

## پایدارسازی سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظر گرفتن اشباع محرک

مریم‌السادات اسدی‌نیا<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری؛ طاهره بینازاده<sup>۲</sup>، دانشیار

۱- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - m.asadnia@sutech.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - binazadeh@sutech.ac.ir

**چکیده:** این مقاله، تکنیک جدیدی به منظور پایدارسازی سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر بازه‌ای در حضور اشباع محرک ارائه می‌دهد که منجر به یافتن معیار پایداری وابسته به نرخ تغییرات تأخیر و کران بالا و پایین بازه تأخیر، خواهد شد. هدف از پایدارسازی، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت اشباع شده می‌باشد به نحوی که سیستم حلقه بسته، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد. تأخیر زمانی نامعلوم و متغیر در بازه‌ای با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مسئله پایدارسازی در دو حالت: مستقل از تأخیر و وابسته به بازه تأخیر بررسی می‌شود. ابتدا، سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک را در نظر گرفته، شرایط وجود کنترل‌کننده فیدبک حالت پایدار ساز مستقل از تأخیر با رویکرد LMI طی قضیه‌ای ارائه می‌شود. سپس، قضایای پایداری وابسته به بازه تأخیر، شرایط LMI جدیدی را به منظور تضمین پایداری سیستم حلقه بسته ارائه می‌دهند. علاوه بر آن، در قضایای ارائه‌گردیده تخمینی از ناحیه جذب به دست آورده می‌شود. در پایان، برای نشان دادن کارایی و کاربردی بودن رویکرد کنترلی ارائه‌شده، یک سیستم مدار الکتریکی با المان جزئی (به‌عنوان یک سیستم عملی سینگولار دارای تأخیر) و یک مثال عددی بکار گرفته شده و نتایج شبیه‌سازی‌ها دستاوردهای تئوری مقاله را تأیید نموده‌اند.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم‌های سینگولار، تأخیر نامعلوم و متغیر با زمان، پایداری مستقل از تأخیر، پایداری وابسته به بازه تأخیر، اشباع محرک.

## Stabilization of Time Varying Delay Singular Systems Subject to Actuator Saturation

M. S. Asadnia<sup>1</sup>, PhD Student; T. Binazadeh<sup>2</sup>, Associate Professor

1- Department of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: m.asadnia@sutech.ac.ir

2- Department of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: binazadeh@sutech.ac.ir

**Abstract:** This paper presents a new technique for the stabilization of singular systems with interval time delay in the presence of actuator saturation such that a stability criterion is obtained depending on the delay variation rate, upper and lower bounds. The purpose of stabilization is to design a saturated state feedback control law such that the closed-loop system is regular, impulse free and stable. The time delay has been considered to be time varying with known lower and upper bound. The problem of stabilization is studied in two cases. First, delay in-dependent stability theorems are proposed for singular time varying systems. Then, the delay-range-dependent conditions in terms of LMI are obtained which guarantees that the singular time-delay systems be admissible. Additionally, the proposed theorems give an estimate of domain of attraction of the closed-loop system. Finally, to demonstrate the effectiveness and applicability of the proposed control approach, a partial element equivalent circuit model (as a practical delayed singular system) and a numerical example are considered and simulation results have verified the theoretical results of this article.

**Keywords:** Singular systems, time varying delay, delay-independent stability, delay-range-dependent stability, actuator saturation.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۰۶

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۲۰، ۱۳۹۵/۰۵/۳۱ و ۱۳۹۵/۰۷/۰۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۰۵

نام نویسنده مسئول: طاهره بینازاده

نشانی نویسنده مسئول: ایران - شیراز - بلوار مدرس - دانشگاه صنعتی شیراز - دانشکده مهندسی برق و الکترونیک.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های سینگولار که با نام‌های متفاوتی مانند سیستم‌های جبری دینامیکی<sup>۱</sup>، توصیفی<sup>۲</sup>، تعمیم‌یافته<sup>۳</sup>، نیمه‌حالت<sup>۴</sup> و ضمنی<sup>۵</sup> نیز شناخته می‌شوند، ترکیبی از معادلات جبری و دیفرانسیلی هستند. این سیستم‌ها در مقایسه با سیستم‌های فضای حالت معمولی، در توصیف سیستم‌های فیزیکی تواناترند. این حقیقت موجب شده تا سیستم‌های سینگولار کاربردهای بسیاری در زمینه مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های فیزیکی از قبیل سیستم‌های قدرت [۱]، فرآیندهای شیمیایی [۲]، مهندسی هوا فضا [۳]، رباتیک [۴]، سیستم‌های مکانیکی [۵] و سیستم‌های اقتصادی [۶] داشته باشند.

به دلیل ساختار پیچیده‌تری که سیستم‌های سینگولار نسبت به سیستم‌های معمولی دارند، تکنیک‌های کنترلی بکار گرفته‌شده برای تحلیل این سیستم‌ها از پیچیدگی بیشتری برخوردارند. به عنوان مثال، در کنترل سیستم‌های سینگولار علاوه بر پایداری، به مسائل دیگری از جمله رگولار و ضربه‌آزادبودن نیز توجه می‌شود که اصطلاحاً به سیستم سینگولاری با این ویژگی‌ها یک سیستم مجاز می‌گویند. در سال‌های اخیر، تحقیقاتی در زمینه کنترل سیستم‌های سینگولار انجام شده است [۷-۹]. اکثر مقالات در این حوزه، بر پایه تعمیم و گسترش تئوری سیستم‌های غیرسینگولار به سیستم‌های سینگولار شکل گرفته‌اند.

در مقالات تئوری‌هایی در زمینه حل‌پذیری، کنترل‌پذیری، رویت‌پذیری و تحلیل پایداری سیستم‌های سینگولار خطی ارائه شده است [۱۰-۱۴]. تکنیک‌های مختلف کنترل بهینه [۱۵-۱۷] و کنترل مقاوم [۱۸، ۱۹] برای سیستم‌های سینگولار نیز مورد بررسی قرار گرفته است. مراجع [۲۰-۲۲] نیز به تحقیق پیرامون تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های سینگولار غیرخطی پرداخته‌اند.

یکی از عوامل اصلی که موجب ناپایداری و عملکرد ضعیف در سیستم‌های کنترل می‌شود، تأخیر است. مقالات متعددی در حوزه تحلیل و طراحی سیستم‌های دارای تأخیر معمولی ارائه شده‌اند [۲۳-۲۶]. تأخیر در سیستم‌های سینگولار مسئله کنترل را در این سیستم‌ها در مقایسه با سیستم‌های دارای تأخیر معمولی پیچیده‌تر می‌کند.

مراجع [۲۷] مسئله پایداری و پایدارسازی مقاوم را برای سیستم‌های سینگولار نامعین دارای تأخیر مورد بررسی قرار داده است. در مرجع مذکور تأخیر زمانی ثابت فرض شده و تنها به رویکرد مستقل از تأخیر در تحلیل پایداری اکتفا شده است. مسئله پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم‌های سینگولار نیز در مراجع [۲۸-۳۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین مرجع [۳۱] به طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی ثابت پرداخته است.

اخیراً، مفهوم جدیدی با اصطلاح "پایداری وابسته به بازه تأخیر"<sup>۶</sup> در مراجع [۳۱، ۳۲] برای سیستم‌های دارای تأخیر معمولی پیشنهاد شده

است. در این رویکرد، تأخیر به صورت متغیر با زمان متعلق به یک بازه با کران پایین و بالا معلوم، که در عمل نیز کاربردی‌تر است، در نظر گرفته می‌شود. تابع<sup>۷</sup> لیاپانوف مناسب برای سیستم مذکور چنان پیشنهاد می‌شود که منجر به یافتن معیار پایداری جدیدی که وابسته به نرخ تغییرات تأخیر و کران بالا و پایین بازه تأخیر است، شود. هرچند، مفهوم وابسته به بازه تأخیر به عنوان مختلف در حوزه تحلیل و طراحی سیستم‌های دارای تأخیر معمولی بسط داده شده است [۳۳]، اما مقالات بسیار اندکی در متون علمی وجود دارند که ایده وابسته به بازه تأخیر را برای سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر مطرح کرده باشند.

مسئله مهم دیگری که در سیستم‌های عملی وجود دارد و باید به آن توجه داشت، محدودیت روی دامنه ورودی محرک‌ها می‌باشد. چنانچه این قید در حین طراحی قانون کنترلی در نظر گرفته نشود پس از قرار گرفتن بلوک اشباع در خروجی کنترل‌کننده، در بسیاری از موارد پاسخ سیستم مطلوب نخواهد بود و حتی ممکن است سیستم حلقه بسته ناپایدار شود. لذا طراحی قانون کنترلی با در نظر گرفتن اشباع محرک از ضروریات سیستم‌های عملی است.

مراجع [۳۵، ۳۶] به طراحی کنترل‌کننده ساختار متغیر نرم برای سیستم‌های سینگولار با در نظر گرفتن اشباع محرک پرداخته‌اند. همچنین در [۳۷] برای سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر ثابت، کنترل‌کننده‌ای بر مبنای ویژگی غیرفعال بودن<sup>۸</sup> و با در نظر گرفتن اشباع محرک طراحی شده است. اخیراً نیز در حوزه کنترل مقاوم سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک تحقیقاتی صورت گرفته است [۳۸].

با توجه به بررسی‌های صورت‌پذیرفته، آنجا که قید اشباع محرک وجود دارد مسئله پایدارسازی سیستم‌های سینگولار همراه با تأخیر متغیر با زمان از دیدگاه پایداری وابسته به بازه تأخیر بررسی نشده است. این در حالیست که این دیدگاه در عمل معنی‌دارتر و کاربردی‌تر است. هدف از این مقاله، ارائه تکنیک جدیدی به منظور پایدارسازی سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر بازه‌ای در حضور اشباع محرک می‌باشد. برای این منظور قضایایی در این مقاله ارائه و اثبات می‌گردد که شرایط LMI جدیدی را به منظور تضمین پایداری سیستم حلقه بسته ارائه می‌دهند. علاوه بر آن، در قضایای ارائه گردیده تخمینی از ناحیه جذب نیز به دست آورده می‌شود. در پایان، برای نشان دادن کاربردی بودن رویکرد کنترلی ارائه‌شده، تکنیک پایدارسازی وابسته به بازه تأخیر پیشنهادشده برای یک سیستم مدار الکتریکی با المان جزئی (به‌عنوان یک سیستم سینگولار) بکار گرفته شده و نتایج شبیه‌سازی‌ها دستاوردهای تئوری مقاله را تأیید نموده‌اند. به طور خلاصه موارد زیر از دستاوردهای این مقاله می‌باشد:

۱. در نظر گرفتن تأخیر زمانی به صورت نامعلوم و متغیر در

بازه‌ای با کران بالا و پایین معلوم

برای ماتریس فیدبک  $F$ ، ناحیه‌ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به  $x$  خطی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_i x| \leq u_{i_{\max}}, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (5)$$

که در آن  $f_i$  - امین سطر ماتریس  $F$  می‌باشد. در این مقاله، به منظور کاهش محافظه‌کاری مسئله اشباع محرک، از تکنیک اضافه کردن ماتریس فیدبک کمکی بهره گرفته می‌شود. این تکنیک سابقاً نیز در مراجع مختلف [۳۲، ۳۹] برای پایدارسازی سیستم‌های همراه با تأخیر معمولی با قید اشباع ورودی بکار گرفته شده است. در اینجا، این تکنیک برای پایدارسازی سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک استفاده می‌شود.

لم ۱: [۴۰] برای دو ماتریس  $F, H \in \mathbb{R}^{m \times n}$  و بردار  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ ، یک مجموعه ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Psi(\alpha, F, H) = \left\{ W \in \mathbb{R}^{m \times n} : W = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1 + (1 - \alpha_1) h_1 \\ \vdots \\ \alpha_m f_m + (1 - \alpha_m) h_m \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

که در آن  $h_i$ ،  $i$ -امین سطر ماتریس فیدبک کمکی  $H$  و  $\alpha_i$ ،  $i$ -امین المان بردار  $\alpha \in \Psi(\alpha)$  می‌باشد. همچنین مجموعه  $\Psi(\alpha)$  به صورت  $\Psi(\alpha) = \{\alpha \in \mathbb{R}^m : \alpha_i = 0 \text{ or } 1\}$  تعریف می‌شود. از بردار  $\alpha \in \Psi(\alpha)$  برای انتخاب سطرهای ماتریس  $F$ ،  $H$  و تشکیل ماتریس جدید  $W(\alpha, F, H)$  استفاده می‌گردد. به منظور برآورده شدن قید اشباع محرک نیاز است که ماتریس فیدبک کمکی  $H$  شرط کمکی  $H$ ، ناحیه‌ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به  $x$  خطی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(H) = \{x \in \mathbb{R}^n : |h_i x| \leq u_{i_{\max}}, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (7)$$

یک بیضی از میان زیرمجموعه‌های مجموعه  $\Gamma(H)$  به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\mathcal{E}(P, 1) = \{x : x^T P x \leq 1\} \quad (8)$$

که در آن  $P > 0$  ماتریس مثبت معین و متقارن است. یافتن ماتریس  $H$  به نحوی که شرط  $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$  به ازای  $x$  های متعلق به مجموعه  $\mathcal{E}(P, 1)$  برآورده شود معادل با حل LMI زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & h_i \\ * & u_{i_{\max}} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

که در این صورت رابطه  $\sigma(u) = W(\alpha, F, H)x(t)$  برقرار است.

تعریف ۱: [۴۱] سیستم سینگولار تأخیر زمانی (۱۰) را در نظر بگیرید.

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \quad (10)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0]$$

۱- زوج  $(E, A)$  را رگولار گویند اگر  $\det(sE - A)$  متحد با صفر نباشد.

۲- زوج  $(E, A)$  را ضربه آزاد گویند اگر  $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank} E$

۲. ارائه قضایای پایدارسازی به گونه‌ای که منجر به یافتن معیار پایداری وابسته به نرخ تغییرات تأخیر و کران بالا و پایین بازه تأخیر شود

۳. یافتن تخمینی از ناحیه جذب متناظر برای سیستم حلقه بسته

۴. پیاده‌سازی رویکرد مطرح‌شده در مقاله برای یک سیستم عملی سینگولار تاخیری در حضور اشباع محرک

ادامه مقاله بدین شرح می‌باشد. ابتدا در بخش ۲، سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک معرفی و تعاریف اولیه و قضایای پایه مربوط به آن مرور خواهد شد. سپس، قضیه پایداری مستقل از تأخیر در بخش ۳ و قضایای پایداری وابسته به بازه تأخیر در بخش ۴ برای این سیستم‌ها ارائه و اثبات خواهد شد. در انتها، برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه‌شده، در بخش ۵ به بررسی و شبیه‌سازی یک مثال کاربردی پرداخته خواهد شد. در آخر نیز، جمع‌بندی مطالب و نتیجه‌گیری آورده خواهد شد.

## ۲- توصیف سیستم و تعاریف اولیه

سیستم سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان و قید اشباع محرک (۱) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B\sigma(u(t)) \quad (1)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0]$$

که در آن  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت،  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی و ماتریس‌های  $A$ ،  $A_d$  و  $B$  ثابت، حقیقی و معلوم با ابعاد مناسب می‌باشند. همچنین  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $\text{rank} E = r < n$ .  $\phi(t)$  نیز بردار شرایط اولیه است که المان‌های آن توابع پیوسته می‌باشند. تأخیر زمانی  $d(t)$  به صورت نامعلوم و متغیر در بازه‌ای با کران بالا و پایین معلوم و با نرخ تغییرات محدود در نظر گرفته می‌شود.

$$0 < d_1 \leq d(t) \leq d_2, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq \mu \quad (2)$$

که در آن  $d_1$  و  $d_2$  کران پایین و بالا برای تأخیر زمانی و  $\mu$  نرخ تغییرات تأخیر زمانی می‌باشند. به علاوه، تابع  $\sigma: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  تابع اشباع می‌باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\sigma(u) = [\sigma(u_1) \quad \sigma(u_2) \quad \dots \quad \sigma(u_m)]^T \quad (3)$$

که در آن  $\sigma(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{u_{i_{\max}}, |u_i|\}$  است. در این مقاله، قانون کنترل سیستم (۱) به صورت فیدبک حالت خطی  $u = Fx$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین معادلات توصیف سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B\sigma(Fx(t)) \quad (4)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0]$$

$$\Sigma_{11} = -AP^T - BW(\alpha, Y, L) - PA^T - (BW(\alpha, F, H))^T - Q, \quad (15)$$

$$\Sigma_{12} = -A_d P^T, \quad \Sigma_{22} = (1 - \mu)Q$$

آنگاه سیستم (۱) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز  $F = YP^{-T}$  مجاز خواهد بود. همچنین مجموعه  $M(\phi) \leq 1$  یک مجموعه پایا درون ناحیه جذب می‌باشد:

$$M(\phi) = \max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P^{-1}E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-T})) \quad (16)$$

#### اثبات:

با جایگذاری قانون کنترل فیدبک حالت در سیستم (۱)، معادلات حلقه بسته (۴) حاصل می‌شود. تابع  $V(x_t)$  زیر به عنوان کاندید لیاپانوف برای سیستم حلقه بسته (۴) پیشنهاد می‌شود:

$$V(x_t) = x^T(t)P^{-1}Ex(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(s)P^{-1}QP^{-T}x(s)ds \quad (17)$$

که در آن  $x_t = x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$  می‌باشد. مشتق  $V(x_t)$  در راستای مسیر سیستم (۴) به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= (E\dot{x}(t))^T P^{-T}x(t) + x^T(t)P^{-1}E\dot{x}(t) \\ &+ x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) - (1 - \dot{d}(t)) \\ &\cdot x^T(t - d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t - d(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[AP^T + PA^T + Q \\ &+ BW(\alpha, FP^T, HP^T) \\ &+ (BW(\alpha, FP^T, HP^T))^T]P^{-T}x(t) \\ &+ 2x^T(t)P^{-1}A_d x(t - d(t)) \\ &- (1 - \mu)x^T(t - d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t - d(t)) \end{aligned} \quad (19)$$

با انتخاب  $HP^T = L$  و  $FP^T = Y$  و جایگزینی در روابط فوق، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[AP^T + PA^T + BW(\alpha, Y, L) \\ &+ (BW(\alpha, Y, L))^T + Q]P^{-T}x(t) \\ &+ 2x^T(t)P^{-1}A_d x(t - d(t)) \\ &- (1 - \mu)x^T(t - d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t - d(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

شرط مجاز بودن سیستم حلقه بسته (۴) آن است که  $\dot{V}(x_t) < 0$  باشد. بنابراین:

لم ۲: [۲۷] فرض کنید زوج  $(E, A)$  رگولار و ضربه آزاد باشد، آنگاه پاسخ سیستم (۱۰) بر روی بازه  $[0, \infty)$  یکتا و ضربه آزاد خواهد بود.

#### تعریف ۲: [۲۷]

- سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱۰) را رگولار و ضربه آزاد گویند، اگر زوج  $(E, A)$  رگولار و ضربه آزاد باشد.
- سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱۰) را پایدار گویند، اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  اسکالر  $\delta(\varepsilon) > 0$  وجود داشته باشد به نحوی که برای هر شرایط اولیه هم‌ساز  $\phi(t)$  که در شرط  $\sup_{-d_2 \leq t \leq 0} \|\phi(t)\| \leq \delta(\varepsilon)$  صدق می‌کند، پاسخ سیستم (۱۰) شروط زیر را برآورده کند:
 
$$\|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{for } t \geq 0 \quad (11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$$
- سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱۰) را مجاز گویند، اگر رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

هدف از این مقاله، طراحی کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده برای سیستم (۱) می‌باشد به نحوی که سیستم حلقه بسته برای همه تاخیرهای نامعلوم متغیر با زمان که در شرط (۲) صدق می‌کنند، مجاز باشد. مسئله در دو حالت: مستقل از تأخیر و وابسته به بازه تأخیر بررسی می‌شود. ابتدا، سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک را در نظر گرفته، شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایدار ساز مستقل از تأخیر با رویکرد LMI طی قضیه‌ای ارائه می‌شود. سپس، قضایای پایداری وابسته به بازه تأخیر، شرایط LMI را به منظور تضمین پایداری سیستم حلقه بسته ارائه می‌دهند. علاوه بر آن، در قضایای ارائه گردیده تخمینی از ناحیه جذب نیز به دست می‌آید.

### ۳- پایداری مستقل از تأخیر سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک

در این قسمت، بر پایه ایده لم (۱)، شرایط وجود کنترل کننده پایدار ساز مستقل از تأخیر برای سیستم (۱) با استفاده از رویکرد LMI و تخمین متناظری از ناحیه جذب طی قضیه زیر ارائه می‌شود.

**قضیه ۱:** سیستم سینگولار دارای تأخیر و قید اشباع محرک (۱) را با شرط داده شده (۲) در نظر بگیرید، اگر ماتریس‌های  $L, Y, Q > 0$  و ماتریس  $P$  وجود داشته باشد به نحوی که:

$$EP^T = PE^T \geq 0 \quad (12)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P^{-1}E \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

که در آن:

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (24)$$

که در آن  $d_{12} = d_2 - d_1$  و

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} \\ * & * & * & * & \Phi_{55} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix}$$

و  $\Phi_{ij}$  ها برابرند با:

$$\Phi_{11} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T + AT + BW(\alpha, Y, L) + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T,$$

$$\Phi_{12} = N_2^T - N_1 + S_1 - M_1 + A_d T,$$

$$\Phi_{13} = M_1 + N_3^T, \quad \Phi_{14} = -S_1 + N_4^T,$$

$$\Phi_{15} = N_5^T - ET + P + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T,$$

$$\Phi_{22} = (\mu - 1)Q_3 + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T, \quad (26)$$

$$\Phi_{23} = M_2 - N_3^T + S_3^T - M_3^T$$

$$\Phi_{24} = -S_2 - N_4^T + S_4^T - M_4^T,$$

$$\Phi_{25} = T^T A_d^T + S_5^T - N_5^T - M_5^T,$$

$$\Phi_{33} = -Q_1 + M_3 + M_3^T,$$

$$\Phi_{34} = -S_3 + M_4^T, \quad \Phi_{35} = M_5^T$$

$$\Phi_{44} = -Q_2 - S_4 - S_4^T, \quad \Phi_{45} = -S_5^T,$$

$$\Phi_{55} = d_2 Z_1 + d_{12} Z_2 - 2ET$$

آنگاه سیستم سینگولار دارای تأخیر زمانی (۱) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز  $F = YP^{-T}$ ، مجاز خواهد بود.

همچنین مجموعه  $L(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  تخمینی از ناحیه جذب این سیستم می‌باشد:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \max_{\theta \in (0, d_2]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + d_1 \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_2 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_3 T^{-1}) \right] + \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \left[ \frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(T^{-1}Z_1 T^{-1}) + \frac{d_{12}}{2} (d_1 + d_2) \lambda_{\max}(T^{-1}Z_2 T^{-1}) \right] \right\} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} V(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1} \left[ AP^T + PA^T + BW(\alpha, Y, L) \right. \\ &\quad \left. + (BW(\alpha, Y, L))^T + Q \right] P^{-T} x(t) \\ &\quad + x^T(t)P^{-1}A_d P^T P^{-T} x(t-d(t)) \\ &\quad + x^T(t-d(t))P^{-1}PA_d^T P^{-T} x(t) \\ &\quad - (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T} x(t-d(t)) \\ &= -\xi^T(t)\Sigma\xi(t) < 0 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن  $\xi^T(t) = [x^T(t)p^{-1} \quad x^T(t-d(t))p^{-1}]^T$  در رابطه (۱۳) تعریف شده است. حال اگر LMI (۱۳) برقرار باشد آنگاه  $\dot{V}(x_t) \leq -\lambda_{\min}(\Sigma)\|x_t\|^2$  داشته:

$$\begin{aligned} x^T P^{-1} E x &\leq V(x_t) < V(x_t(0)) \\ &= \phi^T(0)P^{-1}E\phi(0) + \int_{-d(t)}^0 \phi^T(\theta)P^{-1}QP^{-T}\phi(\theta)ds \\ \dots &\leq \max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P^{-1}E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-T})) = M(\phi) \end{aligned} \quad (22)$$

روابط فوق اذعان می‌دارد که اگر  $M(\phi) \leq 1$  باشد حتماً  $x^T P^{-1} E x \leq 1$  خواهد بود، بنابراین همه مسیرهای  $x(t)$  که از  $M(\phi) \leq 1$  شروع می‌شوند درون  $x^T P^{-1} E x \leq 1$  باقی می‌ماند و بدان وسیله قید  $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$  به سبب نامساوی ماتریسی (۱۴) برآورده می‌شود.

#### ۴- پایداری وابسته به بازه تأخیر سیستم‌های سینگولار همراه با تأخیر و قید اشباع محرک

در این بخش، مسئله پایدارسازی برای سیستم (۱) در دو حالت بررسی می‌شود. حالت اول، تأخیر زمانی متغیر در بازه‌ای با کران بالا و پایین معلوم به صورت معادله (۲) در نظر گرفته می‌شود و طی قضیه‌ای شرایط LMI وجود کنترل کننده پایدار ساز به نحوی که وابسته به نرخ تغییرات تأخیر و کران بالا و پایین بازه تأخیر می‌باشد، ارائه می‌گردد. سپس تأخیر زمانی، ثابت در نظر گرفته می‌شود و معیار وجود کنترل کننده پایدار ساز وابسته به تأخیر طی قضیه‌ای به دست می‌آید.

**قضیه ۴:** سیستم (۱) را با شرط داده شده (۲) در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های  $Y, L, P > 0, Q_i > 0, i = 1, 2, 3, Z_i > 0, i = 1, 2, T > 0$  و  $N_i, M_i, S_i, i = 1, \dots, 5$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحوی که LMI (۲۳)، (۲۴) برقرار باشند.

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\Phi & -d_2 N & -d_{12} M & -d_{12} S \\ * & d_2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & d_{12}(Z_1 + Z_2) & 0 \\ * & * & * & d_{12} Z_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (23)$$

$$d_2 \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(s) X \xi(s) ds \geq 0, \quad (33)$$

where  $0 < d_1 \leq d(t) \leq d_2$

مشق  $V(x_t)$  در راستای مسیر سیستم حلقه بسته سینگولار (۴) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{V}(x_t) = 2\dot{x}^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) + \sum_{i=1}^2 \{x^T(t) T^{-1} Q_i T^{-1} x(t) \quad (34)$$

$$- x^T(t-d_i) T^{-1} Q_i T^{-1} x(t-d_i) + x^T(t) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(t)$$

$$- (1-d(t)) x^T(t-d(t)) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(t-d(t))$$

$$+ d_2 \dot{x}^T(t) T^{-1} Z T^{-1} \dot{x}(t) - \int_{t-d_2}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z T^{-1} \dot{x}(s) ds$$

$$+ d_{12} \dot{x}^T(t) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(t) - \int_{t-d(t)}^{t-d_1} \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(s) ds$$

با توجه به برقراری روابط (۲۹) تا (۳۳)، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(x_t) \leq \xi^T(t) \{ \Phi + d_2 N Z_1^{-1} N^T + d_{12} S (Z_1 + Z_2)^{-1} S^T \quad (35)$$

$$+ d_{12} M Z_2^{-1} M^T \} \xi(t)$$

$$- \int_{t-d(t)}^t [\xi^T(t) N + \dot{x}(s) Z_1] Z_1^{-1} [\xi^T(t) N + \dot{x}(s) Z_1]^T ds$$

$$- \int_{t-d_2}^{t-d(t)} [\xi^T(t) S + \dot{x}(s) (Z_1 + Z_2)] (Z_1 + Z_2)^{-1}$$

$$[\xi^T(t) N + \dot{x}(s) (Z_1 + Z_2)]^T ds$$

$$- \int_{t-d(t)}^{t-d_1} [\xi^T(t) M + \dot{x}(s) Z_2] Z_2^{-1} [\xi^T(t) M + \dot{x}(s) Z_2]^T ds$$

$$\leq \xi^T(t) \{ \Phi + d_2 N Z_1^{-1} N^T + d_{12} S (Z_1 + Z_2)^{-1} S^T$$

$$+ d_{12} M Z_2^{-1} M^T \} \xi(t) = -\xi^T(t) \Theta \xi(t)$$

که در آن  $\xi(t) = [\xi_{11} \quad \xi_{12} \quad \xi_{13} \quad \xi_{14} \quad \xi_{15}]$  و

$$\xi_{11} = x^T(t) T^{-1}, \quad \xi_{12} = x^T(t-d(t)) T^{-1}, \quad \xi_{13} = x^T(t-d_1) T^{-1},$$

$$\xi_{14} = x^T(t-d_2) T^{-1}, \quad \xi_{15} = \dot{x}^T(t) T^{-1},$$

برای آنکه سیستم (۳) مجاز باشد می‌بایست  $\Theta > 0$  باشد. با استفاده از قضیه متمم شر می‌توان به راحتی نشان داد که برقراری شرط  $\Theta > 0$  معادل با LMI زیر است:

**اثبات:** با جایگذاری قانون کنترل فیدبک حالت  $u(t) = W(\alpha, F, H)$  در سیستم (۱)، معادلات حلقه بسته (۴) حاصل می‌شود. تابع زیر، جهت کاندید لیاپانوف برای سیستم حلقه بسته (۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$V(x_t) = x^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{t-d_i}^t x^T(s) T^{-1} Q_i T^{-1} x(s) ds + \int_{t-d(t)}^t x^T(s) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(s) ds + \int_{-d_2 t + \theta}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-d_2 t + \theta}^{t-d_1} \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta \quad (28)$$

که برای هر ماتریس  $\bar{M}_i, i = 1, \dots, 5, \bar{S}_i, i = 1, \dots, 5, \bar{N}_i, i = 1, \dots, 5$  و  $T > 0$  عبارات زیر برقرار است:

$$2[x^T(t) T^{-1} + \dot{x}^T(t) T^{-1}] \times [-E\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + BW(\alpha, F, H)x(t)] = 0 \quad (29)$$

$$2[x^T(t) \bar{N}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{N}_2 + x^T(t-d_1) \bar{N}_3 + x^T(t-d_2) \bar{N}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{N}_5] \times \left[ x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] = 0 \quad (30)$$

$$2[x^T(t) \bar{S}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{S}_2 + x^T(t-d_1) \bar{S}_3 + x^T(t-d_2) \bar{S}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{S}_5] \times \left[ x(t-d(t)) - \int_{t-d_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds - x(t-d_2) \right] = 0 \quad (31)$$

$$2[x^T(t) \bar{M}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{M}_2 + x^T(t-d_1) \bar{M}_3 + x^T(t-d_2) \bar{M}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{M}_5] \times \left[ x(t-d_1) - \int_{t-d(t)}^{t-d_1} \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] = 0 \quad (32)$$

در روابط فوق  $\bar{S}_i = T^{-1} S_i T^{-1}, \bar{N}_i = T^{-1} N_i T^{-1}, \bar{M}_i = T^{-1} M_i T^{-1}$  برای  $i = 1, \dots, 5$  می‌باشد.

از طرف دیگر، برای هر ماتریس متقارن مثبت نیمه‌معین  $X$  رابطه زیر برقرار است [۳۰]:

$$\Lambda(\phi, \dot{\phi}) = \max_{\theta \in [0, \tau]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1}) \right] + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(T^{-1}ZT^{-1}) \right\} \quad (42)$$

**اثبات:**  $V(x_t)$  را کاندید لیپانوف برای سیستم حلقه بسته (۴) با تأخیر زمانی ثابت  $\tau$  در نظر می‌گیریم:

$$V(x_t) = x^T(t)T^{-1}PT^{-1}x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)T^{-1}QT^{-1}x(s)ds \quad (43)$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)T^{-1}ZT^{-1}\dot{x}(s)dsd\theta$$

با بکار بستن روندی مشابه آنچه در قضیه (۲) آورده شد، نامساوی ماتریسی خطی (۳۸) به دست خواهد آمد. اگر LMI (۳۸) برقرار باشد، آنگاه:

$$x^T Px \leq V(x_t) < V(x_t(0)) \quad (44)$$

$$\leq \max_{\theta \in [0, \tau]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1}) \right] \right.$$

$$\left. + \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \lambda_{\max}(T^{-1}ZT^{-1}) \right] \right\} = \Lambda(\phi, \dot{\phi})$$

حال اگر  $\Lambda(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  باشد حتماً  $x^T Px \leq 1$  خواهد بود در نتیجه همه مسیره‌های  $x(t)$  که از  $\Lambda(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  شروع می‌شوند درون  $x^T Px \leq 1$  باقی می‌ماند و به این طریق قید  $|h_i x| \leq u_{i, \max}$  به سبب نامساوی ماتریسی (۲۴) برآورده می‌شود.

## ۵- مثال و شبیه‌سازی

### مثال ۱:

در نظریه مدارهای الکتریکی، مدل‌های مدارهای خطوط انتقال و نیز مدار معادل برخی المان‌های جزئی<sup>۹</sup> (PEEC)، به معادلات دیفرانسیل تأخیردار خنثی<sup>۱۰</sup> (NDE) منجر می‌شود [۴۲]. اما از آنجا که حل عددی معادلات تأخیری نوع NDE در مواردی بسیار سخت است، رویکرد پیشنهادی در مراجع مختلف [۴۳، ۳۱] آن است که ابتدا معادلات را به صورت معادلات سینگولار تأخیری از نوع تأخیردار عقب‌افتاده<sup>۱۱</sup> (RDE) بازنویسی کرده و سپس آنها را حل نمود.

یک مدار الکتریکی با معادل PEEC با معادلات زیر قابل توصیف است [۴۴]:

$$C_0 \dot{y}(t) + G_0 y(t) + C_1 \dot{y}(t-d(t)) + G_1 y(t-d(t)) = B_0 \mu(t) \quad (45)$$

$$y(t) = \phi(t); \quad t \in (-d_2, 0)$$

که در آن  $C_0$  یک ماتریس قطری و  $G_0$ ،  $C_1$  و  $G_1$  ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. همانطور که واضح است این دسته معادلات تأخیری از نوع NDE می‌باشند. معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{y}(t) = \bar{G}_0 y(t) + \bar{C}_1 \dot{y}(t-d(t)) + \bar{G}_1 y(t-d(t)) + \bar{B}_0 \mu(t) \quad (46)$$

$$y(t) = \phi(t); \quad t \in (-d_2, 0)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\Phi & -d_2 N & -d_{12} M & -d_{12} S \\ * & d_2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & d_{12}(Z_1 + Z_2) & 0 \\ * & * & * & d_{12} Z_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (36)$$

حال اگر نامساوی ماتریسی فوق برقرار باشد آنگاه  $V(x_t) \leq -\lambda_{\min}(\Delta) \|x_t\|^2$  و متعاقباً خواهیم داشت:

$$x^T Px \leq V(x_t) < V(x_t(0)) \quad (37)$$

$$\leq \max_{\theta \in [0, d_1]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + d_1 \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1}) \right] \right.$$

$$\left. + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_3 T^{-1}) \right] + \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \left[ \frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(T^{-1}ZT^{-1}) \right]$$

$$\left. + \frac{d_{12}}{2} (d_1 + d_2) \lambda_{\max}(T^{-1}Z_2 T^{-1}) \right\} = L(\phi, \dot{\phi})$$

بنابراین اگر مجموعه  $L(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  باشد حتماً  $x^T Px \leq 1$  خواهد بود و همه مسیره‌های  $x(t)$  که از  $L(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  شروع می‌شوند درون  $x^T Px \leq 1$  باقی می‌ماند و بدان وسیله قید  $|h_i x| \leq u_{i, \max}$  به سبب نامساوی ماتریسی (۲۴) برآورده می‌شود.

**قضیه ۳:** سیستم سینگولار تأخیری (۱) را با  $d_1 = d_2 = \tau$  و  $\mu = 0$  در نظر بگیرید، اگر ماتریس‌های  $L$ ،  $Y$ ،  $Q$ ،  $Z$  و  $P > 0$  و ماتریس‌های  $N_i$ ،  $i = 1, \dots, 3$  و  $T > 0$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحوی که:

$$Y = \begin{bmatrix} -\Phi & -\tau N \\ -\tau N^T & \tau Z \end{bmatrix} > 0 \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i, \max} & l_i \\ * & u_{i, \max} \end{bmatrix} P \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (39)$$

که در آن:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ * & * & \Phi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

$$\Phi_{11} = AT + BW(\alpha, Y, L) + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + N_1 + N_1^T + Q \quad (41)$$

$$\Phi_{12} = A_d T - N_1 + N_2^T$$

$$\Phi_{13} = (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + P - ET + N_3^T$$

$$\Phi_{22} = -N_2 - N_2^T - Q, \quad \Phi_{23} = -N_3 + TA_d^T$$

$$\Phi_{33} = \tau Z - 2ET$$

آنگاه سیستم سینگولار همراه با تأخیر و اشباع محرک (۱)، به ازای بهره کنترل‌کننده فیدبک پایدارساز  $F = YT^{-1}$  مجاز خواهد بود و مجموعه  $\Lambda(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  تخمینی از ناحیه جذب است.

روابط فوق، پارامترهای سیستم سینگولار تأخیری RDE معادل به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ -1 & -1.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در ادامه دو سناریوی مختلف ارائه می‌گردد و در هر مورد بر اساس تکنیک‌های پیشنهادی در مقاله، کنترل‌کننده مناسب طراحی و عملکرد مطلوب آن نشان داده می‌شود.

### سناریوی اول:

سیستم سینگولار دارای تأخیر با پارامترهای (۵۲) لحاظ می‌گردد. تأخیر زمانی  $d(t)$  از روابط زیر پیروی می‌کند:

$$1 \leq d(t) \leq 3, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq 1.5 \quad (53)$$

همچنین سیگنال کنترلی می‌بایست قید زیر را برآورده سازد:

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \quad (54)$$

هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت

$$u(t) = [\alpha f + (1-\alpha)h]x(t)$$

قید اشباع، سیستم حلقه بسته مجاز نیز باشد. از حل LMI های (۲۳) و (۲۴) با استفاده از نرم افزار MATLAB نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = 0, \quad l = [0.3057 \quad 0.2035 \quad -0.5910 \quad -0.6129]$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.4696 & -0.2641 & 0.0756 & 0.0451 \\ -0.2641 & 0.7151 & -0.0708 & -0.0437 \\ 0.0756 & -0.0708 & 1.1173 & -0.0242 \\ 0.0451 & -0.0437 & -0.0242 & 1.1165 \end{bmatrix} \quad (55)$$

طبق قضیه (۲) داریم:

$$h = l \times T^{-1} = [1.1462 \quad 0.6148 \quad -0.5802 \quad -0.5837] \quad (56)$$

در نتیجه کنترل‌کننده فیدبک حالت پایدارساز برای سیستم

داده‌شده (بر اساس قضیه ۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = [1.1462 \quad 0.6148 \quad -0.5802 \quad -0.5837]x(t) \quad (57)$$

برای بررسی کارایی کنترل‌کننده طراحی‌شده، سیستم حلقه بسته

سینگولار را با پارامترهای داده‌شده تحت کنترل‌کننده (۵۷) به ازای

تابع اولیه  $\phi(t) = [4 \quad 2 \quad 1 \quad 1]^T, t \in [-3, 0]$  شبیه‌سازی کرده و

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۵-۲ آورده شده است.

که در آن بردار  $y(t) \in R^n$  و شامل ولتاژ و جریان گره‌های مدار می‌باشد، همچنین تمامی ماتریس‌های  $\bar{C}_1, \bar{G}_0, \bar{G}_1, \bar{B}_0$  دارای مقادیر حقیقی با ابعاد مناسب هستند.

با تعریف:

$$\eta(t) = y(t), \quad \zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) \quad (47)$$

دسته معادلات سیستم (۴۶) قابل تبدیل به معادلات سینگولار

تأخیری RDE به صورت زیر خواهد بود:

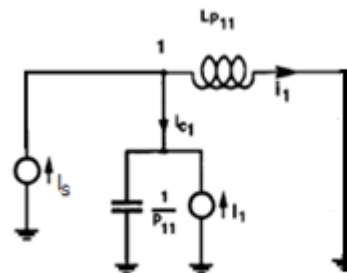
$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t) \quad (48)$$

$$\begin{cases} \eta(t) = \phi(t), & t \in (-d_2, 0) \\ \zeta(t) = \dot{\phi}(t) - \bar{G}_0 \phi(t), & t \in (-d_2, 0) \end{cases}$$

که در آن  $x(t) = [\eta^T(t) \quad \zeta^T(t)]^T$  و  $\phi(t)$  بردار شرایط اولیه است که المان‌های آن توابع پیوسته مشتق پذیر می‌باشند و

$$E = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{G}_0 & I_{n \times n} \\ 0 & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{C}_1 + \bar{G}_1 \bar{G}_0 & \bar{G}_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_0 \end{bmatrix}$$



شکل ۱: نمونه یک مدار PEEC [۴۳]

مدار الکتریکی با معادل PEEC شامل یک سلف و یک خازن که در شکل (۱) نشان داده شده است را با پارامترهای داده‌شده زیر در نظر بگیرید [۴۳]:

$$\bar{G}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

بردارهای  $\eta(t)$  و  $\zeta(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta(t) = y(t) = [x_1 \quad x_2]^T \quad (51)$$

$$\zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) = [x_3 \quad x_4]^T$$

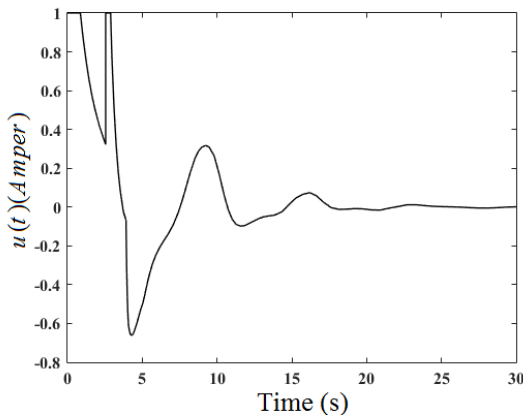
که در آن  $x_1$  ولتاژ خازن و  $x_2$  جریان سلف است و متغیرهای  $x_3$  و

$x_4$  که فقط تعریف شده‌اند تا سیستم با معادلات تأخیری نوع NDE را

به سیستم با معادلات سینگولار دارای تأخیر تبدیل کنند. با توجه به



از آن است که تکنیک پیشنهاد شده در مقاله از کارایی لازم برای کنترل سیستم‌های سینگلار دارای تأخیر متغیربازمان و در حضور اشباع محرک برخوردار است.



شکل ۵: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی در سناریوی اول

### سناریوی دوم:

در این بخش، مدل PEEC با پارامترهای داده شده (۵۲) را با تأخیر ثابت به صورت:

$$d_1 = d_2 = 1.5 \quad (58)$$

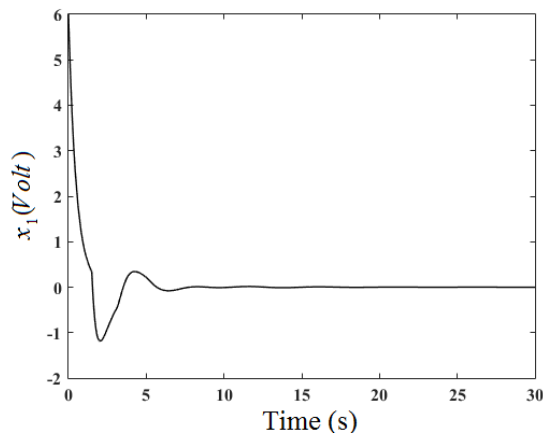
و سیگنال کنترلی با دامنه محدودتر با رابطه:

$$|u| \leq 0.1 \quad (59)$$

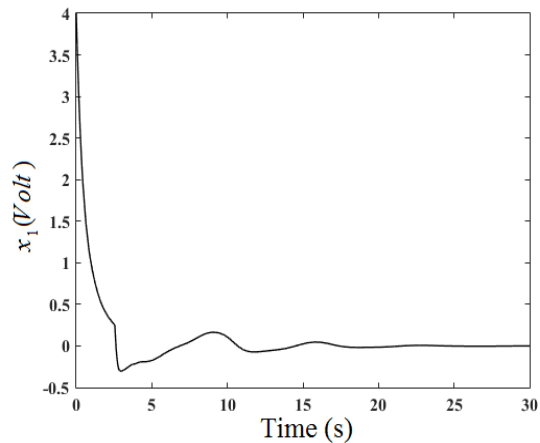
در نظر گرفته و برای طراحی کنترل کننده مشابه آنچه در سناریوی قبل گفته شد عمل می‌کنیم. با مد نظر قراردادن قضیه (۲) و با کمک نرم افزار MATLAB نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$u(t) = [0.0780 \quad 0.0212 \quad -0.0423 \quad -0.0557] x(t) \quad (60)$$

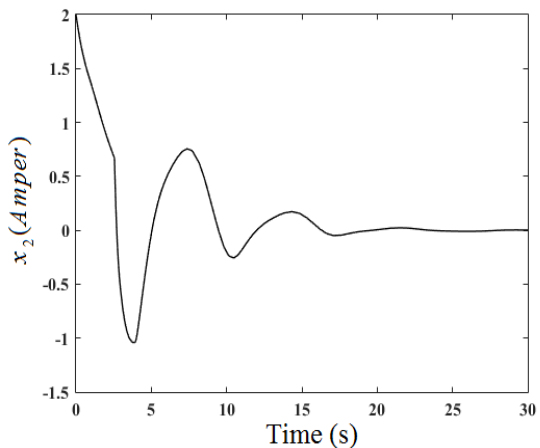
به منظور تحلیل کارایی کنترل کننده طراحی شده (۶۰)، سیستم حلقه بسته سینگلار را با پارامترهای داده شده در رابطه (۵۲) و با تأخیر ثابت، بسط ازای تابع اولیه شکل های ۶-۹ نتایج حاصل از شبیه سازی ها را نشان می‌دهد.



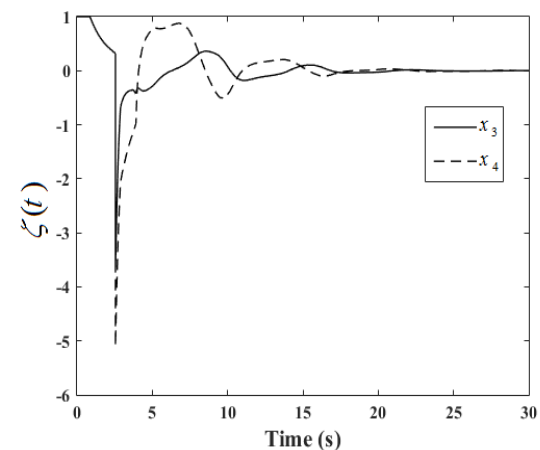
شکل ۶: پاسخ زمانی متغیر حالت  $x_1$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



شکل ۲: پاسخ زمانی متغیر حالت  $x_1$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۳: پاسخ زمانی متغیر حالت  $x_2$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۴: پاسخ زمانی متغیرهای حالت  $\zeta(t) = [x_3 \quad x_4]^T$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول

همانطور که در شکل (۵) مشاهده می‌کنید سیگنال کنترلی به اشباع رفته اما با این وجود کنترل کننده طراحی شده در این بخش منجر به پایداری سیستم حلقه بسته گردیده است. نتایج حاصل حاکی

کارایی مطلوب قضایای ارائه شده در این مقاله برای کنترل سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر ثابت عملی دارد.

**مثال ۲:**

سیستم سینگولار دارای تأخیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t-1.2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (61)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-1.2, 0]$$

سیستم (۶۱) در مرجع [۴۵] مورد مطالعه قرار گرفته و بر اساس قضایا و تکنیک‌های ارائه شده در این مرجع، در غیاب اشباع محرک برای سیستم مذکور کنترل کننده‌ای به فرم زیر طراحی شده است:

$$u(t) = [42.6854 \quad -0.3426] x(t) \quad (62)$$

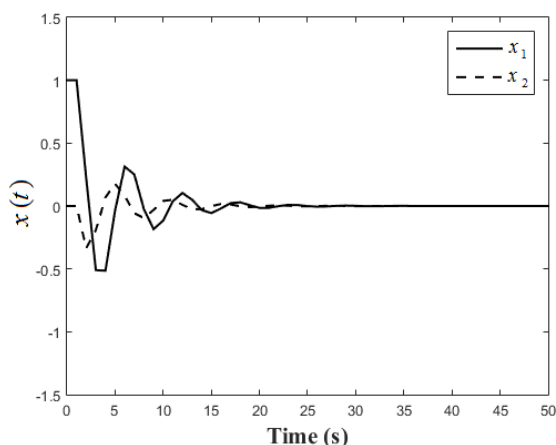
اما با توجه به این نکته که دامنه بسیاری از سیستم‌های عملی می‌بایست محدود باشد، در این بخش سیستم (۶۱) را با قید اشباع محرک (۶۳) در نظر گرفته و با استفاده از نتایج به دست آمده از قضیه (۳) به طراحی کنترل کننده پرداخته می‌شود.

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \quad (63)$$

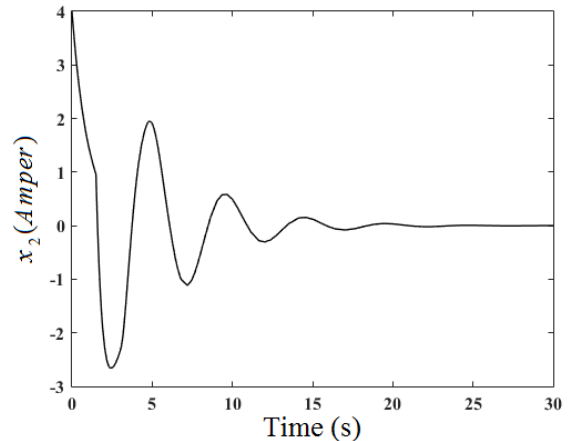
از حل LMI های (۳۸) و (۳۹) به کمک نرم افزار MATLAB قانون کنترل فیدبک حالت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(t) = [-0.1944 \quad 1.0681] x(t) \quad (64)$$

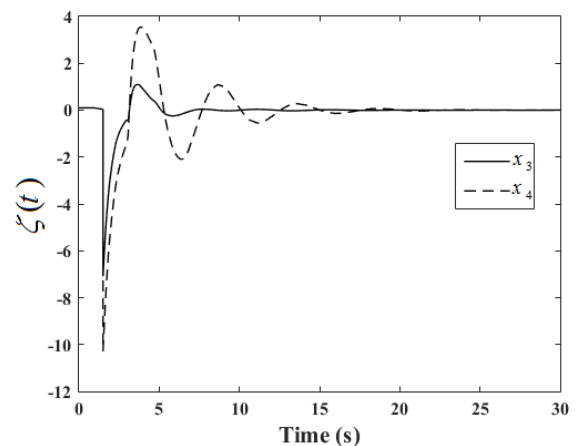
با هدف ارزیابی کارایی کنترل کننده فوق، سیستم (۶۱) را تحت کنترل کننده‌های (۶۲) و (۶۴) به ازای تابع اولیه  $\phi(t) = [1 \quad 0]^T, t \in [-1.2, 0]$  سیستم حلقه بسته، پس از قرارگرفتن بلوک اشباع در خروجی کنترل کننده‌ها پرداخته خواهد شد. نتایج حاصل از شبیه سازی در شکل‌های ۱۰-۱۳ به نمایش درآمده‌اند.



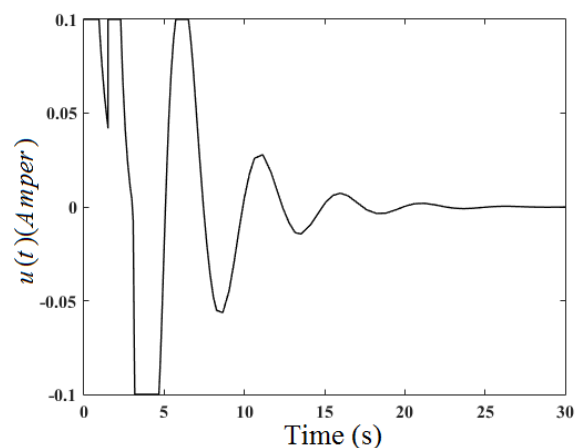
شکل ۱۰: پاسخ زمانی متغیرهای حالت تحت کنترل کننده فیدبک حالت پیشنهادی مقاله



شکل ۷: پاسخ زمانی متغیر حالت  $x_2$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



شکل ۸: پاسخ زمانی متغیرهای حالت  $\zeta(t) = [x_3 \quad x_4]^T$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



شکل ۹: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی در سناریوی دوم

همانطور که پیداست، علی رغم محدودترکردن دامنه سیگنال کنترلی، کنترل کننده پیشنهادی در حضور قید اشباع محرک منجر به پایداری سیستم حلقه بسته شده است. بنابراین نتایج حاصل، حکایت از

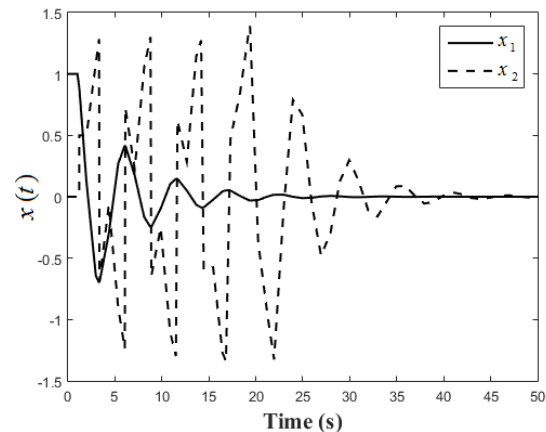
در نظر گرفتن اشباع محرک انجام شده است. محدودیت روی دامنه ورودی محرک‌ها مسئله مهمی است که در سیستم‌های عملی وجود دارد و باید به آن توجه داشت. بنابراین طراحی قانون کنترلی با در نظر گرفتن اشباع محرک ضروری است.

### ۶- نتیجه‌گیری

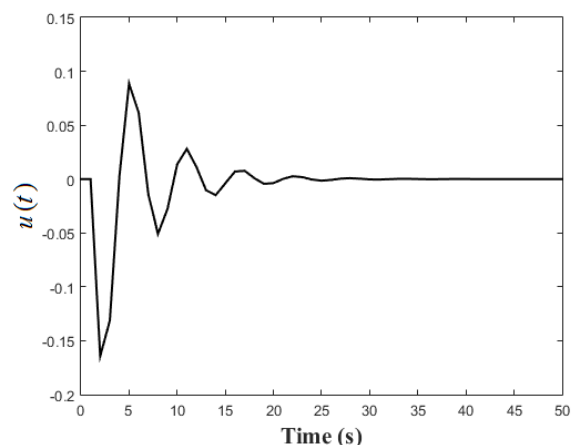
در این مقاله، معیار جدیدی با عنوان "معیار کنترل وابسته به بازه تأخیر" برای سیستم‌های سینگولار دارای تأخیر نامعلوم و متغیر در یک بازه زمانی با کران پایین و بالایی معلوم ارائه شد. ابتدا برای سیستم سینگولار تأخیر زمانی، شرایط وجود کنترل‌کننده فیدبک حالت مستقل از تأخیر، با در نظر گرفتن اشباع محرک با هدف مجاز نمودن سیستم حلقه بسته در قالب قضیه‌ای ارائه شد. سپس، قضایای پایداری وابسته به بازه تأخیر ارائه و شرایط پایداری سیستم حلقه بسته در قالب نامساوی‌های ماتریسی ارائه گردید. در قضایای ارائه‌شده علاوه بر شرایط وجود کنترل‌کننده پایداری، تخمینی از ناحیه جذب سیستم حلقه بسته نیز ارائه گردید. در انتها، برای نشان دادن کارایی مطلوب تکنیک‌های پیشنهادشده، یک مدار الکتریکی با المان‌های جزئی در نظر گرفته شد. جهت انجام شبیه‌سازی، دو سناریوی مختلف مطرح گردید و تکنیک‌های پایداری پیشنهادی در مقاله بر آن‌ها اعمال شد. همچنین یک مثال عددی به منظور مقایسه کارایی قضایای ارائه‌شده در مقاله حاضر با سایر مراجع ارائه بررسی گردید. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی‌ها مؤید عملکرد مناسب تکنیک‌های ذکر شده در مقاله حاضر بوده‌اند.

### مراجع

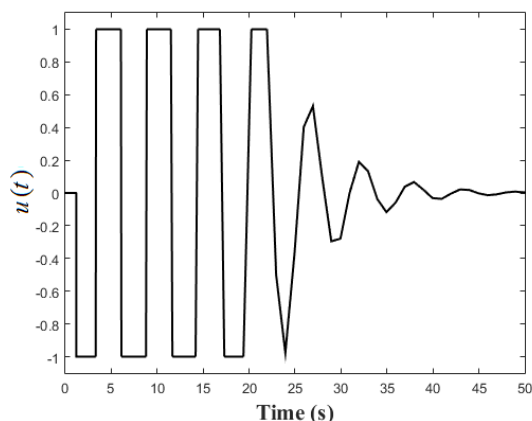
- [1] S. Ayasun, C. O. Nwankpa, and H. G. Kwatny, "An efficient method to compute singularity induced bifurcations of decoupled parameter-dependent differential-algebraic power system model," *Applied mathematics and computation*, vol. 167, no. 1, pp. 435-453, 2005.
- [2] P. Daoutidis, *DAEs in Model Reduction of Chemical Processes: An Overview*, in *Differential-Algebraic Equations II*, Springer, pp. 69-102, 2015.
- [3] S. L. Dai, G. M. Dimirovski, and J. Zhao, "A Descriptor System Approach to Robust Hinf Control and Its Application to Flight Control," in *2006 IEEE American Control Conference*, 2006.
- [4] F. L. Meng, et al., "Admissible output consensus control for singular swarm systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 47, no. 7, pp. 1734-1744, 2014.
- [5] G. R. Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [6] X. Wu and L. Jiang, "Control strategy of dynamic Leontief input-output model," in *2008 Eighth IEEE International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 2008.
- [7] M. Chadli, H. Karimi, and P. Shi, "On stability and stabilization of singular uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 3, pp. 1453-1463, 2014.
- [8] S. Gugercin, T. Stykel, and S. Wyatt, "Model reduction of descriptor systems by interpolatory projection methods,"



شکل ۱۱: پاسخ زمانی متغیرهای حالت تحت کنترل‌کننده فیدبک حالت پیشنهادی مرجع [۴۵]



شکل ۱۲: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی کنترل‌کننده پیشنهادی مقاله



شکل ۱۳: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی کنترل‌کننده پیشنهادی مرجع [۴۵]

شکل (۱۱) پاسخ سیستم حلقه بسته را تحت کنترل‌کننده پیشنهادی مرجع [۴۵] نشان می‌دهد. از آنجا که در حین طراحی این کنترل‌کننده قید اشباع در نظر گرفته نشده، پس از قرار گرفتن بلوک اشباع در خروجی کنترل‌کننده، پاسخ سیستم مطلوب نیست. اما همانطور که انتظار می‌رفت سیستم تحت کنترل‌کننده طراحی‌شده در این مقاله از کارایی مناسب‌تری برخوردار است. چرا که طراحی با

- نامعینی تأخیر زمانی سیگنال‌های راه دور»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، دوره ۴۵، شماره ۴، ۱۳۹۴.
- [27] S. Xu, et al., "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 47, no. 7, pp. 1122-1128, 2002.
- [28] F. Yi-Fu, Z. Xun-Lin, and Q. L. ZHANG, "Delay-dependent stability criteria for singular time-delay systems," *Acta Automatica Sinica*, vol. 36, no. 3, pp. 433-437, 2010.
- [29] Z. Wu, H. Su, and J. Chu, "Delay-dependent robust exponential stability of uncertain singular systems with time delays," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 6, no. 5, pp. 2275-2283, 2010.
- [30] S. Zhu, et al., "Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 880-885, 2007.
- [31] L. Zhang, E. K. Boukas, and A. Haidar, "Delay-range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation," *Automatica*, vol. 44, no. 10, pp. 2691-2695, 2008.
- [32] Y. He, et al., "Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay," *Automatica*, vol. 43, no. 2, pp. 371-376, 2007.
- [33] V. L. Kharitonov, and S. I. Niculescu, "On the stability of linear systems with uncertain delay," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 1, pp. 127-132, 2003.
- [34] X. Jiang, and Q. L. Han, "On  $H_\infty$  control for linear systems with interval time-varying delay," *Automatica*, vol. 41, no. 12, pp. 2099-2106, 2005.
- [35] Y. Liu, et al., "Soft variable structure controller design for singular systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 4, pp. 1613-1626, 2015.
- [36] Y. Liu, C. Zhang, and C. Gao, "Dynamic soft variable structure control of singular systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 8, pp. 3345-3352, 2012.
- [37] L. Fu, and Y. Ma, "Passive control for singular time-delay system with actuator saturation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 289, no. 13, pp. 181-193, 2016.
- [38] Y. Ma, and L. Fu, " $H_\infty$  robust exponential stability and memory state feedback control for uncertain singular time-delay systems with saturating actuators," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 328-338, 2016.
- [39] Y. Y. Cao, Z. Lin, and T. Hu, "Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 2, pp. 233-240, 2002.
- [40] T. Hu, Z. Lin, and B.M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 351-359, 2002.
- [41] L. Dai, *Singular control systems*, 1989.
- [42] A. Bellen, N. Guglielmi, and A.E. Ruehli, "Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 1, pp. 212-215, 1999.
- [43] D. Yue, and Q. L. Han, "A Delay-Dependent Stability Criterion of Neutral Systems and its Application to a Partial Element Equivalent Circuit Model," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 51, no. 12, pp. 685-689, 2004.
- [44] J. Cullum, Ruehli, A. and Zhang, T., "A Method for Reduced-Order Modeling and Simulation of Large *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 35, no. 5, pp. B1010-B1033, 2013.
- [9] M. Chadli, and M. Darouach, "Further enhancement on robust  $H_\infty$  control design for discrete-time singular systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 2, 2014.
- [10] Z. Wang, et al., "Observer design for discrete-time descriptor systems: an LMI approach," *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 6, pp. 683-687, 2012.
- [11] J. S. H. Tsai, et al., "Novel quadratic tracker and observer for the equivalent model of the sampled-data linear singular system," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 68, pp. 3381-3409, 2012.
- [12] Y. Zhang, P. Shi, and S.K. Nguang, "Observer-based finite-time  $H_\infty$  control for discrete singular stochastic systems," *Applied Mathematics Letters*, vol. 38, pp. 115-121, 2014.
- [13] T. Berger, and T. Reis, *Surveys in differential-algebraic equations I*, Springer, 2013.
- [14] Zh. Lei, et al., "Optimal preview control for a class of continuous time-invariant descriptor systems," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 37, no. 2, pp. 279-289, 2016.
- [15] M. Behroozifar, and S. Yousefi, "Numerical solution of optimal control of time-varying singular systems via operational matrices," *International Journal of Engineering-Transactions A: Basics*, vol. 27, no. 4, pp. 523, 2013.
- [16] Q. Zhang, and S. Xing, "Stability analysis and optimal control of stochastic singular systems," *Optimization Letters*, vol. 8, no. 6, pp. 1905-1920, 2014.
- [17] S. Sekar, A. Kavitha, and N. Komarapalayam, "Numerical investigation of the time invariant optimal control of singular systems using adomian decomposition method," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 8, no. 121, pp. 6011-6018, 2014.
- [18] Y. Zhang, C. Liu, and X. Mu, "Robust finite-time  $H_\infty$  control of singular stochastic systems via static output feedback," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no.9, pp. 5629-5640, 2012.
- [19] Z. Feng, et al., " $H_\infty$  Control with Transients for Singular Systems," *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 3, pp. 817-827, 2016.
- [20] C. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou, *Stability analysis and design for nonlinear singular system*, Springer, 2012.
- [21] L. Wu and D. W. Ho, "Sliding mode control of singular stochastic hybrid systems," *Automatica*, vol. 46, no. 4, pp. 779-783, 2010.
- [22] C. Yang, et al., "Lyapunov stability and strong passivity analysis for nonlinear descriptor systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 4, pp. 1003-1012, 2013.
- [23] Q. Zhou, et al., "Adaptive output feedback control for nonlinear time-delay systems by fuzzy approximation approach," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 21, no. 2, pp. 301-313, 2013.
- [24] S. Xu, et al., "New insight into delay-dependent stability of time-delay systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 7, pp. 961-970, 2015.
- [۲۵] بدرالزمان حسینی، مهدی سجودی، عباس چترایی، «طراحی مشاهده‌گر مقاوم و کنترل‌گر فیدبک خروجی برای سیستم‌های چندعاملی دارای تأخیر بازه‌ای و متأثر از نامعینی و اغتشاش»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، دوره ۴۶، شماره ۱، ۱۳۹۵.
- [۲۶] سعید ابادری، مجتبی برخوردار، عباس عرب دردری، «طراحی کنترل‌کننده مقاوم SVC مبتنی بر WAMS با در نظر گرفتن

[45] E. Fridman, Shaked, U., "Hinf control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 351-352, no. 4, pp. 271-302, 2002.

Interconnect Circuits and its Application to PEEC Models with Retardation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 47, no. 4, pp. 261-273, 2000.

## زیرنویس‌ها

- 
- <sup>1</sup> Differential algebraic
  - <sup>2</sup> Descriptor
  - <sup>3</sup> Generalized
  - <sup>4</sup> Semi state
  - <sup>5</sup> Implicit
  - <sup>6</sup> Delay-rang-dependent
  - <sup>7</sup> Functional
  - <sup>8</sup> Passivity
  - <sup>9</sup> Partial element equivalent circuits
  - <sup>10</sup> Neutral differential equation
  - <sup>11</sup> Retarded differential equation