dots, p$  می‌باشد. آنگاه تعریف ۲، به‌صورت زیر، قابل بازنویسی می‌باشد:

**تعریف ۳:** اجماع گروهی مبتنی بر رهبر برای یک سیستم چندگروهی، حاصل می‌شود اگر و تنها اگر:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x_h^*(k)\| = 0, i \in G_h, h = 1, \dots, p \quad (40)$$

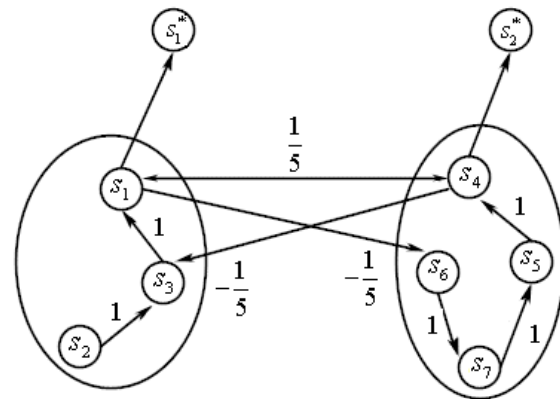
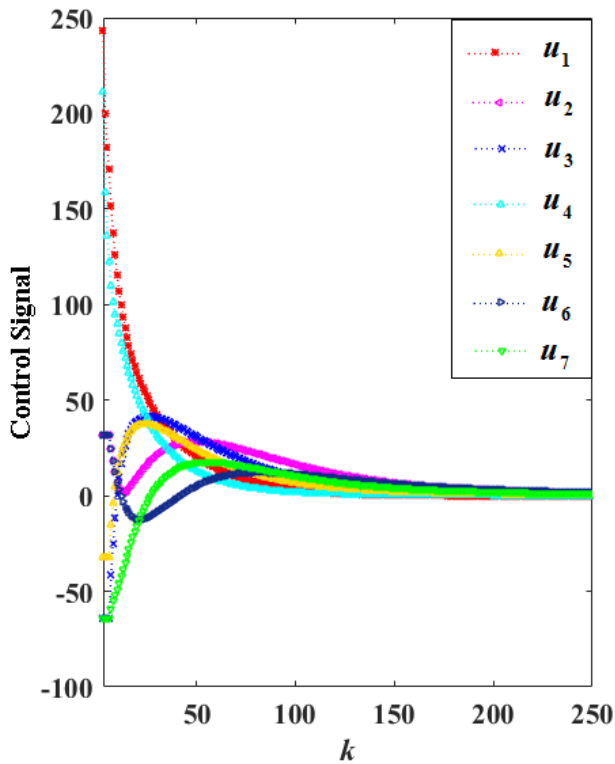
اکنون، فرض کنید سیگنال کنترلی برای تمامی عامل‌ها به صورت زیر، تعریف شود:

$$u_i(k) = k_1 \sum_{j \in N_{hi}} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)) + k_1 \sum_{j \in N_{hi}, r \neq h} a_{ij} x_j(k) + k_1 d_i (x_h^*(k) - x_i(k)) + u_h^*(k), i \in G_h, h = 1, \dots, p \quad (41)$$

به‌قسمی که  $N_{hi} = \{s_j \in S_h : (s_i, s_j) \in E\}$  می‌باشد. اکنون، اگر خطای تعقیب کنندگی هر عامل به‌صورت  $\tilde{x}_i(k) = x_i(k) - x_h^*(k), i \in G_h, h = 1, \dots, p$  می‌توان نشان داد که دینامیک خطای عامل‌ها، کماکان از رابطه (۳۲)، تبعیت خواهد کرد به‌قسمی که  $\tilde{x}(k) = [\tilde{x}_1(k), \dots, \tilde{x}_N(k)]^T$  می‌باشد. اکنون، مشخص است که با توجه به قضیه ۲، شرط لازم و کافی برای اجماع گروهی مبتنی بر رهبر، همان شرط (۳۳) می‌باشد با این تفاوت که  $i = 1, \dots, N$  می‌باشد.

**تذکر ۴:** رابطه (۳۳)، محدوده مجاز بهره کنترلی  $k_1$  برای دستیابی به اجماع گروهی مبتنی بر رهبر را نشان می‌دهد. برای دستیابی به یک پاسخ گذرای مطلوب و یک هزینه کنترلی مناسب، می‌توان با کمینه‌کردن شاخص عملکرد زیر که با  $J$ ، نمایش داده شده است، مقدار بهینه این پارامتر را تعیین نمود:

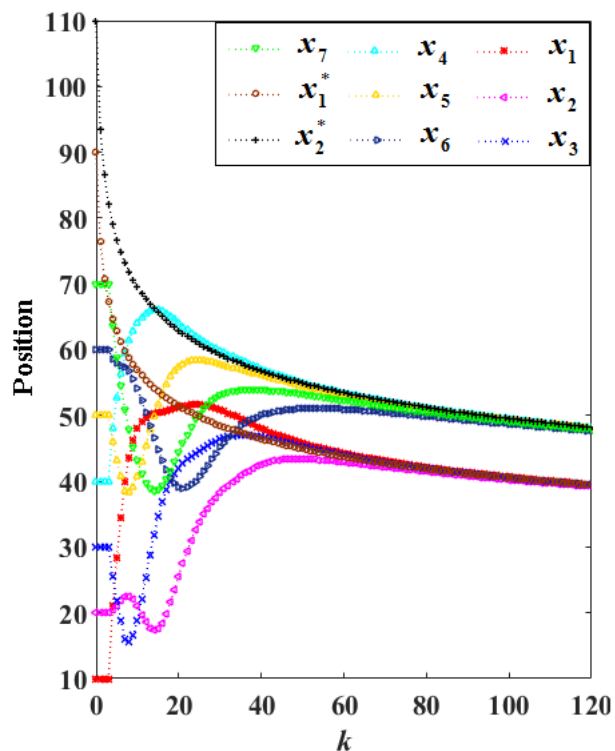




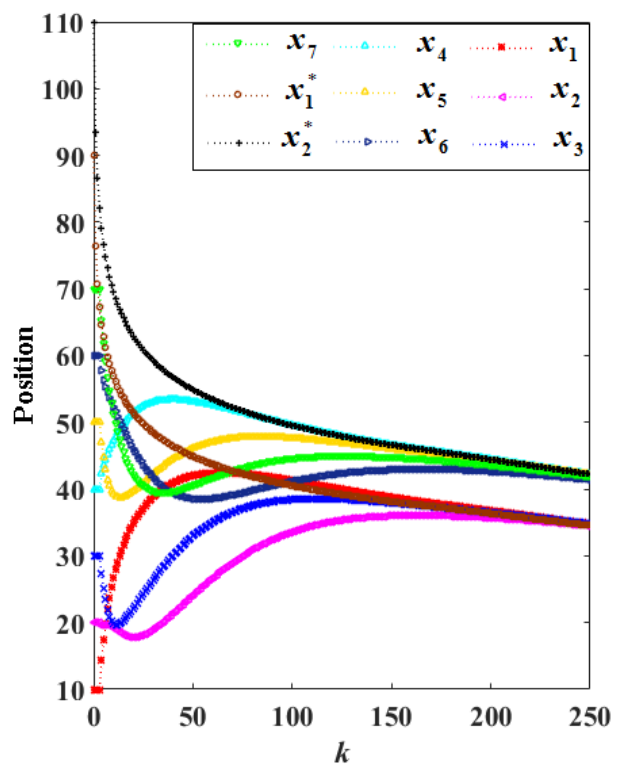
شکل ۲: شبکه ارتباطی جهت‌دار مثال ۱

مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین به صورت  $0, 0, 1, 0.4832, 0.4171, 0.4278 \pm 0.499i$  می‌باشند. بنابراین، فرض ۴ در نظر گرفته شده است (بلوک‌های جردن متناظر با مقادیر ویژه صفر،  $1 \times 1$  هستند). با در نظر گرفتن  $\alpha = 0.185$  و  $T = 0.1$  و  $k_0 = 3$ ، حدود بهره کنترلی به صورت  $0 < k_1 < 16/46$  حاصل شده است.

شکل ۴: سیگنال کنترلی عامل‌ها در مثال ۱ به ازای  $\gamma = 0.1$



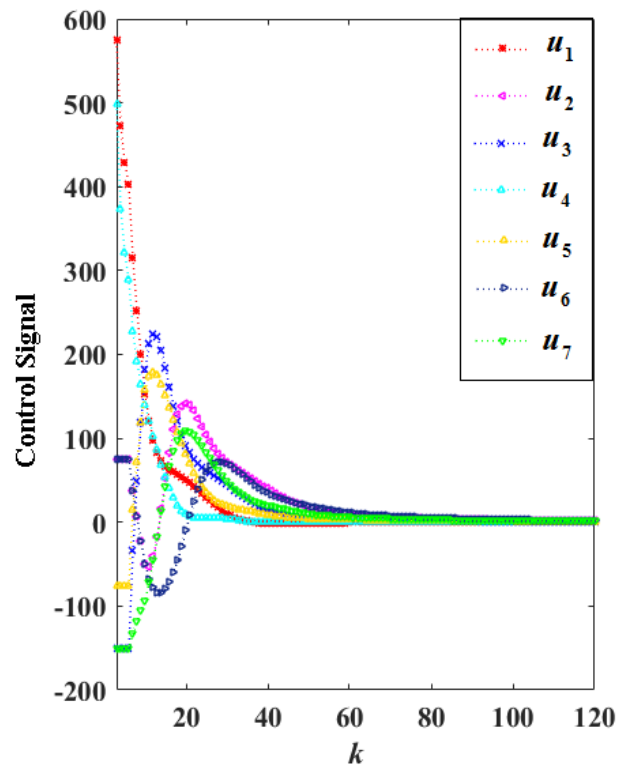
شکل ۵: موقعیت عامل‌ها و رهبرها در مثال ۱ به ازای  $\gamma = 0.1$



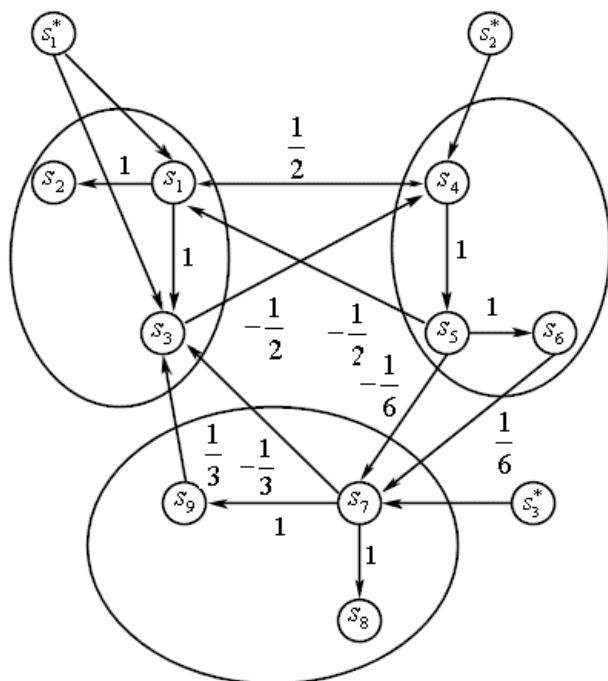
شکل ۳: موقعیت عامل‌ها و رهبرها در مثال ۱ به ازای  $\gamma = 0.1$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



شکل ۶: سیگنال کنترلی عامل‌ها در مثال ۱ به‌ازای  $k_1 = 7/5621$  و  $\gamma = 0.1$



شکل ۷: شبکه ارتباطی جهت‌دار مثال ۲

دینامیک عامل‌ها و رهبرها به‌صورت روابط (۲۳) و (۲۴)، در نظر گرفته‌شده‌اند. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین، به‌صورت  $0, 0, 0, i, 0/1433 \pm 0/6181i, 0/1433 \pm 0/1433i, 1/3819 \pm 0/1433i$  و ۱ می‌باشند. ضمناً، فرض ۷، صادق می‌باشد. با در نظر گرفتن  $\alpha = 0.95$  و  $T = 0.1$  و  $5 < k_1 < 10/91$  حاصل شده‌است.

مقادیر اولیه برای حالت‌های عامل‌ها و رهبر به‌صورت  $x_1^*(0) = 90, x_2^*(0) = 110, x_3^*(0) = 30, x_4^*(0) = 40, x_5^*(0) = 50, x_6^*(0) = 60, x_7^*(0) = 70$  در نظر گرفته‌شده‌اند. اکنون با فرض  $\gamma = 0.1$  و حل مسأله بهینه‌سازی (۴۲)، مقدار  $k_1 = 7/5621$  حاصل شده‌است. موقعیت عامل‌ها و رهبرها در شکل ۳، رسم شده‌است. همان‌طور که مشخص است، موقعیت عامل‌ها به‌موقعیت رهبرهای متناظر خود همگرا شده و اجماع صورت گرفته‌است. ضمناً، عامل‌های ۱ و ۴، به‌دلیل ارتباط مستقیم با رهبر و ارتباط بیشتر با سایر عامل‌ها، سریعتر به رهبر متناظر خود همگرا شده‌اند. همچنین، سیگنال کنترلی عامل‌ها در شکل ۴، نمایش داده شده‌است. با فرض  $\gamma = 0.1$ ، بهره کنترلی بهینه  $k_1 = 7/5621$  حاصل شده‌است. موقعیت عامل‌ها و رهبرها در شکل ۵ و سیگنال‌های کنترلی در شکل ۶، رسم شده‌اند. مشخص است که سرعت همگرایی عامل‌ها به رهبرهای متناظرشان، افزایش یافته‌است ولی، دامنه سیگنال‌های کنترلی، افزایش یافته‌اند.

**مثال ۲:** شبکه ارتباطی جهت‌دار  $G$  متشکل از نه عامل و سه گروه، در شکل ۷، نشان داده شده‌است. عامل‌های  $s_1 - s_3$  و  $s_4 - s_6$  و  $s_7 - s_9$ ، به‌ترتیب متعلق به زیر-شبکه‌های ارتباطی  $G_1$  و  $G_2$  و  $G_3$  می‌باشند. همچنین  $s_1^*$  و  $s_2^*$  و  $s_3^*$ ، به‌ترتیب رهبر زیر-شبکه‌های ارتباطی ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. عامل‌های  $s_1, s_3, s_4, s_7$  دارای مسیری به تمام عامل‌های دیگر بوده و به‌طور مستقیم با رهبر گروه خود در ارتباط می‌باشند و فرض‌های ۵ و ۶ در شبکه ارتباطی  $G$  منظور شده‌اند. ماتریس‌های  $L$  و  $D$ ، به‌صورت زیر تعیین شده‌اند:

و رهبرها در شکل ۸، نمایش داده شده است. اجماع گروهی عامل‌ها با توجه به این شکل، مشخص می‌باشد. ضمناً، عامل‌های ۱ و ۴ و ۷، به دلیل ارتباط مستقیم با رهبر و عامل ۳ به دلیل ارتباط بیشتر با سایر عامل‌ها، با سرعت بیشتری به رهبر متناظر خود همگرا شده‌اند. شکل ۹، نیروهای کنترلی وارده بر عامل‌ها را نشان می‌دهد.

### ۶- کاربرد اجماع مبتنی بر رهبر سیستم‌های چندعاملی مرتبه کسری زمان گسسته

در این بخش، یک مثال برای کاربرد اجماع مبتنی بر رهبر سیستم‌های چندعاملی برای بهینه‌سازی مصرف انرژی در ساختمان‌ها ارائه شده است. ساختمانی را در نظر بگیرید که شامل  $N$  اتاق می‌باشد و هر اتاق شامل دیوارها، سقف، پنجره‌ها و درب ورودی می‌باشد. با در نظر گرفتن ساختمان به عنوان یک سیستم چندعاملی، هر اتاق به عنوان یک عامل در نظر گرفته شده است. فرض کنید دمای هوای داخل اتاق  $i$  ام یا  $\theta_i$  با حجم  $V_i$ ، یکنواخت باشد ( $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ). اگر میزان توان حرارتی منتقل شده به اتاق توسط رادیاتور یا وسایل گرمایی دیگر با  $Q_i^{in}$  و میزان توان حرارتی خارج شده از اتاق توسط انتقال حرارت دیوارها و تهویه را با  $Q_i^{out}$  نشان داده شود، آنگاه، تغییرات دما در اتاق  $i$  ام، به صورت زیر قابل بیان می‌باشد [45]:

$$c\rho V_i D_i^\alpha \theta_i = Q_i^{in}(t) - Q_i^{out}(t), \quad \theta_i(0) = \theta_i^0 \quad (45)$$

به قسمی که  $c$ ، ظرفیت حرارتی ویژه هوا و  $\rho$ ، چگالی هوا می‌باشد. همچنین  $\alpha \in (0, 1]$  مرتبه مشتق کسری و  $\theta_i^0$ ، دمای اولیه اتاق  $i$  ام می‌باشند.

توان حرارتی خروجی از هر اتاق به صورت زیر، قابل بیان می‌باشد [45]:

$$Q_i^{out}(t) = Q_i^{ec}(t) + Q_i^{ve}(t) \quad (46)$$

به قسمی که  $Q_i^{ec}(t)$ ، مرتبط با میزان تلفات حرارتی توسط انتقال حرارت دیوارها، پنجره‌ها، درب و سقف اتاق می‌باشد. همچنین،  $Q_i^{ve}(t)$  بیانگر تلفات حرارتی توسط سیستم تهویه اتاق می‌باشد.

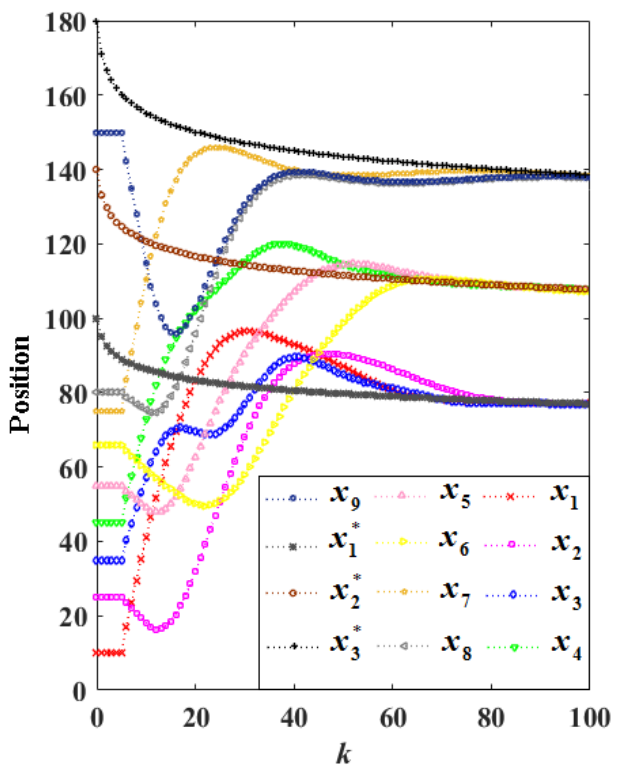
توان حرارتی تلف شده توسط انتقال حرارت در اتاق  $i$  ام، به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد [45]:

$$Q_i^{ec}(t) = \sum_{j=1}^n A_{i,j} U_{i,j} (\theta_i(t) - \theta_j(t)) \quad (47)$$

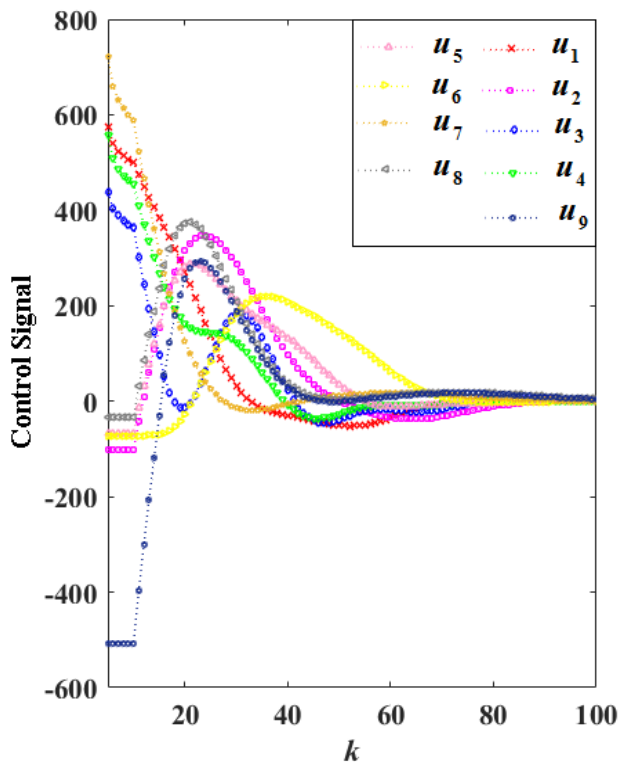
به گونه‌ای که  $A_{i,j}$ ، مساحت سطح در معرض بین اتاق  $i$  ام و اتاق  $j$  ام بوده و  $U_{i,j}$  ضریب انتقال حرارت کل متناظر با سطح  $A_{i,j}$  می‌باشد. همچنین  $j=0$  و  $j=-1$  به ترتیب بیانگر عامل‌های زمین و محیط بیرون بوده که به عنوان دیگر عامل‌های تبادل حرارت با اتاق‌ها در نظر گرفته می‌شوند.

توان حرارتی اتلافی ناشی از تهویه به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد [45]:

$$Q_i^{ve}(t) = (1 - \beta) c \rho q_i (\theta_i(t) - \theta_0(t)) \quad (48)$$



شکل ۸: موقعیت عامل‌ها و رهبرها در مثال ۲



شکل ۹: سیگنال کنترلی عامل‌ها در مثال ۲

همچنین مقادیر اولیه برای حالت‌های عامل‌ها و رهبر به صورت  $100$   $x_1(0) = 35$ ،  $x_2(0) = 25$ ،  $x_3(0) = 10$ ،  $x_3^*(0) = 180$ ،  $x_2^*(0) = 140$ ،  $x_1^*(0) = 80$ ،  $x_7(0) = 75$ ،  $x_6(0) = 66$ ،  $x_5(0) = 55$ ،  $x_4(0) = 45$ ،  $x_3(0) = 150$ ،  $x_8(0) = 150$ ،  $x_9(0) = 150$  در نظر گرفته شده‌اند. با فرض  $\gamma = 0.1$ ، با استفاده از بهینه‌سازی،  $k_1 = 6/7541$  حاصل شده است. موقعیت عامل‌ها

$$\Delta_T^\alpha \theta_1^*(k+1) = u_1^*(k) \quad (54)$$

اکنون، اگر اختلاف دمای اتاق‌ها با دمای اتاق رهبر، به صورت  $\tilde{\theta}_i(k) = \theta_i(k) - \theta_1^*(k)$ ،  $i=1, \dots, N$  دمای تمامی اتاق‌ها به دمای اتاق رهبر، سیگنالهای کنترلی  $u_i(k)$  متناظر با هر اتاق به گونه‌ای تعیین شود که رابطه‌ی برقرار باشد. لذا، برای دستیابی به اجماع، سیگنال کنترلی برای هر اتاق، به صورت زیر فرض شده است:

$$u_i(k) = k_1 \sum_{j=1}^N A_{i,j} U_{i,j} (\theta_j(k) - \theta_1^*(k)) + \quad (55)$$

$$k_1 A_{i,1}^* U_{i,1}^* (\theta_1^*(k) - \theta_1(k)) + u_1^*(k)$$

به گونه‌ای که  $k_1$  بهره کنترلی می‌باشد.

در واقع، نقش  $A_{i,j} U_{i,j}$  در رابطه (۲۷) و  $A_{i,1}^* U_{i,1}^*$  نقش  $d_i$  در رابطه (۲۷) را دارا می‌باشند. مشخص است که اگر اتاق  $i$  ام با اتاق رهبر در ارتباط نباشد،  $d_i$  برابر صفر است. بایستی دمای تمام اتاق‌ها مقدار ثابتی داشته باشد، لذا سیگنال کنترلی رهبر یا  $u_1^*(k)$  برای دستیابی به دمای مطلوب و ثابت  $\theta_d$ ، به صورت زیر، اختیار شده است:

$$u_1^*(k) = T^{-\alpha} \left( \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \theta_d - \mu 2^\alpha \tilde{\theta}^*(k) \right) \quad (56)$$

به قسمی که  $\tilde{\theta}^*(k)$  بیانگر میزان خطای دمای اتاق رهبر از دمای مطلوب بوده و به صورت  $\tilde{\theta}^*(k) = \theta_1^*(k) - \theta_d$  تعریف شده است و  $\mu$  یک عدد مثبت بین صفر و یک می‌باشد. اکنون با جایگزینی رابطه (۵۶) در (۵۴) و با توجه به تعریف  $\tilde{\theta}^*(k)$  و رابطه (۶)، نتیجه می‌شود:

$$\Delta_T^\alpha \tilde{\theta}^*(k+1) = -\mu \left( \frac{2}{T} \right)^\alpha \tilde{\theta}^*(k) \quad (57)$$

اکنون، مشخص است که مقدار ویژه سیستم (۵۷) در ناحیه هاشورخورده در شکل ۱، قرار گرفته است و با توجه به قضیه ۱، سیستم (۵۷)، پایدار مجانبی بوده و  $\tilde{\theta}^*(k)$  به سمت صفر میل خواهد کرد یا در واقع  $\theta_1^*(k)$ ، به سمت  $\theta_d$  میل خواهد نمود. ضمناً پارامتر  $\mu$ ، سرعت همگرایی را تعیین می‌کند.

اکنون با توجه به آنچه در فصل چهارم بیان شد و با توجه به روابط (۵۳) و (۵۴) و (۵۵) می‌توان نوشت:

$$\Delta_T^\alpha \tilde{\theta}(k+1) = -k_1 H \tilde{\theta}(k) \quad (58)$$

به گونه‌ای که  $\tilde{\theta}(k) = [\tilde{\theta}_1(k), \dots, \tilde{\theta}_N(k)]^T$ . لذا، تنظیم دمای تمامی اتاق‌ها به دمای مطلوب در سیستم چندعاملی مرتبه کسری زمان گسسته توصیف شده با روابط (۴۹) و (۵۰)، منوط به پایداری مجانبی سیستم مرتبه کسری زمان گسسته (۵۸)، می‌باشد با انتخاب پارامتر کنترلی  $k_1$  از بازه نمایش داده شده در (۳۳) با فرض  $k_0 = 0$  این امر تحقق می‌یابد.

به گونه‌ای که  $q_i$ ، دبی حجمی هوا در اتاق  $i$  ام و  $\beta$  راندمان بازیابی حرارتی می‌باشد و  $\theta_0(t)$ ، دمای هوای محیط بیرون اتاق می‌باشد.

بنابراین الگوی تغییرات دما در ساختمان‌ها با مدل مرتبه کسری از ترکیب روابط (۴۵) الی (۴۸) حاصل می‌شود. اکنون با توجه به پژوهش انجام شده در این مقاله که در زمینه اجماع مبتنی بر رهبر در سیستم‌های چندعاملی با دینامیک مرتبه کسری در حوزه گسسته بوده می‌توان سیستم چندعاملی مذکور در [45] را با هدف تنظیم دمای تمامی اتاق‌ها به دمای مطلوب مورد بررسی قرار داد. در واقع، معادله (۴۵) در حوزه گسسته بازنویسی شده و یکی از عامل‌ها به عنوان رهبر در نظر گرفته شده که هدف از این سیستم چندعاملی رسیدن دمای تمامی اتاق‌ها به دمای اتاق مورد نظر به عنوان رهبر می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطه (۶)، مدل گسسته رابطه (۴۵)، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$c \rho V_i \Delta_T^\alpha \theta_i(k+1) = Q_i^{in}(k) - Q_i^{out}(k), \quad \theta_i(0) = \theta_i^0 \quad (49)$$

در واقع در رابطه (۴۹)،  $Q_i^{in}(k)$ ، سیگنال کنترلی هر عامل می‌باشد. با توجه به مثال مذکور در [45] تعداد گروه‌های عامل‌ها، برابر یک در نظر گرفته شده است و میزان تاخیر  $k_0$  نیز برابر صفر اختیار شده است.

ضمناً، مدل گسسته تغییرات دمای اتاق در نظر گرفته شده به عنوان رهبر با توجه به معادلات (۲۴) و (۴۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$c \rho V_1^* \Delta_T^\alpha \theta_1^*(k+1) = Q_1^{*in}(k) - Q_1^{*out}(k), \quad \theta_1^*(0) = \theta_1^{*0} \quad (50)$$

به گونه‌ای که  $Q_j^{*in}(k)$  به عنوان سیگنال کنترلی رهبر یا توان حرارتی منتقل شده به اتاق رهبر می‌باشد و  $\theta_1^*(k)$ ، دمای هوای داخل اتاق رهبر و  $V_1^*$ ، حجم هوای داخل اتاق رهبر می‌باشد. همچنین،  $Q_1^{*out}(k)$  توان حرارتی خارج شده از اتاق رهبر و  $\theta_1^{*0}$ ، دمای اولیه اتاق رهبر می‌باشند.

در ابتدا، برای اینکه معادلات (۴۹) و (۵۰) به فرم معادلات (۲۳) و (۲۴)، تبدیل شود، سیگنالهای کنترلی  $Q_i^{in}(k)$  و  $Q_1^{*in}(k)$  به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$Q_i^{in}(k) = \sum_{j=1}^n A_{i,j} U_{i,j} (\theta_j(k) - \theta_j(k)) + \quad (51)$$

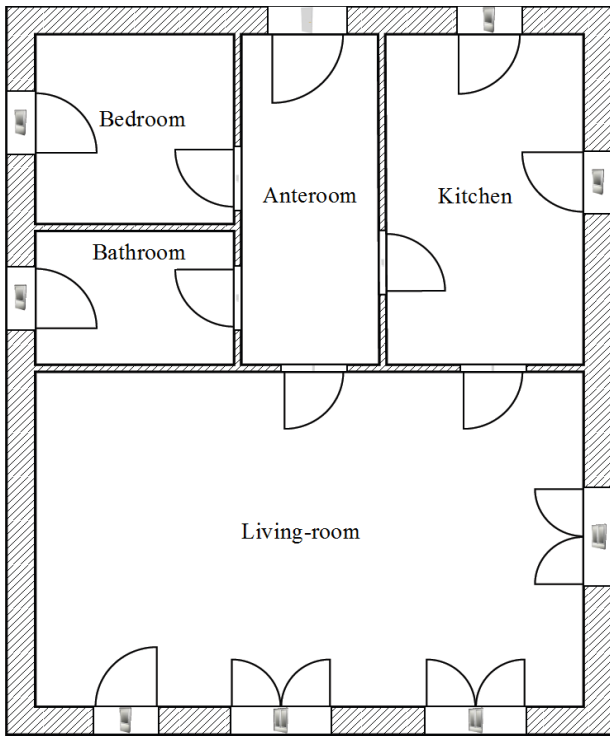
$$(1 - \beta) c \rho q_i (\theta_i(k) - \theta_0(k)) + c \rho V_i u_i(k)$$

$$Q_1^{*in}(k) = \sum_{j=1}^n A_{1,j}^* U_{1,j}^* (\theta_j^*(k) - \theta_j(k)) + \quad (52)$$

$$(1 - \beta) c \rho q_1^* (\theta_1^*(k) - \theta_0(k)) + c \rho V_1^* u_1^*(k)$$

به قسمی که  $u_i(k)$  و  $u_1^*(k)$  سیگنالهای کنترلی مناسبی هستند که در ادامه تعیین خواهند شد. با جایگذاری روابط (۵۱) و (۵۲)، در روابط (۴۹) و (۵۰) و با توجه به روابط مربوط به محاسبه توان حرارتی خروجی اتاقها، می‌توان نوشت:

$$\Delta_T^\alpha \theta_i(k+1) = u_i(k) \quad (53)$$



شکل ۱۰: نقشه هوایی یک ساختمان نمونه [45]

جدول ۳: ضرایب انتقال حرارت مناظر با سطوح  $A_{ij}$

$U_{ij} [W/m^2K]$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	Leader
۱	۱۳۰	۱۲۷	۰	۱۸۰	۱۰۰	۰	۰
۲	۱۳۰	۱۳۰	۱۸۰	۰	۱۰۸	۰	۰/۸۰
۳	۱۳۰	۱۳۴	۱۰۰	۱۰۸	۰	۱۹۱	۱/۰۸
۴	۱۳۰	۱۲۸	۰	۰	۱۹۱	۰	۰/۹۹
Leader	۱۳۰	۱۳۰	۰	۱۸۰	۱۰۸	۱۹۹	۰

جدول ۴: حجم اتاق‌ها و دبی‌های حجمی مناظر

	۱	۲	۳	۴	Leader
$V_i [m^3]$	۱۸/۷۸	۱۳/۲۸	۲۳/۴۸	۳۲/۵۵	۹۱/۰۸
$q_i [m^3/h]$	۲۰	۵۰	۱۰	۷۰	۶۰

جدول ۵: مشخصات حرارتی دیگر ساختمان

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
ظرفیت حرارتی ویژه	$c$	۱۰۰۵	$J/(kg.K)$
چگالی هوا	$\rho$	۱/۲۰۵	$kg/m^3$
راندمان بازیابی حرارتی	$\beta$	۰/۸	-

اکنون، به‌عنوان مثال، نقشه هوایی یک ساختمان نمونه که در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌است را در نظر بگیرید [45]. همچنین تمامی پارامترهای ساختمان در جدول‌های ۱ تا ۵ مشخص شده‌اند.

الگوی تغییرات دمای هر اتاق توسط رابطه (۴۹) و با توجه به  $N=4$  قابل توصیف بوده و الگوی تغییرات دمای اتاق رهبر نیز توسط رابطه (۵۰) توصیف می‌شود. همچنین با توجه به اطلاعات ذکر شده در جدول‌های ۱ تا ۵، ماتریسهای  $L$  و  $D$ ، به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$L = \begin{pmatrix} 12.29 & -5.52 & -6.77 & 0 \\ -5.52 & 10.704 & -5.184 & 0 \\ -6.77 & -5.184 & 22.692 & -10.738 \\ 0 & 0 & -10.738 & 10.738 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.8013 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین، به‌صورت ۰، ۰/۱۷۹، ۰/۹۷۶۶، ۱۶/۲۶۸۴ می‌باشند. مرتبه مشتق کسری  $\alpha$  بیانگر ظرفیت حرارتی ساختمان می‌باشد و طبیعتاً باید با روش‌های شناسایی سیستم، تعیین شود. متأسفانه در [45]، مقدار این پارامتر ذکر نشده‌است. اکنون با فرض  $\alpha = 0/۸۵$  و زمان نمونه‌برداری  $T = 3 \text{ min}$  و  $k_0 = 0$ ، حدود بهره - کنترلی به‌صورت  $0 < k_1 < 0/۰۰۰۵۹۷۹$  حاصل شده‌است. همچنین دمای اولیه اتاق‌ها برحسب سانتی‌گراد به‌صورت  $\theta_1^*(0) = 26$ ،  $\theta_2(0) = 32$ ،  $\theta_3(0) = 24$ ،  $\theta_4(0) = 20$ ،  $\theta_0(0) = 19$ ،  $\theta_1(0) = 36$ ،  $\theta_4(0) = 0/5$  در نظر گرفته شده‌اند. با در نظر گرفتن  $k_1 = 0/۰۰۰۲۹۸۹$  و  $\mu =$  دمای تمامی اتاق‌ها در شکل ۱۱، نمایش داده شده‌است. اگر دمای مطلوب برابر  $\theta_d = 28^\circ C$  انتخاب شود، همان‌طوری که مشخص است، دمای تمامی اتاق‌ها به دمای مطلوب رسیده‌اند. شکل ۱۲، توان حرارتی وارده بر اتاق‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱: لیست تمامی اتاق‌ها و نمایه‌های مناظر با هریک

Room Name	Earth	Outer space	Bed room	Bath room	Anteroom	Kitchen	Living-room
Index	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	Leader

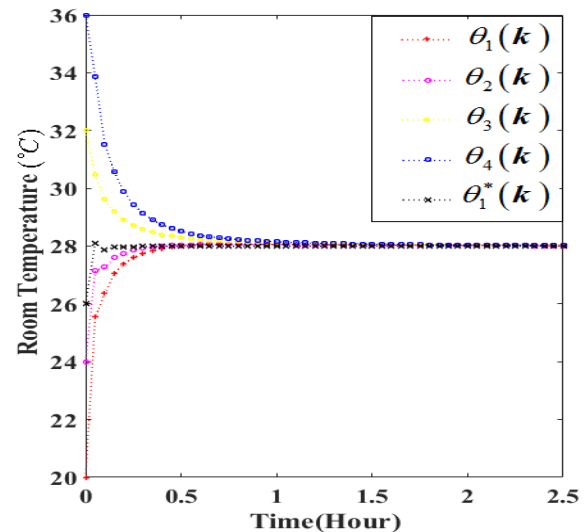
جدول ۲: مساحت ناحیه مشترک بین اتاق‌ها و فضای بیرونی و زمین

$A_{ij} [m^2]$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	Leader
۱	۷/۵۱	۲۱/۱۸	۰	۱/۹۰	۶/۷۷	۰	۰
۲	۵/۳۱	۱۰/۱۱	۱/۹۰	۰	۴/۸۰	۰	۶/۹۰
۳	۹/۳۹	۱۴/۱۴	۱/۷۷	۱/۸۰	۰	۱/۸۰	۴/۷۵
۴	۱/۰۲	۳/۰۷۳	۰	۰	۱/۸۰	۰	۶/۸۷
Leader	۳/۴۳	۷۹/۳۶	۰	۱/۹۰	۴/۷۵	۶/۸۷	۰

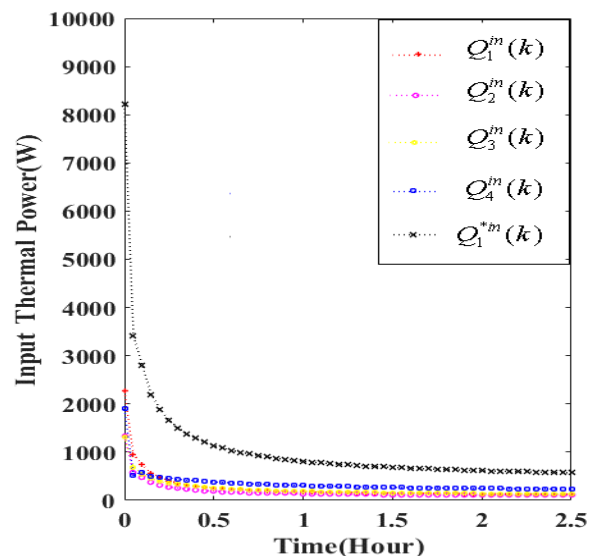
پژوهش آتی مد نظر قرار گیرد. حل مساله اجماع گروهی با در نظر گرفتن دینامیک دو انتگرال گیر مرتبه کسری برای هر عامل نیز می‌تواند به عنوان یک موضوع تحقیقاتی دیگر مطرح شود.

### مراجع

- [1] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric and A. Das, *Cooperative Control of Multi-agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*, Springer-Verlag, London, 2014.
- [2] C. G. Cassandras and W. Li, "Sensor networks and cooperative control," *European Journal of Control*, vol. 11, no. 4-5, pp. 436-463, 2005.
- [3] Z. Qu, J. Wang and R. A. Hull, "Cooperative control of dynamical systems with application to autonomous vehicles," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 4, pp. 894 – 911, 2008.
- [4] J. Ghommam, M. S. Mahmoud and M. Saad, "Robust cooperative control for a group of mobile robots with quantized information exchange," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 8, pp. 2291–2321, 2013.
- [5] W. Ni and D. Cheng, "Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies," *Systems & Control Letters*, vol. 59, no. 3-4, pp.209–217, 2010.
- [6] K. D. Do, "Formation control of multiple elliptical agents with limited sensing ranges," *Automatica*, vol. 48, no. 7, pp. 1330-1338, 2012.
- [7] R. Olfati-Saber, "Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401 – 420, 2006.
- [8] H. Y. Yang, X. L. Zhu and S. Y. Zhang, "Consensus of second-order delayed multi-agent systems with leader-following," *European Journal of Control*, vol. 16, no. 2, pp. 188-199, 2010.
- [9] W. Zhu and D. Cheng, "Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays," *Automatica*, vol. 46, no. 12, pp. 1994–1999, 2010.
- [10] S. Djaidja and Q. Wu, "Leader-following consensus of single-integrator multi-agent systems under noisy and delayed communication," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 14, no. 2, pp. 357-366, 2016.
- [11] D. Xie and S. Wang, "Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with fixed topology," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 387, no. 1, pp. 8–16, 2012.
- [12] H. Li, X. Liao and G. Chen, "Leader-following finite-time consensus in second-order multi-agent networks with nonlinear dynamics," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 422–426, 2013.
- [13] Y. Zhang and Y. Yang, "Finite-time consensus of second-order leader-following multi-agent systems without velocity measurements," *Physics Letters A*, vol. 377, no. 3-4, pp. 243–249, 2013.
- [14] T. A. Jesus, L. C. A. Pimenta, L. A. B. Torres and E. M. A. M. Mendes, "Consensus for double-integrator dynamics with velocity constraints," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 12, no. 5, pp. 930–938, 2014.
- [15] H. Hu, L. Yu, G. Chen and G. Xie, "Second-order consensus of multi-agent systems with unknown but bounded disturbance," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 258–267, 2013.
- [16] S. Yu and X. Long, "Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode," *Automatica*, vol. 54, pp. 158–165, 2015.
- [17] X. He and Q. Wang, "Distributed finite-time leaderless consensus control for double-integrator multi-agent systems with external disturbances," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 295, pp. 65–76, 2017.



شکل ۱۱: دمای تمامی اتاق‌ها و اتاق رهبر



شکل ۱۲: توان حرارتی وارده بر اتاق‌ها

### ۷- نتیجه گیری

در این مقاله، مساله اجماع گروهی مبتنی بر رهبر برای دسته خاصی از سیستم‌های چندعاملی با دینامیک مرتبه کسری در حوزه‌ی زمان گسسته، بررسی شده است. به گونه‌ای که ارتباط عامل‌ها با یکدیگر با یک شبکه ارتباطی جهت‌دار ثابت توصیف شده است. دینامیک عامل‌ها، به صورت انتگرال گیر مرتبه کسری گسسته در نظر گرفته شده است. سرانجام، محدوده‌ای برای بهره کنترلی هر عامل برای دستیابی به اجماع گروهی استخراج شده است. نتایج شبیه سازی بر روی مثال‌های عددی، صحت روش اجماع گروهی پیشنهادی را نشان می‌دهد. در نظر گرفتن تاخیر ارتباطی میان عامل‌ها و در نظر گرفتن محدودیت بر روی سیگنال کنترلی از دیگر مباحث تحقیقاتی آینده می‌باشند. در پژوهش حاضر، مرتبه مشتق عامل‌ها یکسان فرض شده است اما در نظر گرفتن عامل‌های نامتناجس با مرتبه کسری متفاوت، نیز می‌تواند به عنوان یک

- [32] X. Liu, Z. Zhang and H. Liu, "Consensus control of fractional-order systems based on delayed state fractional order derivative," *Asian Journal of Control*, doi: 10.1002/asjc.1493, 2017.
- [33] F. Wang and Y. Yang, "Leader-following exponential consensus of fractional order nonlinear multi-agents system with hybrid time-varying delay: A heterogeneous impulsive method," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 482, pp. 158-172, 2017.
- [34] J. Yu and L. Wang, "Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays," *Systems & Control Letters*, vol. 59, no. 6, pp. 340-348, 2010.
- [35] J. Yu and L. Wang, "Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange," *International Journal of Systems Science*, vol. 43, no. 2, pp. 334-348, 2012.
- [36] D. Xie, Q. Liu, L. Lv and S. Li, "Necessary and sufficient condition for the group consensus of multi-agent systems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 243, pp. 870-878, 2014.
- [37] G. Miao and Q. Ma, "Group consensus of the first-order multi-agent systems with nonlinear input constraints," *Neurocomputing*, vol. 161, pp. 113-119, 2015.
- [38] H. Xia and T. Huang, "Group consensus of multi-agent systems with communication delays," *Neurocomputing*, vol. 171, pp. 1666-1673, 2016.
- [39] Q. Cui, D. Xie and F. Jiang, "Group consensus tracking control of second-order multi agent systems with directed fixed topology," *Neurocomputing*, vol. 218, pp. 286-295, 2016.
- [40] Y. Gao, J. Yu, J. Shao and M. Yu, "Group consensus for second-order discrete-time multi-agent systems with time-varying delays under switching topologies," *Neurocomputing*, vol. 207, pp. 805-812, 2016.
- [41] G. Wen, J. Huang, C. Wang, Z. Chen and Z. Peng, "Group consensus control for heterogeneous multi-agent systems with fixed and switching topologies," *International Journal of Control*, vol. 89, no. 2, pp. 259-269, 2016.
- [42] J. Chen, Z. H. Guan, T. Li, D. X. Zhang, M. F. Ge and D. F. Zheng, "Multiconsensus of fractional-order uncertain multi-agent systems," *Neurocomputing*, vol. 168, pp. 698-705, 2015.
- [43] R. Stanislawski and K. J. Latawiec, "Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part I: New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability," *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, vol. 61, no. 2, pp. 353-361, 2013.
- [44] R. Stanislawski and K. J. Latawiec, "Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part II: New stability criterion for FD-based systems," *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, vol. 61, no. 2, pp. 363-370, 2013.
- [45] P. Skruch, "A general fractional-order thermal model for buildings and its properties," *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems*, pp. 213-220, 2013.
- [18] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Battle, *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer-Verlag, London, 2010.
- [۱۹] الهه اسدی و سعید بلوچیان، «کنترل مقاوم-تطبیقی مرتبه‌کسری موتور سری جریان مستقیم»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۳، صفحات ۸۱۷-۸۲۷، پاییز ۱۳۹۶.
- [۲۰] پوریا جعفری، محمد تشنه لب و مهسان توکلی کاخکی، «طراحی کنترل‌کننده فازی تطبیقی مستقیم برای سیستم‌های مرتبه‌کسری غیرخطی به کمک جبران ساز»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۳، صفحات ۹۲۹-۹۱۷، پاییز ۱۳۹۶.
- [21] J. Shen and J. Cao, "Necessary and sufficient conditions for consensus of delayed fractional-order systems," *Asian Journal of Control*, vol. 14, no. 6, pp. 1690-1697, 2012.
- [22] J. Shen, J. Cao and J. Lu, "Consensus of fractional-order systems with non-uniform input and communication delays," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part. I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 226, no. 2, pp. 271-283, 2012.
- [23] X. Yin and S. Hu, "Consensus of fractional-order uncertain multi-agent systems based on output feedback," *Asian Journal of Control*, vol. 15, no. 5, pp. 1538-1542, 2013.
- [24] Z. Yu, H. Jiang and C. Hu, "Leader-following consensus of fractional-order multi-agent systems under fixed topology," *Neurocomputing*, vol. 149, pp. 613-620, 2015.
- [25] H. Y. Yang, X. L. Zhu and K. C. Cao, "Distributed coordination of fractional order multi-agent systems with communication delays," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 17, no. 1, pp. 23-37, 2014.
- [26] G. Ren and Y. Yu, "Robust consensus of fractional multi-agent systems with external disturbances," *Neurocomputing*, vol. 218, pp. 339-345, 2016.
- [27] J. Bai, G. Wen, A. Rahmani and Y. Yu, "Consensus problem with a reference state for fractional-order multi-agent systems," *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 3, pp. 1009-1018, 2017.
- [28] W. Zhu, W. Li, P. Zhou and C. Yang, "Consensus of fractional-order multi-agent systems with linear models via observer-type protocol," *Neurocomputing*, vol. 230, pp. 60-65, 2017.
- [29] C. Yang, W. Li and W. Zhu, "Consensus analysis of fractional-order multiagent systems with double-integrator," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2017, ۹۲۵۶۵۳۲, 2017.
- [30] W. Zhu, B. Chen and J. Yang, "Consensus of fractional-order multi-agent systems with input time delay," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 20, no. 1, pp.52-70, 2017.
- [31] X. Ma, F. Sun, H. Li and B. He, "The consensus region design and analysis of fractional-order multi-agent systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 48, no. 3, pp. 629-636, 2017.

## زیرنویس‌ها

- 12- Edge
- 13- Adjacency
- 14- Laplacian
- 15- Directed
- 16- Leader
- 17- Strongly connected
- 18- Spanning tree
- 19- Globally reachable
- 20- Inter-act
- 21- Intra-act

- 1- Group consensus
- 2- Leader-following
- 3- Multi-agent systems
- 4- Fractional-order systems
- 5- Discrete-time
- 6- Directed graph
- 7- Consensus
- 8- Formation control
- 9- Flocking
- 10- Diffusion
- 11- Node