

## حل سینماتیک وارون روبات‌های فرازونه‌ای با استفاده از شبکه عصبی موجکی

محمدامین نعمت‌اللهی<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری، سید علی اکبر صفوی<sup>۲</sup>، دانشیار،

محمدعلی حاج‌عباسی<sup>۳</sup>، استادیار، محمدرحیم همتیان<sup>۱</sup>، دانشیار

۱- دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه شیراز - شیراز - ایران - eidi\_54@yahoo.com و mhemat@shirazu.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه شیراز - شیراز - ایران - safavi@shirazu.ac.ir

۳- بخش مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه شهید باهنر کرمان - کرمان - ایران - hajabasi@mail.uk.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، روشی کارآمد برای حل مسأله سینماتیک وارون روبات‌های دارای فرازونگی درجات آزادی ارائه می‌شود. این روش بر اساس منحنی انعطاف‌پذیری پایه‌گذاری شده است که جنبه‌های تمام‌نمای هندسی بازوی مکانیکی روبات را در بر می‌گیرد و منحنی قامت نامیده می‌شود. در این مقاله جهت حل سینماتیک وارون از سه شیوه استفاده می‌شود. در شیوه اول با به‌کارگیری مودهای فرضی برای شکل منحنی قامت، به حل سینماتیک وارون پرداخته می‌شود. در شیوه دوم ابتدا با استفاده از روش حساب تغییرات و مینیمم‌کردن ترکیب وزن‌داری از خمیدگی منحنی قامت، یک مسأله بهینه‌سازی تعریف شده و آن گاه برای حل معادلات استنتاج شده، روش عددی حرکت با آهنگ ظریف به کار برده شده است. در شیوه سوم به منظور استفاده از دقت مناسب و همچنین کاهش مدت زمان محاسبات که در کنترل روبات‌ها اهمیت خاصی دارد از یک شبکه عصبی که بر مبنای توابع موجکی طراحی گردیده استفاده شده است. با استفاده از این شبکه، ضمن به دست آوردن دقت بالا، زمان آموزش تا حد قابل ملاحظه‌ای نسبت به شبکه‌های عصبی انتشار برگشتی بهبود می‌یابد.

**واژه‌های کلیدی:** فرازونگی، سینماتیک وارون، شبکه‌های عصبی، موجک، منحنی قامت.

## Inverse Kinematics Solution of Hyper-Redundant Robot Manipulators Using Wavelet-Based Neural Network

M. A. Nematollahi<sup>1</sup>, A. A. Safavi<sup>2</sup>, M. A. Hajabasi<sup>3</sup> and M. R. Hematian<sup>1</sup>

1- School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

2- School of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

3- School of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University, Kerman, Iran

**Abstract:** In this paper an efficient method for solving the inverse kinematics of Hyper-Redundant Robots is presented. The method is based on a flexible curve named backbone. Three approaches are presented to solve the inverse kinematics. In the first approach the "assumed mode method" is used. In the second approach, first an optimum problem using the "calculus of variations" and minimization of bending of backbone curve is defined. Then a numerical method named "resolved rate motion" is used for solving the obtained governing equations. In the third approach, a neural network based on wavelets is used to increase accuracy while reducing the computation time. Simulation results show that through the application of this network the learning time is significantly reduced in comparison to the conventional neural networks such as back propagation type networks.

**Keywords:** Hyper redundancy, Inverse kinematics, Neural networks, Wavelet, Backbone curve.

## ۱- مقدمه

را جهت به‌دست آوردن فضای کاری بیشتر بهبود بخشیدند. در سال ۲۰۰۴ یوبرله و موک [۷] طراحی یک روبات فرافزونه‌ای جدیدی را که دارای حس لامسه می‌باشد با ده درجه آزادی ارائه نموده‌اند. در مقاله مزبور نشان داده شده است که گوناگونی زیادی جهت حل تکینگی‌ها به‌دست می‌آید. در سال ۲۰۰۵ مکانیزم جدیدی توسط کوگانزاوا [۸] برای روبات‌های فرافزونه‌ای ارائه می‌گردد که شامل عضوهای سه بازویی می‌باشد. این عضوها به صورت سری در پیکربندی روبات مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله حل سینماتیکی رو به جلو و وارون این مکانیزم ارائه و شبیه‌سازی روبات فرافزونه‌ای ساخته شده با ۹ عدد عضو سه بازویی، نشان داده شده است. جیا و همکارانش [۹] در سال ۲۰۰۶ طراحی و به‌کارگیری روبات‌های موبایل (سیار) فرافزونه‌ای را تشریح نمودند. در این کار حل سینماتیک وارون تشریح شده و یک روش کنترلی بر اساس بهینه‌سازی پیکربندی پیشنهاد و نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی ارائه شده است. در سال ۲۰۰۷ یوبرله و موک [۱۰] طراحی و کنترل روبات‌های فرافزونه‌ای که به صورت سری و با ۱۰ درجه آزادی می‌باشند مورد بررسی قرار گرفتند. هدف از طراحی این روبات جلوگیری از برخورد با نقاط تکینگی داخلی جهت افزایش فضای کاری، در عین حال کاهش اندازه کلی دستگاه می‌باشد. در سال ۲۰۰۹ یحیی و همکارانش [۱۱ و ۱۲] روشی جدید جهت طراحی مسیر ارائه نمودند. ایده اساسی در این مقالات در حقیقت پیدا کردن مسیر همواری است که شامل نقاط نزدیک به یکدیگر است. جهت محاسبه سینماتیک وارون برای این نقاط از روش هندسی جدید استفاده می‌شود. مزیت این روش این است که زوایای بین عضوهای مجاور یکسان است و این سبب می‌گردد که کنترل این عضوها آسان‌تر و حرکت آن‌ها پایدارتر باشد و مانع از برخورد با موانع گردد. سرینیاواسان و همکارانش [۱۳] در سال ۲۰۱۰ روشی بلادرنگ (real time) بر اساس منحنی کلاسیک تراکتریکس (tractrix) جهت حل سینماتیک وارون روبات‌های فرافزونه‌ای ارائه نمودند. به این صورت که برای یک حرکت مطلوب سر بازو، انتهای بازو در امتداد منحنی تراکتریکس حرکت نموده و به همین صورت تمام بازوها در امتداد منحنی‌های تراکتریکس مختلف حرکت می‌نمایند.

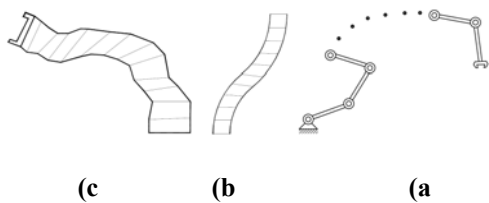
در مقالاتی از قبیل آن چه که مختصراً مرور شدند شیوه‌های حل سینماتیک وارون با مشکل حجم زیاد محاسبات مواجه‌اند. لذا محققین به‌عنوان یک راه حل برای این مشکل به استفاده از شبکه‌های عصبی که در انجام محاسبات کارایی مناسبی دارند روی آورده‌اند. مثلاً در سال ۱۹۹۷ میلادی، رمضان شریف و همکارانش [۱۴] با استفاده از تابع لیاپانوف، حل سینماتیک وارون روبات‌های دارای افزونگی درجات آزادی و بدون افزونگی درجات آزادی را انجام داده‌اند. آن‌ها روشی تکراری را پیشنهاد کرده‌اند که با به‌کارگیری شبکه‌های عصبی در

برای ایجاد قابلیت انعطاف بیشتر و همچنین کارکرد مناسب روبات‌ها در محیط‌های کاملاً مقید، پیچیده و خطرناک نظیر کار در راکتورهای هسته‌ای، اعمال جراحی، کاوش‌ها و کار در ایستگاه‌های فضایی، عملیات اکتشافی در اعماق دریا، امدادسانی در مکان‌های زلزله‌زده برای نجات جان مجروحان و کارهایی از این قبیل، استفاده از افزونگی درجات آزادی در طرح بازوی مکانیکی روبات‌ها مطرح شده است. در چنین روبات‌هایی تعداد درجات آزادی از حداقل مورد نیاز بیشتر است. برای افزونگی زیاد درجات آزادی، اصطلاح فرافزونگی به‌کار برده می‌شود. برای این روبات‌ها با توجه به تشابه ظاهری از اصطلاحاتی همچون گردن قو، بازوی تنسوری و مارگونه توسط محققین مختلف نیز استفاده شده است. بحث سینماتیک وارون از جمله موارد نسبتاً پیچیده در سیستم‌های روباتیک فرافزونه‌ای محسوب می‌شود. برای حل مسأله سینماتیک وارون در اغلب موارد از ماتریس ژاکوبی استفاده می‌شود و در حالتی که بازوی مکانیکی روبات از افزونگی درجات آزادی برخوردار باشد ماتریس ژاکوبی غیرمربعی بوده و از شبه‌معکوس بسط‌یافته و یا الحاقی ماتریس ژاکوبی استفاده می‌شود. این روش‌ها به دلایلی از جمله تعیین و اعمال قيود اضافی برای روبات‌های فرافزونه‌ای و حجم زیاد محاسباتی مناسب نیستند. با مطالعه در زمینه این نوع روبات‌ها می‌توان کار تحقیقی اندرسون و هورن [۱] در اواخر دهه ۱۹۶۰ میلادی را اولین گام در جهت طراحی و ساخت روبات‌های فرافزونه‌ای امروزی دانست. در سال ۱۹۸۷ پیونگ اچ چانگ [۲] با استفاده از روش ضرائب لاگرانژ، به حل مسأله سینماتیک وارون به فرم بسته برای روبات‌های افزونه‌ای پرداخته است. چیریکجیان و بوردیک [۳] در سال ۱۹۹۴ میلادی با تقریب مودال، سینماتیک روبات‌های فرافزونه‌ای را مطالعه کرده‌اند. کارآیی این روش در قالب مثالی نیز نشان داده شده است. در سال ۱۹۹۵ چیریکجیان و بوردیک [۴] فانکشنالی که کمیات خمش، انبساط و انقباض موضعی را در بردار تعریف کرده و از حساب تغییرات برای تعیین پیکربندی بهینه وارون روبات‌های فرافزونه‌ای استفاده نمودند. فرناندو دوارته و تنریو ماچادو [۵] در سال ۱۹۹۸ میلادی با استفاده از تقریب حداقل مربعات به بهینه‌کردن سنج حرکت‌پذیری پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از روش تقریب حداقل مربعات و روش شبه معکوس ماتریس ژاکوبی، روبات‌های دو، سه، چهار و پنج درجه آزادی را تحلیل کرده‌اند و نشان داده‌اند که روش تقریب حداقل مربعات از دقت بهتری نسبت به روش شبه‌معکوس برخوردار است. در سال ۲۰۰۲ میلادی فهیمی و اشرفیون [۶] روش مؤثر و جدیدی را برای حل مسأله موقعیت و سرعت بازوهای فرافزونه‌ای یک روبات فضایی ارائه نموده‌اند. آن‌ها از مفاهیم منحنی قامت و روش مودال جهت حل افزونگی در بازوی روبات استفاده نموده‌اند و نوع توابع مود به‌کار برده شده و شیب منحنی قامت در [۳]

مدل ریاضی ارائه شده، به ترتیب با استفاده از روش‌های مودهای فرضی و بهینه‌سازی، داده‌های مورد نیاز جهت آموزش شبکه عصبی موجکی به دست می‌آید. پس از آن در فصل پنجم ساختار شبکه عصبی موجکی و یادگیری آن تشریح می‌گردد. در فصل ششم با به کارگیری شیوه‌های ارائه شده در این مقاله، به آموزش شبکه عصبی موجکی پرداخته می‌شود. در فصل هفتم مقایسه‌ای بین شبکه‌های عصبی معمولی با شبکه عصبی موجکی انجام می‌شود. سرانجام در فصل هشتم نتیجه‌گیری از نتایج به دست آمده صورت می‌گیرد.

## ۲- مدل‌سازی سینماتیکی سیستم

قبل از تشریح مدل‌سازی سینماتیکی ابتدا توضیحات لازم درباره ساختار روبات‌های فرازونه‌ای آورده می‌شود. بازوی مکانیکی روبات‌های دارای فرازونگی درجات آزادی از لحاظ ساختاری به سه نوع عمده پیکربندی گسسته، خرابایی با هندسه متغیر و پیوسته تقسیم می‌شوند (شکل ۱).



شکل (۱): پیکربندی‌های مختلف روبات فرازونه‌ای  
(a) گسسته (b) هندسه متغیر (c) پیوسته

پیکربندی گسسته شامل رابط‌های صلبی است که تعداد آن‌ها زیاد است (از مرتبه ۱۰ به بالا). نوع دیگری از بازوهای مکانیکی دارای فرازونگی درجات آزادی به لحاظ ساختاری با ترکیب سری از مدول‌های استوارت ساخته می‌شوند و به نام خرابایی با هندسه متغیر معروف هستند. در پیکربندی پیوسته از اجزایی که قابل مقایسه با بافت ماهیچه‌ای هستند و توانایی باز و جمع شدن را دارند استفاده می‌شود. در این نوع پیکربندی از راه‌اندازهای پنوماتیکی یا هیدرولیکی استفاده می‌شود.

پس از این مقدمه در مورد ساختار بازوهای مکانیکی دارای فرازونگی درجات آزادی، اکنون به مدل‌سازی سینماتیکی پرداخته می‌شود. ارائه مدلی مناسب از بازوی مکانیکی روبات فرازونه‌ای که بتواند ویژگی‌های سینماتیکی را به خوبی پوشش دهد اولین گام در حل مسأله سینماتیک وارون محسوب می‌شود. برای این منظور ابتدا تعریف منحنی قامت انجام می‌شود که در ساختن مدل ریاضی از بازوی مکانیکی فرازونه‌ای نقش مهمی ایفا می‌کند.

منحنی قامت یک منحنی هموار تا حد لزوم و شکل‌پذیر با زمان است که تمام جنبه‌های مهم مربوط به پیکربندی کلان و یا همه

بهینه‌سازی تابع لیاپانوف همراه است. تابع لیاپانوف معرفی شده خطای بین موقعیت میچ و موقعیت مطلوب را در بر می‌گیرد. در سال ۲۰۰۰ میلادی خصوصیات سینماتیکی روبات‌های فرازونه‌ای با ساختار پیوسته (مثل خرطوم فیل)، توسط گراواگ و والکر [۱۵] بررسی گردیده است. در مقاله ارائه شده روش تجزیه موجک‌ها جهت حل سینماتیک وارون به کار رفته و مشخص گردید که این روش حل سینماتیک وارون را به‌طور مؤثری آسان می‌سازد. در سال ۲۰۰۴ میلادی حل سینماتیک وارون روبات‌های فرازونه‌ای با استفاده از شبکه عصبی تابع با مبنای شعاعی توسط مولینا و همکارانش [۱۶] ارائه گردیده است. نتایج به دست آمده قابلیت‌های خوب و مقاوم این مدل را نشان می‌دهد. در سال ۲۰۰۵ میلادی استفاده از شبکه‌های عصبی در حل سینماتیک وارون روبات‌های فرازونه‌ای به کمک روش مودال و استفاده از مودهای متفاوت نسبت به مودهای تعریف شده در مرجع [۳]، توسط حاج عباسی و نعمت‌الهی [۱۷] مطالعه شده است. لیبو و همکارانش [۱۸] در سال ۲۰۰۷ روشی بر اساس شبکه‌های عصبی انتشار برگشتی ارائه نمودند. این روش الهام گرفته از منحنی سرپنویید (Serpenoid) است و قادر به حل مسأله کنترل یک بازوی مارگونه صفحه‌ای است که دارای هرگونه حرکت در مسیر دلخواه می‌باشد. استفاده از شبکه عصبی در مدل کردن سینماتیک وارون مزایایی از جمله کاهش پارامترهای کنترل و افزایش دقت دارد. در سال ۲۰۰۹ یحیی و همکارانش [۱۹] با استفاده از روش ارائه شده در [۱۱] و شبکه‌های عصبی به حل سینماتیک وارون روبات‌های فرازونه‌ای پرداختند. نتایج حاصل از شبکه عصبی آموزش‌یافته از دقت خوبی برخوردار هستند.

با توجه به مقالات ارائه شده همان طور که اشاره شد از مشکلات مطرح، حجم زیاد محاسبات جهت حل مسأله سینماتیک وارون می‌باشد. از آنجایی که زمان، پارامتر مهمی در طراحی و کنترل روبات‌ها می‌باشد بنابراین از شبکه‌های عصبی برای روبات‌های فرازونه‌ای که نسبت به روبات‌های متداول و حتی روبات‌های افزونه‌ای پیچیده‌ترند استفاده می‌شود.

کار تحقیقی در این مقاله دارای دو ویژگی جدید است. ویژگی اول آن پیشنهاد مودهایی است که نواقص کار تحقیقی قبلی [۳] را پوشش می‌دهد. ویژگی دوم آن پیشنهاد شبکه عصبی جدیدی جهت سرعت بخشیدن به محاسبات می‌باشد. این شبکه عصبی جدید بر مبنای توابع موجک طراحی شده و زمان آموزش در این شبکه به طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به شبکه‌های عصبی معمولی کاهش می‌یابد.

در این مقاله برای درک بهتر روش به کار برده شده، در بخش دوم یک مدل ریاضی مناسب از مسأله ارائه شده است. در این مدل‌سازی به گونه‌ای عمل می‌شود که جامعیت لازم برای تحلیل سیستم‌های روباتیک فرازونه‌ای حفظ شود. در بخش‌های سوم و چهارم با توجه به

$\theta(s, t)$  با  $\mathbf{V}_0$  نمایش و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \theta(s, t) = a(t)\varphi(s) \mid a(t) \in H^1([t_1, t_2]) \right. \\ \left. \wedge \varphi(s) \in H^1([0, L]) \wedge \varphi(0) = 0 \right\} \quad (5)$$

$$H^1([0, L]) = \left\{ f(x) \mid \int_0^L f^2 dx < \infty \wedge \right. \\ \left. \wedge \int_0^L (df/dx)^2 dx < \infty \right\} \quad (6)$$

$\theta(s, t)$  که حل مسأله سینماتیک وارون باشد، قطعاً در فضای حلهای آزمایشی مورد نظر قرار دارد. فضای حلهای آزمایشی معرفی شده نمونه‌ای از فضای توابع سوبولف (Sobolev) مرتبه یک محسوب می‌شود. مشکل کنونی، گستردگی بسیار زیاد فضای توابع سوبولف معرفی شده است. برای غلبه بر این مشکل ابتدا فضای مورد نظر به کمک توابع پایه انتخابی ( $\varphi_i(s)$  مودهای فرضی) و با حفظ شرایط لازم تقریب زده می‌شود. سپس می‌توان هر عضو دیگر این فضا را با ترکیب توابع پایه به دست آورد. توجه به این موضوع و اینکه تا اینجا قید خاصی به جز انتگرال‌پذیری روی توابع  $a_i(t)$  گذاشته نشده است به این نتیجه می‌انجامد که می‌توان هر یک از توابع مربوط به فضای حلهای آزمایشی را چنین نوشت:

$$\theta(s, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)\varphi_i(s) \quad (7)$$

لذا مسأله سینماتیک وارون منجر به جستجوی توابع  $a_i(t)$  مناسب می‌شود. با استفاده از توابع انتخابی خاص می‌توان حل تحلیلی و به فرم بسته را برای سینماتیک وارون داشت ولی برای مواردی که حل تحلیلی امکان‌پذیر نباشد از روش عددی حرکت با آهنگ ظریف استفاده می‌شود. جهت فرمول‌بندی این روش از معادلات (۲ تا ۴) نسبت به زمان مشتق‌گیری و نتیجه چنین بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{a}} \quad (8)$$

برای یک روبات صفحه‌ای،  $\dot{\mathbf{R}}$  برابر با  $[\dot{X}, \dot{Y}, \dot{\gamma}]^T$ ، مشتق زمانی  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{J}$  ترانهاده است.  $\mathbf{J}$  نیز ماتریس ژاکوبی است. معادله (۸) را می‌توان به صورت معادلات تفاضل محدود به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{a}_{k+1}(t) = \mathbf{a}_k(t) + \bar{\alpha} \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{R}_D(t) - \mathbf{R}(\mathbf{a}_k(t))] \quad (9)$$

در رابطه فوق  $\mathbf{R}_D(t)$  موقعیت مطلوب انتهای روبات است و  $\bar{\alpha} > 0$  ثابتی است که سرعت همگرایی رابطه (۷) را کنترل می‌کند. در حقیقت با این روش، منحنی قامت به توابع از پیش تعیین شده که ترکیبی از توابع خاص می‌باشند مقید می‌گردد که ممکن است تمام قابلیت‌های حرکتی روبات با این توابع ارضاء نگردد. بنابراین با استفاده از مدل پیوسته منحنی قامت و روش حساب تغییرات، پیکربندی بهینه منحنی قامت حاصل می‌گردند.

مشخصه‌های تمام‌نمای ظاهری بازوی مکانیکی دارای فرافزونگی درجات آزادی را در برگیرد. شکل منحنی قامت در هر لحظه مشخص‌کننده پیکربندی روبات در آن لحظه است و برای بیان شکل منحنی قامت از مختصات کارتزین نقاط روی منحنی قامت به فرم  $\mathbf{r}(s, t)$  استفاده می‌شود.  $s$  پارامتریست که فاصله را در امتداد منحنی قامت در زمان  $t$  اندازه‌گیری می‌کند. در هندسه کلاسیک، چندین روش پارامتریزه کردن برای بیان منحنی‌ها وجود دارد.

روش‌های ذاتی که با کمترین مجموعه از پارامترها به تعریف منحنی کمک می‌کنند بیشتر مورد توجه‌اند و با تغییر چارچوب مرجع، نامتغیر هستند. یکی از مفیدترین روش‌های پارامتریزه کردن منحنی قامت، بیان انتگرالی است که در این شیوه بردار مکان نقاط متعلق به منحنی قامت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{r}(s, t) = \int_0^s (1 + \varepsilon(s, t)) \mathbf{u}(s, t) ds \quad (1)$$

که  $\mathbf{u}(s, t)$  بردار یکه مماس به منحنی در هر نقطه است.  $\varepsilon(s, t)$  میزان انبساط‌پذیری موضعی را نشان می‌دهد.  $\mathbf{u}(s, t)$  را در حالت دو بعدی می‌توان به صورت  $[\sin(\theta(s, t)), \cos(\theta(s, t))]$  نوشت که  $\theta(s, t)$  زاویه خط مماس بر منحنی قامت در نقطه  $s$  و لحظه  $t$  است. این زاویه از محور  $Y$  دستگاه مرجع در خلاف جهت مثلثاتی اندازه‌گیری می‌شود. روابط زیر در حالت دو بعدی موقعیت انتهای روبات را نشان می‌دهند.

$$X(t) = \int_0^L (1 + \varepsilon(s, t)) \sin(\theta(s, t)) ds \quad (2)$$

$$Y(t) = \int_0^L (1 + \varepsilon(s, t)) \cos(\theta(s, t)) ds \quad (3)$$

$$\eta(t) = \theta(L, t) \quad (4)$$

$\eta$  و  $L$  به ترتیب زاویه مچ (انتهای) و طول روبات هستند. یافتن توابع  $\varepsilon(s, t)$  و  $\theta(s, t)$ ، با داشتن موقعیت معلوم مچ، در حقیقت حل مسأله سینماتیک وارون است. جهت حل سینماتیک وارون سه شیوه زیر پیشنهاد می‌گردد. در این مقاله از پیکربندی پیوسته استفاده شده است.

### ۳- شیوه اول: استفاده از مودهای فرضی

برای روبات بدون انبساط ( $\varepsilon(s, t) = 0$ )، تنها مجهول مسأله سینماتیک وارون، تابع  $\theta(s, t)$  است. برای حل چنین مسأله‌ای در حالت صفحه‌ای به ترتیب زیر عمل می‌شود. ابتدا فضایی از توابع به نام فضای حلهای آزمایشی که شرط لازم در پایه منحنی قامت یعنی در  $s=0$  را ارضاء نمایند تعریف می‌گردد. در مقاله حاضر در تعریف فضای حلهای آزمایشی، حداقل شرط لازم که  $\theta(0, t) = 0$  است مورد توجه قرار داده می‌شود. فضای حلهای آزمایشی مربوط به تابع

قیود و تابع لاگرانژ مربوطه به صورت زیر است [۴]:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ 2\alpha \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial \hat{L}}{\partial s} - 1 \right)^2 \right] ds \quad (16)$$

$$x_{ee} = \int_0^1 \sin(\theta) ds \quad (17)$$

$$y_{ee} = \int_0^1 \cos(\theta) ds \quad (18)$$

$$l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \mu_1 \sin(\theta) + \mu_2 \cos(\theta) \quad (19)$$

که  $\hat{L}(s,t) = \int_0^s (1 + \varepsilon(\sigma,t)) d\sigma$  و بیانگر طول کمان بین نقطه پایه

منحنی ( $s = 0$ ) و هر نقطه دیگر از منحنی می‌باشد.  $(\frac{\partial \hat{L}}{\partial s} - 1)$  نیز

معیاری از انبساط‌پذیری (کشیدگی یا فشردگی طول منحنی قامت نسبت به طول اولیه) روبات می‌باشد.

حال برای تعیین پیکربندی بهینه برای یک روبات انبساط‌ناپذیر ( $\beta = 0$ ) صفحه‌ای، معادله اولر- لاگرانژ

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} \left( \frac{\partial l}{\partial \theta^i} \right) = 0 \quad (20)$$

اعمال می‌شود که نتیجه به صورت یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - \gamma_1 \cos(\theta) + \gamma_2 \sin(\theta) &= 0 \\ \theta(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial s}(0, t) &= \gamma_3 \end{aligned} \quad (21)$$

در رابطه (۱۶)،  $\alpha = 0.5$  در نظر گرفته شده است [۴]. حل معادله فوق، پیکربندی بهینه منحنی قامت را مشخص می‌کند. حل مزبور، تابع هدف را برای شرایط اولیه و ضرائب لاگرانژ کمینه می‌کند. شرط اولیه نامعین و ضرائب لاگرانژ مربوطه را متغیرهای کاهش‌یافته می‌گویند که با  $\gamma$  نمایش داده می‌شوند:

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T = [\mu_1, \mu_2, \dot{\theta}(0)]^T \quad (22)$$

برای تابع هدف داده شده، موقعیت مچ تابعی از  $\gamma$  است. به این صورت که برای یک مقدار داده شده  $\gamma$ ، انتگرال‌گیری از معادلات اولر- لاگرانژ، یک موقعیت مچ منحصر به فرد را تولید می‌نماید. بنابراین پیدا نمودن  $\gamma$  همان حل سینماتیک است.

در این قسمت، تعیین  $\gamma$  برای یک موقعیت مچ معلوم، تشریح می‌شود. برای این منظور معادله (۱) در  $s = L$  محاسبه می‌گردد:

#### ۴- شیوه دوم: بهینه‌سازی پیکربندی منحنی قامت

در این شیوه با استفاده از روش حساب تغییرات و مینیمم کردن ترکیب وزن‌داری از خمیدگی منحنی قامت، یک مسأله بهینه‌سازی تعریف می‌گردد. در این روش فرمول‌بندی معادلات حاکم به صورت ذیل انجام می‌شود. باید توجه داشت که در هر لحظه  $t$  شکل بهینه منحنی قامت جستجو می‌شود. از این رو در روابط، آرگومان  $t$  نوشته نمی‌شود و پیکربندی بهینه به مینیمم کردن انتگرالی به شکل زیر مربوط می‌شود:

$$I = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{f}(s, \mathbf{q}(s), \mathbf{q}^1(s), \dots, \mathbf{q}^n(s)) ds \quad (10)$$

بردار  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  مبین کمیات ذاتی تعریف کننده شکل منحنی قامت است و  $\mathbf{q}^i$  نیز چنین تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{q}^i = \frac{d^i \mathbf{q}}{ds^i} \quad (11)$$

قیود ایزوپریمتریک که به موقعیت مچ روبات ربط دارند این گونه بیان می‌شوند:

$$\int_{s_0}^{s_1} \mathbf{g}(s, \mathbf{q}(s), \mathbf{q}^1(s), \dots, \mathbf{q}^n(s)) ds = \mathbf{x}_D \quad (12)$$

که  $\mathbf{g} = [1 + \varepsilon(s,t)] \mathbf{u}$  و  $\mathbf{x}_D$  موقعیت مچ روبات است. همچنین قیودی از نوع محدود که جهت‌گیری مچ از آن جمله است نیز به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\mathbf{h}(s, \mathbf{q}(s), \mathbf{q}^1(s), \dots, \mathbf{q}^n(s)) = \mathbf{0} \quad (13)$$

بدین ترتیب حل مسأله پیکربندی بهینه به پیدا کردن  $\mathbf{q}(s)$  هایی منتهی می‌شود که کمیت بیان شده با رابطه (۱۰) را تحت قیود (۱۲) و (۱۳) مینیمم کند. برای حل این مسأله ابتدا تابع لاگرانژ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$l = \mathbf{f} + \mu_c \cdot \mathbf{g} + \mu_v \cdot \mathbf{h} \quad (14)$$

که  $\mu_c$  و  $\mu_v$  به ترتیب ضرائب ثابت و متغیر لاگرانژ و  $l$  تابع لاگرانژ هستند.  $\mathbf{q}(s)$  هایی که قیود (۱۲) و (۱۳) را ارضاء کنند و رابطه (۱۰) را به حداقل برسانند در معادلات اولر- لاگرانژ صدق می‌نمایند، یعنی:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} \left( \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}_j^i} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (15)$$

با توجه به قیود (۱۲) یا (۱۳) و شرایط مرزی  $\mathbf{q}^i(s_0) = \mathbf{q}_0^i$  و  $\mathbf{q}^i(s_1) = \mathbf{q}_1^i$  برای  $i \in [0, 1, \dots, n]$  می‌توان از حل رابطه (۱۰)، توابع اکستریم کننده  $\mathbf{q}^i$  و ضرائب لاگرانژ  $\mu_c$  و  $\mu_v$  را پیدا نمود.

در این مقاله جهت حل سینماتیک وارون، یک روبات صفحه‌ای به طول یک متر و بدون انبساط در نظر گرفته می‌شود که تابع هدف،

با شرایط مرزی:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2}(0) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} \right) (0) = 0 \quad (31)$$

و

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \right) + \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \sin(\theta) + \gamma_2 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \cos(\theta) = 0 \quad (32)$$

با شرایط مرزی:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3}(0) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \right) (0) = 1 \quad (33)$$

باید توجه داشت که معادلات در  $\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_i}$  خطی هستند. هر یک از معادلات بالا به طور جداگانه، همزمان با معادلات (۲۱) می‌توانند حل و در محاسبه ماتریس ژاکوبی استفاده شوند.

### ۵- شیوه سوم:

#### ۵-۱- شبکه‌های عصبی موجکی

با توجه به اهمیت مدت زمان لازم برای انجام محاسبات سینماتیک وارون در کار عملی روبات‌های فرافزونه‌ای، با استفاده از داده‌های حاصل از دو شیوه تحلیل شده، به تربیت شبکه عصبی موجکی پرداخته می‌شود. قبل از تشریح نتایج مربوط به این کار، ابتدا چارچوب شبکه عصبی موجکی توضیح داده می‌شود.

#### ۵-۲- موجک‌ها و تحلیل چند وضوحی

موجک‌ها خانواده جدیدی از توابع پایه محلی هستند و کاربردهای بسیاری در زمینه‌های علوم و مهندسی دارند [۲۰، ۲۱، ۲۲ و ۲۳]. این توابع جهت بیان و تقریب توابع دیگر به کار می‌روند. موجک‌ها توابعی هستند که جنبه‌های مفیدی از قبیل تعامد، محلی بودن در دامنه‌های زمان-فرکانس و به‌کارگیری سریع در مسائل را دارا می‌باشند. موجک‌ها معمولاً در چارچوب چند وضوحی که توسط ملات [۲۲] گسترش یافت معرفی می‌گردند که به طور مختصر توضیح داده خواهد شد. تابع  $F(\mathbf{X})$  را در  $L^2(\mathbf{R})$  در نظر بگیرید که  $L^2(\mathbf{R})$  فضای برداری تمام توابع یک‌بعدی است که قابل اندازه‌گیری و مربع آنها انتگرال‌پذیر باشد. علاوه بر این فرض کنید که  $\mathbf{V}_m$  فضای برداری باشد که تمام تقریب‌های تابع  $F(\mathbf{X})$  را در وضوح مرحله  $m$  در بر دارد. آنگاه فضاهای برداری متوالی  $\mathbf{V}_m \in \mathbf{Z}$ ، تخمین تابع  $F(\mathbf{X})$  را در وضوح‌های متوالی ارائه می‌کند. می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{x}(L, t) = \int_0^L \mathbf{v}(\mathbf{y}) ds \quad (23)$$

که  $\mathbf{y}$  یک سری از توابع شکل است. اگر  $\mathbf{y}(s, t)$  حلی باشد که رابطه (۱۶) را با قیود  $\mathbf{x}(L, t) = \mathbf{x}_D(t)$  اکسترمم کند آنگاه  $\mathbf{y}$  تابعی از  $\gamma$  است، یعنی:

$$\mathbf{y}(s, t) = \hat{\mathbf{y}}(s, \gamma(t)) \quad (24)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از رابطه (۲۳)، نتیجه می‌دهد:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(L, t)) = \left[ \int_0^L \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \gamma} ds \right] \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\gamma}{dt} \quad (25)$$

که  $\mathbf{J}$  ژاکوبین مربوط به متغیرهای  $\gamma$  است. بایستی توجه داشت که اندازه ابعادی  $\mathbf{J}$  بستگی به تعداد درجات آزادی بازوی مکانیکی ندارد. برای به‌دست آوردن متغیرهای پیکربندی کاهش‌یافته از معادله (۲۵) می‌توان از روش عددی حرکت با آهنگ ظریف با تقریب بسیار خوبی استفاده نمود. در این روش ابتدا معادله (۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\gamma_{j+1} = \gamma_j + \mathbf{J}^{-1}(\gamma_j) \Delta \mathbf{x}_j \quad (26)$$

ژ اندیس تکرار است و  $\Delta \mathbf{x}_j$  مقدار خطا بین موقعیت محاسبه شده و مطلوب می‌باشد. برای مسأله مورد بررسی ماتریس ژاکوبی به صورت معادله (۲۷) ساده می‌شود. برای محاسبه ماتریس ژاکوبی مقادیر  $\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_i}$  مورد نیاز هستند. برای این منظور معادلات کمکی تشکیل می‌شوند.

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{bmatrix} \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} \cos(\theta) ds & \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} \cos(\theta) ds & \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \cos(\theta) ds \\ -\int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} \sin(\theta) ds & -\int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} \sin(\theta) ds & -\int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \sin(\theta) ds \\ \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

معادلات کمکی با گرفتن مشتق از معادله (۲۱) نسبت به متغیرهای کاهش‌یافته به آسانی به دست می‌آیند که عبارتند از:

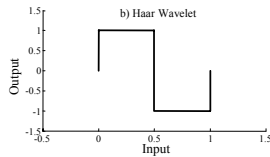
$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} \right) + \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} \sin(\theta) + \gamma_2 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} \cos(\theta) = \cos(\theta) \quad (28)$$

با شرایط مرزی:

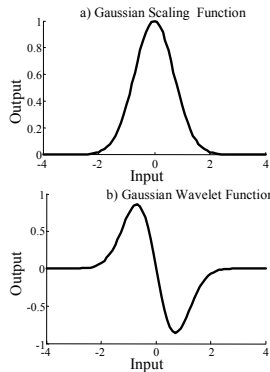
$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1}(0) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_1} \right) (0) = 0 \quad (29)$$

و

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} \right) + \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} \sin(\theta) + \gamma_2 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_2} \cos(\theta) = -\sin(\theta) \quad (30)$$



شکل (۲): الف) تابع مقیاس هار ، ب) تابع موجک هار



شکل (۳): الف) تابع مقیاس گاوس ، ب) تابع موجک گاوس

### ۳-۵- یادگیری شبکه عصبی موجکی

معادله (۳۸) چارچوب اساسی شبکه‌های موجکی را تشریح می‌کند و نشان می‌دهد که هر موجک چگونه در طرح کلی تقریب تابع مورد نظر شرکت می‌کند. این معادله همچنین بیان می‌کند که توابع مقیاس تنها در اولین مرحله از تقریب استفاده شده تا  $F_0$  تولید گردد. بعد از این مرحله در روند تقریب، تنها از موجک‌ها استفاده می‌شود. در این روش به محض اینکه اولین تقریب برای  $F$  یعنی  $F_0$  به دست آمد، می‌توان جهت به دست آوردن تقریب بهتر که  $F_{-1}$  نامگذاری می‌گردد از اضافه نمودن موجک‌هایی که ضریب اتساع آن با توابع مقیاس (در اینجا  $m=0$ ) برابر است بهره برد. با ادامه دادن این مراحل در وضوح بعدی، یعنی  $m=-1$  تقریب بهتری نسبت به  $F_{-1}$ ، یعنی  $F_{-2}$  حاصل می‌گردد. این روند تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تابع اصلی با دقت بالایی بازسازی شود [۲۰]. جهت تعیین ضرایب شبکه،  $b_{m,k}$  و  $d_{m,k}$  چندین روش وجود دارد. در عمومی‌ترین روش ضرائب به سرعت و بدون استفاده از یک روش تکراری محاسبه می‌گردند [۲۰]. جهت آشنایی با روش‌های یادگیری بهنگام (online) با شبکه موجکی نیز به [۲۴] مراجعه گردد.

### ۶- حالات مطالعه شده

#### ۶-۱- شیوه اول:

با توجه به مطالب ذکر شده، بازوی مکانیکی فرازونده‌ای در دو حالت مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در حالت اول از دو تابع زیر در تعریف

تابعی مثل  $\varphi \in V_0$  وجود دارد به طوری که  $\varphi_{0,k}(X)$  ( $\varphi_{0,k}(X) = \varphi(X-k) \in V_0$ ) تشکیل یک پایه متعامد برای  $V_0$  می‌دهد. تابع  $\varphi$ ، تابع مقیاس در تحلیل چند وضوحی نامیده می‌شود و خانواده‌ای از این توابع مقیاس به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\varphi_{m,k}(X) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m/2} X - k) \quad m, k \in Z \quad (34)$$

که  $2^{-m}$  و  $k$  به ترتیب ضرایب اتساع و انتقال هستند. اگر  $W_m$  مکمل متعامد فضای  $V_m$  به فضای  $V_{m-1}$  باشد که  $V_m \oplus W_m = V_{m-1}$ ، آنگاه توابع پایه متناظر با  $W_m$  ها، موجک نام دارد و با  $\psi_{m,k}$  نشان داده می‌شود و به آسانی از توابع  $\varphi_{m,k}$  به دست می‌آیند [۲۱]. خانواده‌ای از موجک‌ها به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\psi_{m,k}(X) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m/2} X - k) \quad m, k \in Z \quad (35)$$

و  $L^2(R)$  به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$L^2(R) = \cup_{m \in Z} V_m = \dots W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \dots \\ = \oplus_{m \in Z} W_m \quad (36)$$

که:  $W_j \perp W_m \quad j \neq m$

رابطه (۳۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F(X) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_{m,k} \psi_{m,k}(X) \quad (37)$$

اگر تقریب تابع از وضوح  $m=0$  شروع شود در این صورت:

$$F(X) = F_0(X) + \sum_{m=-\infty}^{m=0} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_{m,k} \psi_{m,k}(X) \quad (38)$$

$$F_0(X) = \sum_{m=-\infty}^{m=0} b_{0,k} \varphi_{0,k}(X) \quad (39)$$

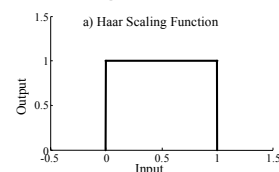
ساده‌ترین مثال از یک موجک متعامد، تابع هار است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

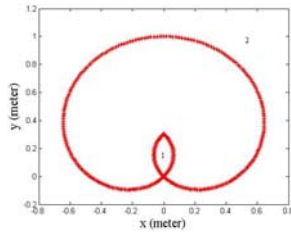
$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \end{cases} \quad (40)$$

که تابع مقیاس متناظر با آن

$$\varphi^H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (41)$$

می‌باشد. شکل‌های (۲) و (۳) دو نمونه از توابع موجک و توابع مقیاس متناظرشان را نشان می‌دهند. البته موجک گوسی شکل (۳) از نوع متعامد نبوده اما امکان به‌کارگیری در کلیات آنالیز چند وضوحی را دارد. جهت اطلاعات بیشتر به [۲۳] رجوع شود.



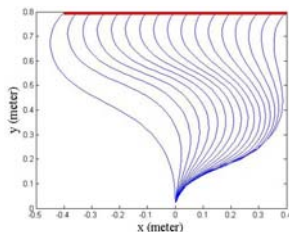


شکل (۵): فضای کاری و نقاط منفرد (مودهای مطالعه شده قبلی)

در واقع محدودیت تعداد و نوع توابع پایه انتخاب شده از جهت‌گیری مچ و یا قابلیت‌های حرکتی بیشتری که در روبات وجود دارد، می‌کاهد. برای این منظور تعداد توابع پایه بیشتری پیشنهاد شده است که عبارتند از:

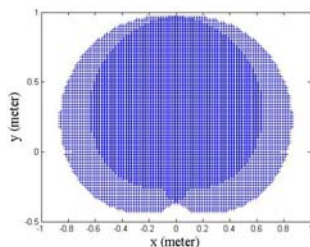
$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \sin(\pi s/2L) & \varphi_2(s) &= \sin(3\pi s/2L) \\ \varphi_3(s) &= \cos(\pi s/2L) & \varphi_4(s) &= -\cos(3\pi s/2L) \end{aligned} \quad (45)$$

در این حالت به دست آوردن حل تحلیلی و به فرم بسته برای مسأله سینماتیک وارون مشکل است. لذا برای غلبه بر این مشکل از روش عددی حرکت با آهنگ ظریف استفاده شده است. در این حالت نیز تعداد پیکربندی‌ها، بسته به زاویه جهت‌گیری انتهای روبات، برای هر نقطه از فضای کاری می‌تواند بیشتر از یک باشد. شکل (۶) جهت نمونه، یک پیکربندی روبات را برای مسیر قبلی و جهت‌گیری ۴۵ درجه نشان می‌دهد.



شکل (۶): پیکربندی شماره ۱ (مودهای پیشنهادی)

با تحلیل مشابه برای حالت دو مودی می‌توان محدوده فضای کاری و نقاط منفرد را مطابق شکل (۷) بدست آورد.



شکل (۷): فضای کاری (مودهای پیشنهادی)

مقایسه شکل‌های (۵) و (۷) نشان می‌دهد که حالت پیشنهاد شده نسبت به حالت مطالعه شده قبلی [۳] منجر به گسترش بیشتر فضای کاری شده است.

منحنی قامت استفاده می‌شود.

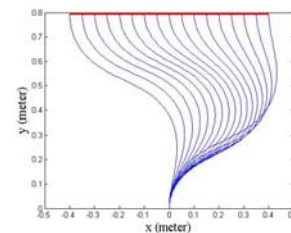
$$\varphi_1(s) = \sin(2\pi s/L) \quad (42)$$

$$\varphi_2(s) = 1 - \cos(2\pi s/L) \quad (43)$$

این توابع اولین بار توسط چیریکجیان و بوردیک پیشنهاد شده‌اند [۳]. با جایگذاری این توابع در معادلات (۷) و (۲ تا ۴) و انجام محاسبات لازم، حل سینماتیک وارون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \pm ([J_0^{-1}[(X^2(t) + Y^2(t))^{1/2}]]^2 \\ &\quad - [A \tan 2(X(t), Y(t))]^2)^{1/2} \\ a_2(t) &= A \tan 2(X(t), Y(t)) \\ \gamma(t) &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$J_0^{-1}(\cdot)$  معکوس تابع بسل مرتبه صفر است. تابع  $A \tan 2$  معکوس تابع تانژانت با احتساب ربع مثلثاتی مربوطه است. دو علامت مثبت و منفی نیز دو پیکربندی در هر نقطه از فضای کاری را نشان می‌دهند. همانند حل سینماتیک وارون بسیاری از بازوهای مکانیکی، در این جا نیز بحث چندگانگی جواب‌ها مشهود است. شکل (۴) یک دسته از این جواب‌ها را برای مسیری که با  $y = 0.8$  و  $-0.4 \leq x \leq 0.4$  مشخص می‌شود نشان می‌دهد که از دو مود پیشنهاد شده در [۳] استفاده شده است.



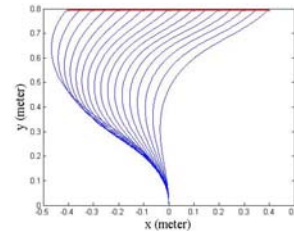
شکل (۴): پیکربندی شماره ۱ (مودهای مطالعه شده قبلی)

مطالعه نقاط منفرد یا تکینگی‌ها، یک موضوع مهم دیگر در روباتیک است. در این نقاط دترمینان ژاکوبی، صفر و عملاً از امکان حرکت مچ در جهت یا جهاتی خاص کاسته می‌شود. شکل (۵) فضای کاری و نقاط منفرد (ناحیه ۱ و ۲) را نشان می‌دهد. با مطالعه دقیق در جزئیات مربوط به این حالت که از دو تابع برای پایه فضای حل‌های آزمایشی یا دو مود بهره می‌گیرد نکاتی جلب توجه می‌کنند. به طور مثال قابلیت تغییر جهت‌گیری در مچ وجود ندارد. همچنین بازوی مکانیکی فرافزونه‌ای از قابلیت‌های حرکتی بیشتری نسبت به آنچه که با این دو مود تحقق یافته، برخوردار است که این مطلب با توجه به محدوده فضای کاری نشان داده شده در شکل (۵) تا حدودی واضح می‌شود.



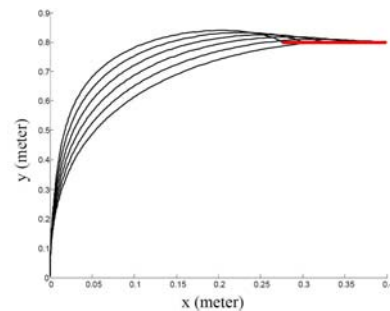
۲-۶- شیهه دوم:

قیود کاری برای مسأله مورد بررسی، موقعیت مکانی و جهت‌گیری مچ رویات می‌باشند. در ضمن زاویه جهت‌گیری مچ رویات ۴۵ درجه در نظر گرفته شده است. شکل (۸) پیکربندی بهینه را برای مسیر  $y = 0.8; -0.4 \leq x \leq 0.4$  نشان می‌دهد.



شکل (۸): پیکربندی بهینه

می‌توان پیکربندی بهینه رویات‌های فرافزونه‌ای را بدون مقید کردن مچ در زاویه خاص نیز پیدا نمود. شکل (۹) پیکربندی بهینه را برای مسیر طی شده نشان می‌دهد. در محاسبات این قسمت مقدار  $\gamma_3$  برابر  $0.7$  در نظر گرفته شده است.



شکل (۹): پیکربندی بهینه بدون مقید کردن مچ

بکارگیری شیوه‌های اول و دوم زمان‌بر هستند. لذا در این کار تحقیقی برای تسریع در انجام محاسبات از شبکه عصبی موجکی استفاده شده است. داده‌های لازم برای آموزش شبکه از دو شیوه اول و دوم حاصل شده‌اند.

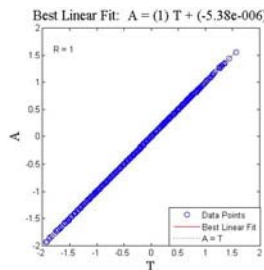
۳-۶- شیهه سوم:

۳-۶-۱- حل سینماتیک وارون با استفاده از شبکه عصبی

موجکی و شیوه اول

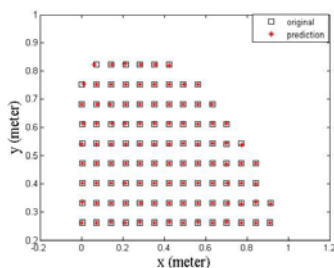
در این حالت از مودهای پیشنهاد شده (رابطه ۴۵) جهت محاسبه سینماتیک وارون استفاده شده است. با توجه به پیچیدگی محاسبات، حل سینماتیک وارون به صورت تحلیلی وجود ندارد. بنابراین جهت رفع این مشکل و داشتن یکنواختی در داده‌ها از روش عددی حرکت با آهنگ ظریف استفاده می‌گردد. برای تربیت بهتر شبکه عصبی، فضای

کاری به دو نیمه راست و چپ تقسیم شده است. تابع موجک مورد استفاده جهت آموزش شبکه برای پارامترهای  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  گاوسی و تعداد ضرائب شبکه برای هر سه پارامتر برابر با ۲۵۶ است که با محاسبه ساده تعداد تابع موجک به کار برده شده ۱۵ است [۲۲]. شکل (۱۰) تحلیل رگرسیون پارامتر  $a_1$  را برای نیمه سمت راست فضای کاری نشان می‌دهند. در این نوع نمایش داده‌ها، مقادیر اصلی در برابر مقادیر تقریب زده شده رسم می‌شوند و هرچه این نمایش نزدیک‌تر به خط با زاویه ۴۵ درجه باشد دقت تقریب بهتر بوده است. نتایج برای پارامترهای  $a_2$  و  $a_3$  نیز بسیار مشابه است ولی برای خلاصه نمودن مقاله در اینجا ارائه نمی‌شوند.

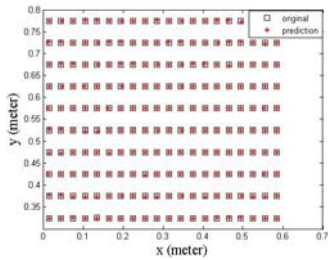


شکل (۱۰): تحلیل رگرسیون پارامتر  $a_1$  (مودهای پیشنهادی)

در شکل (۱۱) برای درک بهتر از عمل کرد شبکه، تعمیم‌پذیری شبکه برای نیمه راست فضای کاری نشان داده شده است. نقاط واقعی با علامت مربعی شکل و نقاط حاصل از آموزش شبکه با علامت "+" نشان داده شده است. همان طور که نمودارها نشان می‌دهند شبکه از دقت بالایی برخوردار است. در شکل (۱۲) مقدار خطا برای مسیر  $y = 0.8; -0.4 \leq x \leq 0.4$  نشان داده شده است. علت شکستگی نمودار این است که مقدار خطا در نقطه صفر از دو شبکه مجزا به دست آمده است.

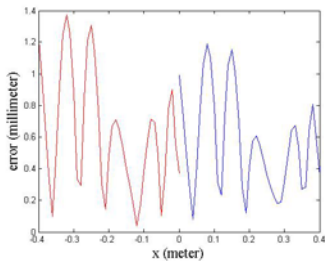
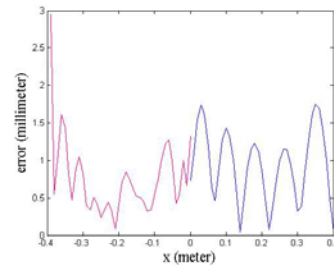


شکل (۱۱): تعمیم‌پذیری شبکه (شیوه اول - مجموعه ۱)



شکل (۱۴): تعمیم‌پذیری شبکه ( شیوه دوم - مجموعه ۱)

شکل (۱۲): خطای شبکه عصبی موجکی (مودهای پیشنهادی)



شکل (۱۵): خطای شبکه عصبی موجکی (شیوه دوم)

### ۳-۶-۲- حل سینماتیک وارون با استفاده از شبکه عصبی

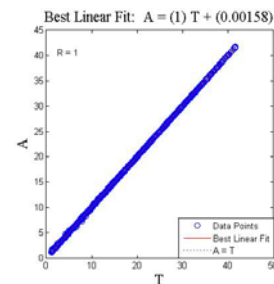
#### موجکی و شیوه دوم

در اینجا نیز جهت آموزش بهتر شبکه، ابتدا فضای کاری را به دو نیمه بالایی و پایینی تقسیم نموده و به آموزش شبکه برای هر قسمت پرداخته شده است. در این مقاله به آموزش شبکه برای نیمه بالایی اقدام گردیده است. آموزش شبکه در یک مرحله مشکل و وقت‌گیر است. در ضمن نتایج به‌دست آمده از شبکه از دقت بالایی برخوردار نیستند. بنابراین قسمت بالایی را به دو قسمت راست (مجموعه ۱) و چپ (مجموعه ۲) تقسیم نموده و برای هر کدام شبکه‌ای مجزا آموزش داده شده است. برای فراهم نمودن زوج‌های آموزشی جهت آموزش شبکه، نتایج روش عددی حرکت با آهنگ ظریف مورد استفاده قرار گرفته شد. برای نمونه، طراحی شبکه برای نیمه سمت راست (مجموعه ۱) آورده شده است. تابع موجک مورد استفاده جهت تربیت شبکه برای پارامترهای  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  و گاوسی و تعداد ضرائب شبکه و تابع موجک برای هر سه پارامتر به ترتیب برابر با ۲۵۶ و ۱۵ است. شکل (۱۳) تحلیل رگرسیون برای مقدار  $\gamma_1$  را نشان می‌دهند. نتایج برای پارامترهای  $\gamma_2$  و  $\gamma_3$  نیز بسیار مشابه است ولی برای خلاصه نمودن مقاله در اینجا ارائه نمی‌شوند.

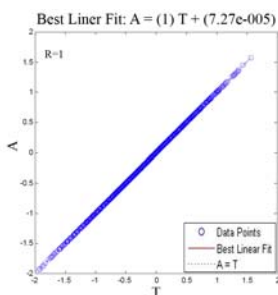
### ۷- مقایسه شبکه‌های عصبی معمولی با شبکه عصبی

#### موجکی

حل سینماتیک وارون رویات‌های فرافزونه‌ای با استفاده از شبکه‌های عصبی سه‌گانه انتشار برگشتی، تابع با مبنای شعاعی و رگرسیون تعمیم‌یافته توسط حاج عباسی و نعمت‌الهی به‌دست آمده است [۱۷]. در این مقاله نشان داده شد که شبکه‌های سه‌گانه از کارایی لازم برخوردارند ولی در بعضی از موارد از جمله تعمیم‌پذیری، سرعت آموزش و سرعت شبیه‌سازی با هم تفاوت‌هایی دارند که با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان شبکه عصبی انتشار برگشتی را در تحلیل سینماتیک وارون رویات‌های فرافزونه‌ای مناسب‌تر از بقیه دانست. حال جهت مقایسه شبکه انتشار برگشتی و شبکه عصبی موجکی پیشنهادی در این مقاله، نتایج حاصل از شبکه عصبی انتشار برگشتی مربوط به شیوه‌های اول و دوم برای پارامتر  $a_1$ ، در شکل‌های (۱۶) و (۱۷) و برای پارامتر  $\gamma_1$ ، در شکل‌های (۱۸) و (۱۹) آورده شده‌اند. نتایج برای سایر پارامترها نیز بسیار مشابه است ولی برای خلاصه نمودن مطلب ارائه نمی‌شوند.



شکل (۱۳): تحلیل رگرسیون پارامتر  $\gamma_1$



شکل (۱۶): رگرسیون پارامتر  $a_1$  (شیوه اول - شبکه انتشار برگشتی)

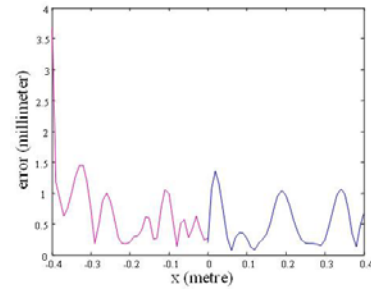
در شکل (۱۴) نیز برای درک بهتر از دقت شبکه، تعمیم‌پذیری شبکه برای نیمه راست فضای کاری نشان داده شده است. در شکل (۱۵) مقدار خطا برای مسیر  $-0.4 \leq x \leq 0.4$ ;  $y = 0.8$  نشان داده شده است.

## ۸- نتیجه‌گیری

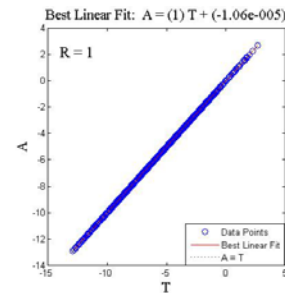
در این مقاله ابتدا مدل‌سازی سینماتیک بازوی مکانیکی فرافزونه‌ای به کمک منحنی قامت انجام شد و سپس با استفاده از سه شیوه به حل سینماتیک وارون پرداخته شد. در شیوه اول با پیشنهاد توابعی که بیانگر مودهای خاصی در تعریف منحنی قامت هستند مدل سینماتیکی بازوی فرافزونه‌ای به دست آمد. این مدل با روش عددی حرکت با آهنگ ظریف برای به دست آوردن حل سینماتیک وارون مورد استفاده قرار گرفت. در شیوه دوم با کمک از حساب تغییرات به تعریف یک مسأله بهینه‌سازی جهت حل سینماتیک وارون اقدام گردید. در نهایت با استفاده از داده‌های حاصل از به کارگیری دو شیوه ارائه شده، شبکه عصبی موجکی تربیت شد. اهم نتایجی که بدین ترتیب حاصل می‌شود از این قرار است: روش عددی حرکت با آهنگ ظریف از دقت مناسبی برخوردار است ولی سرعت این روش در کارهایی که زمان پارامتر مهمی به حساب می‌آید تا حدودی کم است. برای تسریع در انجام محاسبات مربوط به سینماتیک وارون و افزایش دقت محاسباتی در نقاط نزدیک به تکنیکها از شبکه عصبی موجکی استفاده گردیده و نشان داده شد که شبکه از کارایی لازم برخوردار است. چون مقادیر  $a$ ها که همان حل سینماتیک وارون است تابعی از زمان هستند مدل به کار برده شده ساختار دینامیکی دارد. بنابراین با استفاده از روش یادگیری بهنگام نیز می‌توان حل سینماتیک وارون این نوع روبات‌ها را به صورت زمان حقیقی انجام داد.

## مراجع

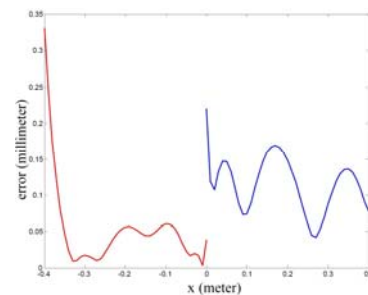
- [1] V. V. Anderson and R. C. Horn, "Tensor-arm Manipulator design", ASME Transactions, vol. 67-DE-57, pp. 1-12, 1967.
- [2] P. H. Chang, "A Closed-Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators with Redundancy", IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. Ra-3, no. 5, pp. 393-403, Oct. 1987.
- [3] G. S. Chirikjian and J. W. Burdick, "A modal approach to hyper-redundant manipulator kinematics", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 10, no. 3, pp. 343-354, Jun. 1994.
- [4] G. S. Chirikjian and J. W. Burdick, "Kinematically optimal hyper-redundant manipulator configuration", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 11, no. 6, pp. 794-806, Dec. 1995.
- [5] F. B. M. Duarte and J. A. Tenreiro Machado, "Kinematic optimization of redundant and hyper-redundant robot trajectories", ICECS'98-5th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, vol. 2, pp. 7-10, Sep. 1998.
- [6] F. Fahimi, H. Ashrafiuon and C. Nataraj, "An



شکل (۱۷): خطای شبکه عصبی انتشاربرگشتی (شیوه اول)



شکل (۱۸): رگرسیون پارامتر  $\gamma_1$  (شیوه دوم - شبکه انتشاربرگشتی)



شکل (۱۹): خطای شبکه عصبی انتشاربرگشتی (شیوه دوم)

با مقایسه شکل‌های (۱۶) تا (۱۹) به ترتیب با شکل‌های متناظر حاصل از شبکه عصبی موجکی ۱۰، ۱۲، ۱۳ و ۱۵ مشخص می‌گردد که شبکه عصبی موجکی از دقت بالایی برخوردار است. به دلیل این که شبکه عصبی موجکی علی‌رغم شبکه عصبی انتشاربرگشتی از روش تکراری جهت آموزش استفاده نمی‌کند بنابراین زمان آموزش شبکه تا حد قابل ملاحظه‌ای نسبت به شبکه انتشار برگشتی بهبود می‌یابد. برای این منظور از یک کامپیوتر با مشخصات (RAM 1.00GB, Dual CPU 2.00GHZ) استفاده گردید و مشخص گردید که زمان آموزش شبکه عصبی موجکی نسبت به شبکه عصبی انتشاربرگشتی با داده‌های حاصل از شیوه اول (نیمه سمت راست)، از 88.922 ثانیه به 2.469 ثانیه کاهش می‌یابد. یعنی سرعت محاسبات مسأله سینماتیک وارون، با استفاده از شبکه موجکی حدود ۴۰ برابر شبکه عصبی انتشاربرگشتی است.

- Automation, vol. 1, pp. 19-26, Apr. 2000.
- [16] J. Molina-Vilaplana, J. L. Pedreño-Molina and J. Lopez-Coronado, "Hyper RBF model for accurate reaching in redundant robotic systems", *Neurocomputing*, vol. 61, pp. 495-501, Aug. 2004.
- [۱۷] حاج عباسی، نعمت‌الهی، "حل سینماتیک وارون روبات‌های دارای ابرافزونگی درجات آزادی به کمک منحنی قامت و شبکه‌های عصبی"، دوازدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، تهران، دانشگاه تربیت مدرس، اردیبهشت ۱۳۸۳.
- [18] J. Liu, Y. Wang, B. Li and S. Ma, "Neural network based kinematic control of the hyper-redundant snake-like manipulator", *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4491, pp. 767-775, 2007.
- [19] S. Yahya, H. A. F. Mohamed, M. Moghavvemi and S. S. Yang, "Inverse kinematics of an equal length links planar hyper redundant manipulator using neural networks", *SICE-ICROS publication*, vol. 9, pp. 4530-4535, 2009.
- [20] H. Moghbelli, A. Rahideh and A. A. Safavi, "Vector Control of Induction Machines Using Wavenet Based Controller For Traction Applications", *Iranian Journal of Science and Technology*, vol. 29, no. B1, pp. 23-31, 2005.
- [21] A. A. Safavi and J. A. Romagnoli, "Application of wavelet-based neural networks to the modeling and optimisation of an experimental distillation column" *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 10, no. 3, pp. 301-313, 1997.
- [22] S. G. Mallat, "A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, 1989.
- [23] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, IAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [24] V. Zakeri, V. Naghavi and A. A. Safavi, "Developing real-time wave-net models for non-linear time-varying experimental processes", *Computers and Chemical Eng.*, vol. 33, pp. 1379-1385, 2009.
- Improved Inverse Kinematic and Velocity Solution for Spatial Hyper-Redundant Robots", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 1, pp. 103-107, Feb. 2002.
- [7] M. Ueberle, N. Mock and M. Buss, VISHARD10, "A novel hyper-redundant haptic interface", 2004. HAPTICS '04. Proceedings of the 12th International Symposium on Haptic Intefaces for Virtula Environment and Teleoperator Systems, pp. 58-65, March 2004.
- [8] K. Koganezawa, "Hyper redundant manipulator using compound three-bar linkages", *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 19, pp. 320-327, 2005.
- [9] Q.-X. Jia, Q. Zhan, H.-X. Sun and L. Hong, "Implementation and kinematic control of a hyper-redundant mobile manipulator system", *Journal of Aeronautics*, vol. 19, no. 1, pp. 83-88, 2006.
- [10] M. Ueberle, N. Mock and M. Buss, "Design, control, and evaluation of a hyper-redundant haptic device", *Springer Tracts in Advanced Robotics*, vol. 31, pp. 25-44, 2007.
- [11] S. Yahya, H. A. F. Mohamed, M. Moghavvemi and S. S. Yang, "Motion planning of hyper redundant manipulators based on a new geometrical method", *Proceedings of the IEEE on industrial technology*, 2009.
- [12] H. A. F. Mohamed, S. Yahya, M. Moghavvemi and S. S. Yang, "A new inverse kinematics method for three dimensional redundant manipulators", *SICE-ICROS publication*, vol. 3, pp. 1557-1562, 2009.
- [13] S. Sreenivasan, P. Goel and A. Ghosal, "A real-time algorithm for simulation of flexible objects and hyper-redundant manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, pp. 454-466, 2010.
- [14] A. Ramadane-Cherif, D. Y. Meddah, V. Perdereau and M. Drouin, "Inverse Kinematic Solution based on Lyapunov Function for Redundant and non-Redundant Robots", *Proceeding of IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, pp. 226-231, Jul. 1997.
- [15] I. A. Gravagne and I. D. Walker, "Kinematic transformations for remotely- actuated planar continuum robots", *ICRA, '00. Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and*