

کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش برگشت به عقب کوادروتور با حذف اثر اغتشاش بار و تخمین اینرسی به روش تطبیقی

محسن وحدانی پور^۱، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ مهدی خدابنده^۲، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی همدان - همدان - ایران - m.vh29@outlook.com

۲- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی همدان - همدان - ایران - khodabandeh@hut.ac.ir

چکیده: کوادروتور یک جسم معلق در فضا با شش درجه آزادی می‌باشد. هدف از این مقاله ردیابی مسیر ایده‌آل و کنترل کوادروتور در حضور اغتشاش بار با فرض نامعین بودن ماتریس اینرسی می‌باشد. کنترل و ردیابی مسیر ایده‌آل بر اساس روش مد سطح لغزش مبتنی بر روش برگشت به عقب صورت گرفته است. جهت حذف اثر اغتشاش بار ضریب جبران‌کننده‌ای در کنترل‌کننده ارتفاع در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه جرم تأثیر مستقیم بر روی اینرسی‌ها می‌گذارد، دینامیک تخمین ضریب جبران‌ساز بار و پارامترهای اینرسی جهت کاهش اثر این اغتشاش و نامعینی با روش تطبیقی مبتنی بر تئوری لیاپانوف محاسبه شده‌اند. در آخر نتایج شبیه‌سازی جهت بررسی عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده و مقاوم بودن آن در برابر اغتشاش بار ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: کوادروتور، اغتشاش بار، مد لغزشی، تطبیقی، لیاپانوف، تخمین اینرسی.

Back-stepping Based Sliding Mode Control for a Quadrotor with Payload Disturbance Elimination and Moment of Inertia Estimation Using Adaptive Methods

M. Vahdanipour¹, MSc Student; M. Khodabandeh², Assistant Professor

1- Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran, Email: m.vh29@outlook.com

2- Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran, Email: khodabandeh@hut.ac.ir

Abstract: Quadrotor is a body floating in space with six degrees of freedom. The purpose of this article is ideal path tracking and control of a quadrotor in presence of payload disturbance and uncertain inertia matrix proposition. Control and ideal path tracking have been applied by a back-stepping sliding mode control. To eliminate the payload disturbance, a coefficient factor has been considered in the altitude controller design. Given that mass have a direct impact on inertia, the dynamic of payload compensation coefficient estimate and inertia parameters have been calculated using the adaptive method based on Lyapunov theory to eliminate the effects of these disturbance and uncertainty. Finally, simulation results have been presented in order to investigate the performance and robustness of the designed controller in the face of payload disturbance.

Keywords: Quadrotor, payload, sliding mode, adaptive, Lyapunov, estimation of moment of inertia.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۲۰

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۰۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۰۷

نام نویسنده مسئول: مهدی خدابنده

نشانی نویسنده مسئول: ایران - همدان - بلوار شهید فهمیده - خیابان مردم - دانشگاه صنعتی همدان.

۱- مقدمه

کوادروتور یک پرنده بدون سرنشین، دارای چهار موتور است و نیروی بالابرنده (تراست) از انتقال نیروی موتور به ملخها تولید می‌شود. کنترل و پایداری این وسیله پرنده با تغییر دور موتورهای امکان پذیر می‌شود. با توجه به اینکه این سیستم دارای شش خروجی و چهار ورودی می‌باشد جزء سیستم‌های ورودی محدود (زیرتحریک) است. این پرنده از لحاظ دینامیکی ناپایدار است و لذا جهت پایداری نیاز به سیستم پایداری مهندسی دارند.

نامعینی‌ها و اغتشاشات زیادی به این نوع ربات‌ها وارد می‌شود که سبب ناپایداری و دوری از عملکرد مقاوم آن‌ها می‌شود. از جمله مهم‌ترین اغتشاشات، می‌توان به اغتشاشات باد اشاره کرد که به‌عنوان یک ورودی خارجی می‌توان آن را در نظر گرفت. نامعینی دیگر، بار نامشخص یا تغییرات بار می‌باشد. یکی از وظایف ربات‌ها یا پرنده‌ها انتقال یک بار به نقطه مطلوب می‌باشد که وزن خود آن‌ها نیز می‌تواند به‌عنوان یک بار منظور گردد، در بسیاری از مقالات که کنترل ربات یا کوادروتور را بررسی می‌کنند، بار ثابت فرض می‌شود. با این حال بارهای مختلف یا تغییرات بار در حین عملیات باعث تغییرات زیادی در دینامیک ربات می‌شود. به عبارتی می‌توان گفت یک بار نامشخص سیستم را دچار نامعینی ساختاری می‌کند. همچنین این موضوع از عوامل اغتشاشات آیرودینامیکی می‌باشد. مسئله اصلی مورد بحث در این مقاله، طراحی کنترل تطبیقی در برابر تغییرات بار یا در مواجهه با بارهای دارای نامعینی برای یک کوادروتور می‌باشد.

در سابقه انجام این روش می‌توان به برخی از فعالیت‌های انجام شده به شرح زیر اشاره کرد. برخی از این رویکردها بر مبنای بهره‌گیری از کنترل برگشت به عقب و مد لغزشی جهت ردیابی مسیر ایده‌آل و حذف اثر اغتشاش می‌باشد. به‌عنوان نمونه در [۱، ۲] یک کنترل برگشت به عقب جهت ردیابی مسیر ایده‌آل در نظر گرفته شده است و در [۳، ۴] جهت پایداری بیشتر در تابع لیاپانوف، کنترل کننده مد لغزشی مبتنی بر روش برگشت به عقب در نظر گرفته شده است و در [۵] پایداری زمان محدود، برای کوادروتور بر مبنای یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی با سطح لغزش ترمینال غیرتکین ارائه شده است. در [۶] با توجه به مقاوم بودن کنترل مد لغزشی از این روش به‌تنهایی جهت حذف اثر اغتشاش استفاده شده است و در [۷، ۸] دو کنترل متفاوت برای ارتفاع، موقعیت و وضعیت کوادروتور ارائه شده است که روش اول بر اساس ترمینال سطح لغزش مرتبه دو و روش دوم یک رویت‌گر اغتشاش غیرخطی بر اساس سطح لغزش انتگرالی می‌باشد. در [۹، ۱۰] یک کنترل مد لغزشی درجه ۲ بلوکی برای ردیابی کوادروتور ارائه شده است. برخی دیگر از رویکردها جهت حصول عملکرد مقاوم در برابر نامعینی و اغتشاش بر مبنای کنترل تطبیقی به‌شرح زیر می‌باشد. در مقاله [۱۱] یک کنترل تطبیقی مقاوم برای ردیابی وضعیت کوادروتور انجام شده که در آن آگاهی از ماتریس اینرسی لازم نباشد.

در [۱۲] با در نظر گرفتن پارامترهای اینرسی به‌عنوان نامعینی سیستم، جهت ردیابی از روش کنترل سطح لغزش تطبیقی استفاده شده و در [۱۳] کنترل تطبیقی مستقیم تقریبی برای کوادروتور طراحی شده که در آن روش جدیدی را با تطبیق برخط پارامترهای کنترل با توجه به اضافه بار جهت متوقف کردن رانش وزن در طی آزمایش لرزش ارائه می‌دهد. در [۱۴] کنترل تطبیقی ربات موازی سه پارامترها از قبیل اصطکاک و بار نامشخص و مدل عملگرها با تغییر زمان تغییر می‌کند که در اینجا با لحاظ مدل تطبیقی برای هر کدام از نامعینی‌ها در حالت‌های مختلف، کنترل کننده مناسب را طراحی نموده است. در [۱۵] کنترل یک سیستم رباتیک بر مبنای روش لیاپانوف جهت مقابله با اصطکاک و بار نامشخص ارائه شده است. [۱۶] یک کنترل تطبیقی ارائه می‌کند که در آن ربات یک بار انعطاف‌پذیر را که به‌طور همزمان توسط یک نیروی نامشخص رانده می‌شود، جابه‌جا می‌کند. در مقاله [۱۷] دو روش کنترل مد لغزشی با کنترل فازی تطبیقی را در برابر تغییر بار زیاد مقایسه می‌کند. کنترل مد لغزشی با توجه به مقاوم بودن ذاتی قادر به حل مسئله می‌باشد در صورتی که در روش کنترل فازی تطبیقی، پارامترها به‌صورت برخط به‌روز می‌شوند. برخی از روش‌های دیگر از جمله کنترل بهینه، استفاده از شبکه عصبی، استفاده از داده‌های جمع‌آوری شده توسط سنسورها و ... جهت حذف اثرات نامعینی ارائه شده‌اند. به‌عنوان مثال در [۱۸] یک کنترل بهینه - L1 برای کوادروتور طراحی و پیاده‌سازی شده است. ردیابی موقعیت بار متحرک نامعلوم در یک صفحه با روش سنجش توزیعی در [۱۹] انجام شده که روش ارائه شده شامل ایجاد الگوریتم برای بهینه کردن موقعیت سنسورها و شبکه عصبی برای تعیین بار متحرک می‌شود. در [۲۰] بار نامشخص برای یک جرثقیل همانند دینامیک ناشناخته داخلی تخمین زده می‌شود و مسئله کنترل را با یک حالت ساده جایگزین نموده است. در [۲۱] با ارائه روش کنترل تطبیقی برگشت به عقب به حذف اثر خطا در عملگرهای کوادروتور پرداخته است.

در این مقاله جهت مقاوم‌سازی بیشتر کوادروتور نسبت به اغتشاش وارد بر زوایا و ردیابی مسیر مرجع، روش برگشت به عقب مبتنی بر سطح لغزش در نظر گرفته شده است و علاوه بر آن به‌منظور کنترل ارتفاع، هنگام تغییر مقدار بار حمل شده تا مرز ۵۰ درصد جرم کوادروتور روش جدیدی ارائه شده که با تخمین سریع مقدار آن مانع از تغییر ناگهانی ارتفاع می‌شود. این تغییر بار تأثیر مستقیم بر روی اینرسی‌ها دارد. به‌منظور تخمین مستقیم ممان‌های اینرسی، با تلفیق سه اینرسی در یک تابع لیاپانوف واحد، برای تخمین آن‌ها تنها وابسته به سه مقدار ثابت می‌باشد که این امر منجر به سرعت همگرایی بیشتر و حساسیت کم‌تر در دینامیک تخمین شده است در صورتی که در مقالات اخیر همانند [۱۲] با نامشخص گرفتن هر ضریب در معادلات کوادروتور، حدود ۱۰ پارامتر برای تخمین به‌دست می‌آید.

$$\Omega_B = \frac{1}{C\theta} \begin{pmatrix} C\theta & S\theta S\phi & C\psi S\theta \\ 0 & C\psi C\theta & -C\theta S\phi \\ 0 & S\phi & C\phi \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$Sa = \sin(a), Ca = \cos(a)$$

۲-۲- سینماتیک و دینامیک انتقال کوادروتور

$$m\dot{v} + \omega \times (mv) = F \quad (4)$$

m جرم کوادروتور، $F = [F_x, F_y, F_z]$ بردار نیروهای خارجی وارد شده و $V = (u, v, w)$ سرعت خطی کوادروتور در قاب داخلی می‌باشد.

معادله سینماتیک انتقال جسم معلق در فضا

$$\dot{\xi} = Rv \quad (5)$$

$\xi = [x, y, z]$ موقعیت مرکز جرم کوادروتور در قاب خارجی و R ماتریس چرخش، که به صورت زیر می‌باشد:

$$R = \begin{pmatrix} C\theta C\psi & C\psi S\theta S\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ C\psi S\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\theta & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{pmatrix} \quad (6)$$

۲-۳- نیرو و گشتاورهای تولیدی کوادروتور

نیروهای تولیدشده توسط چهار موتور کوادروتور وابسته به سرعت زاویه‌ای ملخک‌ها می‌باشند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$f_i = b\Omega_i^2 \quad (7)$$

Ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) سرعت زاویه‌ای ملخک‌ها، b ضریب کشش و f_i نیروی تولیدشده توسط موتورها می‌باشند.

جهت نوشتن معادلات موقعیت و وضعیت کوادروتور نیروهای تولیدی موتورها به صورت یک نیرو در جهت محور z و سه گشتاور حول محورهای مختصات به مرکز کوادروتور بیان می‌شود.

$$\begin{pmatrix} u \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -l & 0 & l & 0 \\ 0 & l & 0 & -l \\ d/b & -d/b & d/b & -d/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

l فاصله موتورها تا مرکز ثقل کوادروتور و d ضریب تصحیح تبدیل نیرو به گشتاور می‌باشد.

۲-۴- توصیف معادلات کوادروتور

حرکات سریع زاویه‌ای کوادروتور این اجازه را می‌دهد تا Ω_B را یک ماتریس همانی فرض کرد. تحت این شرایط می‌توان شتاب زاویه‌ای اویلر (η) در قاب خارجی را با سرعت زاویه‌ای (ω) در قاب داخلی برابر گرفت؛ و در نهایت با استفاده از روابط (۱) تا (۸) معادلات حرکت انتقالی و دورانی کوادروتور به صورت زیر توصیف می‌شود [۵]:

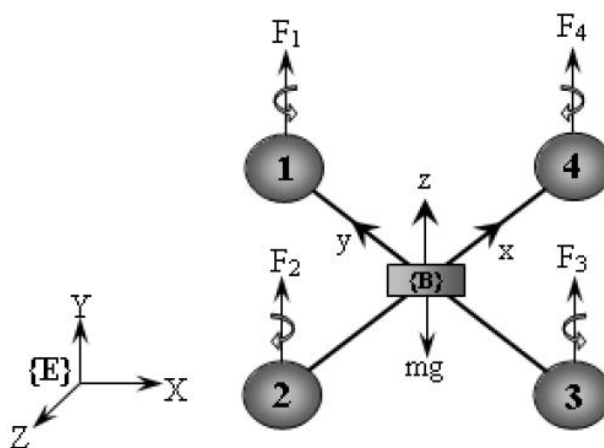
معادلات حرکت انتقالی کوادروتور

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{u_1}{m} (C\psi S\theta S\phi + S\psi S\phi) \\ \dot{y} &= \frac{u_1}{m} (S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi) \\ \dot{z} &= \frac{u_1}{m} (C\theta C\phi) - g \end{aligned} \quad (9)$$

روند مقاله به این شرح است: ابتدا پس از بررسی سینماتیک و دینامیک وضعیت و انتقال یک جسم آزاد، معادلات انتقالی و دورانی کوادروتور بیان شده است و سپس به طراحی کنترل کننده در سه بخش کنترل ارتفاع، کنترل موقعیت و کنترل وضعیت به روش سطح لغزش مبتنی بر برگشت به عقب پرداخته شده است و جهت حذف اثر اغتشاش بار یک ضریب جبران ساز در قسمت کنترل ارتفاع لحاظ شده است و ماتریس اینرسی در بخش آخر به کمک تئوری لیاپانوف تخمین زده شده است. در انتها، نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده تطبیقی ارائه شده جهت نمایش ردیابی مسیر و مقاوم بودن در برابر اغتشاش بار و نتایج همگرایی پارامترهای اینرسی ذکر شده است. همچنین مقایسه و بهبود در سرعت همگرایی مقادیر اینرسی تخمین زده شده نسبت به روش ارائه شده در مقاله [۱۲] مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۲- مدل کوادروتور

معادلات موقعیت و وضعیت کوادروتور بر اساس معادلات یک جسم معلق با شش درجه آزادی در دو قاب داخلی (B) و خارجی (E) همانند شکل ۱ استفاده می‌شود [۲۲].



شکل ۱: کوادروتور در مختصات دکارتی

۲-۱- سینماتیک و دینامیک وضعیت کوادروتور

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau + d_\tau \quad (1)$$

$I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ ماتریس اینرسی قطری شده سینماتیک، $\tau = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]$ بردار گشتاور محرک، $\omega = (p, q, r)$ بردار سرعت زاویه‌ای در قاب داخلی و $d_\tau = [d_\phi, d_\theta, d_\psi]$ اغتشاش خارجی بر روی زوایا که حاصل از باد یا لرزش بار معلق می‌باشند.

معادله سینماتیک چرخش جسم معلق در فضا

$$\dot{\eta} = \Omega_B \omega \quad (2)$$

$\eta = [\phi, \theta, \psi]$ زوایای اویلر بر اساس مختصات xyz قاب خارجی، Ω_B ماتریس چرخش از قاب داخلی (B) به قاب خارجی (E) می‌باشد.

$$= \dot{V}_1 + s_z \left[\frac{U_1}{\cos \theta \cos \phi} - g - \ddot{z}_d + a_z(s_z + a_z e_z) \right] \quad (23)$$

$$\dot{s}_z = -\eta_z s_z - k_z \text{sgn}(s_z) \leq 0 \quad (24)$$

جهت محاسبه ضریب تطبیقی تابع لیاپانوف V_3 به صورت زیر تعریف می شود و با در نظر گرفتن $U_1 = \hat{\alpha} u_1 = \tilde{\alpha} u_1 + \alpha u_1$ دینامیک تطبیق به صورت زیر به دست می آید:

$$V_3 = \frac{1}{2} e_z^2 + \frac{1}{2} s_z^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2\alpha\gamma} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= e_z \dot{e}_z + s_z \dot{s}_z + \frac{1}{\alpha\gamma} \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}} \\ &= V_1 + s_z \left[\frac{U_1}{\alpha m} \cos \theta \cos \phi - g - \ddot{z}_d + a_z(s_z + a_z e_z) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha\gamma} \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

$$= V_1 + s_z \left[\frac{\tilde{\alpha} u_1}{\alpha m} \cos \theta \cos \phi + \frac{u_1}{m} \cos \theta \cos \phi - g - \ddot{z}_d + a_z(s_z + a_z e_z) \right] + \frac{1}{\alpha\gamma} \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}}$$

$$= V_1 + s_z \left[\frac{\tilde{\alpha} u_1}{\alpha m} \cos \theta \cos \phi - \eta_z s_z - k_z \text{sgn}(s_z) \right] + \frac{1}{\alpha\gamma} \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}} \quad (26)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -\gamma s_z \frac{u_1}{m} \cos \theta \cos \phi \quad (27)$$

۳-۲- کنترل موقعیت x و y

کوادروتور سیستم زیر تحریک (۴ ورودی ۶ خروجی) است به این معنی که تعداد ورودی های آن از تعداد خروجی های آن کم تر می باشد. ۴ خروجی (z, ψ, θ, ϕ) ، مستقیماً توسط ورودی ها کنترل می شود. برای کنترل خروجی های باقی مانده (x, y) دو ورودی مجازی u_x و u_y تعریف می شود.

$$u_x = (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) \quad (28)$$

$$u_y = (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) \quad (29)$$

با طراحی کنترل کننده ورودی های مجازی u_x و u_y ، زاویه های θ و مرجع جهت ردیابی x و y از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\phi_d = \sin^{-1}[(u_5 s\psi_d - u_6 c\psi_d)/u_1] \quad (30)$$

$$\theta_d = \sin^{-1}[(u_5 s\psi_d + u_6 c\psi_d)/u_1 c\phi_d] \quad (31)$$

ورودی های مجازی u_x و u_y همانند ورودی کنترلی ارتفاع محاسبه می شوند. در این مرحله به دلیل وجود $U_1 = \hat{\alpha} u_1$ در معادلات (x, y) ، اثر تغییرات m حذف می شود و نیازی به در نظر گرفتن ضریب تطبیقی برای کنترل کننده های موقعیت (x, y) نیست.

$$u_x = \frac{m}{U_1} [\ddot{x}_d + a_x(\dot{x}_d - \dot{x}) - \eta_x s_x - k_x \text{sgn}(s_x)] \quad (32)$$

$$u_y = \frac{m}{U_1} [\ddot{y}_d + a_y(\dot{y}_d - \dot{y}) - \eta_y s_y - k_y \text{sgn}(s_y)] \quad (33)$$

۳-۳- کنترل وضعیت (ϕ, θ, ψ)

با استفاده از زوایای مرجع به دست آمده از کنترل موقعیت، تابع خطا را می توان تشکیل داد. به این ترتیب، ورودی های زوایا به صورت زیر به دست می آیند:

$$u_2 = \frac{I_x}{l} [a_\phi(\phi_d - \phi) + \dot{\phi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \psi + \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega_r - \eta_\phi s_\phi - k_\phi \text{sgn}(s_\phi)] \quad (34)$$

معادلات حرکت دورانی کوادروتور

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega_r + \frac{l}{I_x} u_2 + d_\phi \\ \ddot{\theta} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi} \Omega_r + \frac{l}{I_y} u_3 + d_\theta \\ \ddot{\psi} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{d}{I_z} u_4 + d_\psi \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Omega_r = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4 \quad (11)$$

Ω_r سرعت زاویه ای کل ملخک ها و J_r اینرسی روتور می باشد.

۳- طراحی کنترل کننده

در این بخش، کنترل کننده های ارتفاع (z) ، موقعیت (x, y) و وضعیت (ϕ, θ, ψ) جهت ردیابی به روش سطح لغزش مبتنی بر روش برگشت به عقب و تخمین ضریب جبران ساز (α) و ماتریس اینرسی جهت حذف اثر اغتشاش و نامعینی بار به روش تطبیقی مبتنی بر لیاپانوف طراحی شده است.

۳-۱- کنترل ارتفاع کوادروتور

طراحی ورودی کنترلی ارتفاع ابتدا در شرایط عدم حضور اغتشاش بار انجام می شود که با تعریف خطا و سطح لغزش به صورت زیر سیگنال کنترل u_1 به دست می آید:

$$e_z = z_d - z \quad (12)$$

$$s_z = \dot{z}_d - \dot{z} - a_z e_z, \quad s_z + a_z e_z = -\dot{e}_z \quad (13)$$

$$\dot{s}_z = \ddot{z}_d - \ddot{z} + a_z(\dot{z}_d - \dot{z}) = -\eta_z s_z - k_z \text{sgn}(s_z) \quad (14)$$

$$u_1 = \frac{m}{\cos \theta \cos \phi} [g + \ddot{z}_d - a_z(s_z + a_z e_z) - \eta_z s_z - k_z \text{sgn}(s_z)] \quad (15)$$

برای مقاوم کردن کنترل کننده در برابر اغتشاش بار و حذف اثر آن، تغییرات بار به صورت ضریبی (α) در سیگنال کنترل در نظر گرفته می شود و معادله دینامیکی ارتفاع به صورت زیر اصلاح می شود:

$$\ddot{z} = \frac{U_1}{\alpha m} (C\theta C\phi) - g \quad (16)$$

حال با تعریف $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$ و اصلاح سیگنال کنترل u_1 به صورت $U_1 = \hat{\alpha} u_1$ ، قانون تطبیق بر اساس روابط زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \gamma s_z \frac{u_1}{m} \cos \theta \cos \phi \quad (17)$$

با تعریف و محاسبه تابع لیاپانوف و مشتق آن به صورت زیر:

$$V_1 = \frac{1}{2} e_z^2 \quad (18)$$

$$\dot{V}_1 = e_z \dot{e}_z = e_z \quad (19)$$

جهت پایداری تابع لیاپانوف V_1 ، ورودی مجازی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_d + a_z e_z \quad (20)$$

$$\dot{V}_1 = e_z \dot{e}_z = -a_z e_z^2 \leq 0 \quad (21)$$

تابع لیاپانوف V_2 بر اساس تابع لیاپانوف V_1 و سطح لغزش به صورت زیر تعریف می شود و با جایگذاری u_1 پایداری سیستم نتیجه گرفته می شود.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} s_z^2 \quad (22)$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + s_z \dot{s}_z$$

$$+ |I_z| s_\psi (\ddot{\psi} - \ddot{\psi}_d - a_\psi \dot{e}_\psi) + \frac{1}{\gamma_3} \dot{I}_z \dot{I}_z \quad (47)$$

با جایگذاری روابط دینامیکی حلقه بسته حاصل شده (رابطه‌های (۴۳)، (۴۴) و (۴۵)) در مشتق تابع لیاپانوف (۴۷) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = & \frac{|I_x|}{I_x} s_\phi [\ddot{I}_x (\dot{\phi}_d + a_\phi \dot{e}_\phi) - (\dot{I}_y - \dot{I}_z) \dot{\theta} \dot{\psi} - \dot{I}_x q_\phi] \\ & + \frac{|I_y|}{I_y} s_\theta [\ddot{I}_y (\dot{\theta}_d + a_\theta \dot{e}_\theta) - (\dot{I}_z - \dot{I}_x) \dot{\phi} \dot{\psi} - \dot{I}_y q_\theta] \\ & + \frac{|I_z|}{I_z} s_\psi [\ddot{I}_z (\dot{\psi}_d + a_\psi \dot{e}_\psi) - (\dot{I}_x - \dot{I}_y) \dot{\phi} \dot{\theta} - \dot{I}_z q_\psi] \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \dot{I}_x \dot{I}_x + \frac{1}{\gamma_2} \dot{I}_y \dot{I}_y + \frac{1}{\gamma_3} \dot{I}_z \dot{I}_z \end{aligned} \quad (48)$$

با توجه به مثبت بودن ماتریس اینرسی و مرتب‌سازی رابطه (۴۸):

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = & \dot{I}_x [s_\phi (\dot{\phi}_d + a_\phi \dot{e}_\phi) + s_\theta \dot{\phi} \dot{\psi} - s_\psi \dot{\phi} \dot{\theta}] - s_\phi \dot{I}_x q_\phi \\ & + \dot{I}_y [s_\theta (\dot{\theta}_d + a_\theta \dot{e}_\theta) - s_\phi \dot{\theta} \dot{\psi} + s_\psi \dot{\phi} \dot{\theta}] - s_\theta \dot{I}_y q_\theta \\ & + \dot{I}_z [s_\psi (\dot{\psi}_d + a_\psi \dot{e}_\psi) + s_\phi \dot{\theta} \dot{\psi} - s_\theta \dot{\phi} \dot{\psi}] - s_\psi \dot{I}_z q_\psi \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \dot{I}_x \dot{I}_x + \frac{1}{\gamma_2} \dot{I}_y \dot{I}_y + \frac{1}{\gamma_3} \dot{I}_z \dot{I}_z \end{aligned} \quad (49)$$

با در نظر گرفتن روابط زیر به‌عنوان دینامیک تخمین ماتریس

اینرسی:

$$\dot{I}_x = -\gamma_1 [s_\phi (\dot{\phi}_d + a_\phi \dot{e}_\phi) + s_\theta \dot{\phi} \dot{\psi} - s_\psi \dot{\phi} \dot{\theta}] \quad (50)$$

$$\dot{I}_y = -\gamma_2 [s_\theta (\dot{\theta}_d + a_\theta \dot{e}_\theta) - s_\phi \dot{\theta} \dot{\psi} + s_\psi \dot{\phi} \dot{\theta}] \quad (51)$$

$$\dot{I}_z = -\gamma_3 [s_\psi (\dot{\psi}_d + a_\psi \dot{e}_\psi) + s_\phi \dot{\theta} \dot{\psi} - s_\theta \dot{\phi} \dot{\psi}] \quad (52)$$

و با فرض مثبت بودن تخمین ماتریس اینرسی، شرط پایداری تابع لیاپانوف ($\dot{V}_4 < 0$) برقرار می‌شود:

$$\dot{V}_4 = (-s_\phi \dot{I}_x q_\phi - s_\theta \dot{I}_y q_\theta - s_\psi \dot{I}_z q_\psi) < 0 \quad (53)$$

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش شبیه‌سازی‌های عددی برای اثبات کارایی کنترل‌کننده طراحی شده، ارائه می‌گردد. پارامترهای کوادروتور در جدول ۱ ذکر است. در این شبیه‌سازی دو نوع اغتشاش زیر در نظر گرفته شده است: اغتشاش باد: همانند مرجع δ به‌صورت تابع $\sin(50\pi t) + 0.2\sin(\pi t)$ بر روی زوایای کوادروتور اعمال شده است. ۲- اغتشاش بار: به دو فرم پله‌ای و نمایی، طوری که در ثانیه ۱۵ افزایش بار ۵۰ درصد به‌صورت پله‌ای و در ثانیه ۳۵ کاهش بار به‌صورت نمایی طی ۴ ثانیه به سیستم اعمال شده است.

با توجه به مطلب بیان‌شده در ضمیمه ۱ ماتریس اینرسی شبیه‌سازی شده در کوادروتور به‌صورت ضربی از بار در نظر گرفته شده تا تغییرات بار بر روی اینرسی کوادروتور مستقیماً لحاظ شود.

در قسمت اول، بحث ردیابی در حضور اغتشاش باد مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۲ بیانگر ردیابی مسیر ایده‌آل در زمان کم‌تر از ۵ ثانیه می‌باشد و به‌دلیل مقاوم بودن کنترل‌کننده طراحی شده، اثر تخریبی اغتشاش باد نیز در طی انجام ردیابی از بین رفته است. با توجه

$$\begin{aligned} u_3 = & \frac{I_y}{I} [a_\theta (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi} \Omega_r \\ & - \eta_\theta s_\theta - k_\theta \text{sgn}(s_\theta)] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_4 = & \frac{I_z}{d} [a_\psi (\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) + \ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} \\ & - \eta_\psi s_\psi - k_\psi \text{sgn}(s_\psi)] \end{aligned} \quad (36)$$

اثبات پایداری کنترل زوایا همانند کنترل ارتفاع می‌باشند که از ذکر آن اجتناب شده است.

۳-۴- دینامیک تخمین ماتریس اینرسی

ماتریس اینرسی (I) طبق معادلات کوادروتور (۹)، (۱۰) فقط بر روی وضعیت آن (ϕ, θ, ψ) تأثیرگذار هستند. اینرسی جزء مقادیر ذاتی کوادروتور می‌باشند و همان‌طور که در ضمیمه ۱ بیان شده است با تغییر بار و جرم کوادروتور دچار تغییر می‌شود [۲۴].

در این مقاله اینرسی به‌عنوان نامعینی مدل در نظر گرفته شده و با استفاده از روش تطبیقی مبتنی بر لیاپانوف تخمین زده می‌شود.

با $\hat{I} = \text{diag}(\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z)$ به‌عنوان تخمین و خطای تخمین اینرسی‌ها در نظر گرفته شده و به جهت عدم تکرار فرض می‌شود:

$$q_\phi = \eta_\phi s_\phi + k_\phi \text{sgn}(s_\phi) \quad (37)$$

$$q_\theta = \eta_\theta s_\theta + k_\theta \text{sgn}(s_\theta) \quad (38)$$

$$q_\psi = \eta_\psi s_\psi + k_\psi \text{sgn}(s_\psi) \quad (39)$$

به‌دلیل عدم اطلاع از ماتریس اینرسی، ورودی‌های کنترلی وضعیت که در مرحله قبل محاسبه شده، بر اساس تخمین مقادیر اینرسی بازنویسی می‌شود:

$$lu_2 = \hat{I}_x [a_\phi \dot{e}_\phi + \dot{\phi}_d - q_\phi] - (\hat{I}_y - \hat{I}_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + J_r \dot{\theta} \Omega_r \quad (40)$$

$$lu_3 = \hat{I}_y [a_\theta \dot{e}_\theta + \dot{\theta}_d - q_\theta] - (\hat{I}_z - \hat{I}_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + J_r \dot{\phi} \Omega_r \quad (41)$$

$$du_4 = \hat{I}_z [a_\psi \dot{e}_\psi + \dot{\psi}_d - q_\psi] - (\hat{I}_x - \hat{I}_y) \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (42)$$

به‌ازای این ورودی‌ها در معادلات (۱۰) دینامیک حلقه بسته کوادروتور به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{\phi} = \frac{\hat{I}_x}{I_x} [a_\phi \dot{e}_\phi + \dot{\phi}_d - q_\phi] - (\hat{I}_y - \hat{I}_z) \dot{\theta} \dot{\psi} \quad (43)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\hat{I}_y}{I_y} [a_\theta \dot{e}_\theta + \dot{\theta}_d - q_\theta] - (\hat{I}_z - \hat{I}_x) \dot{\phi} \dot{\psi} \quad (44)$$

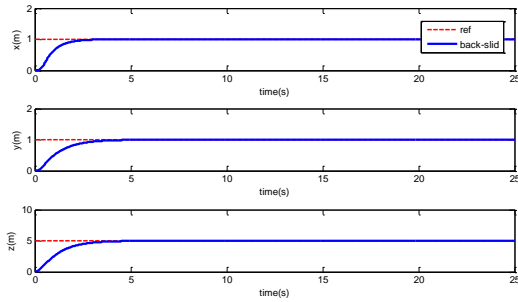
$$\ddot{\psi} = \frac{\hat{I}_z}{I_z} [a_\psi \dot{e}_\psi + \dot{\psi}_d - q_\psi] - (\hat{I}_x - \hat{I}_y) \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (45)$$

جهت محاسبه دینامیک تخمین اینرسی‌ها تابع لیاپانوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

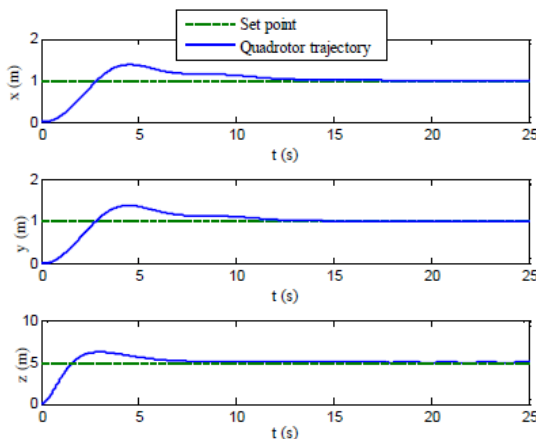
$$\begin{aligned} V_4 = & \frac{1}{2} |I_x| s_\phi^2 + \frac{1}{2} |I_y| s_\theta^2 + \frac{1}{2} |I_z| s_\psi^2 \\ & + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{I}_x^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{I}_y^2 + \frac{1}{2\gamma_3} \tilde{I}_z^2 \end{aligned} \quad (46)$$

که مشتق آن برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = & |I_x| s_\phi (\dot{\phi} - \dot{\phi}_d - a_\phi \dot{e}_\phi) + \frac{1}{\gamma_1} \dot{I}_x \dot{I}_x \\ & + |I_y| s_\theta (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d - a_\theta \dot{e}_\theta) + \frac{1}{\gamma_2} \dot{I}_y \dot{I}_y \end{aligned}$$



شکل ۴: ردیابی موقعیت (۱،۱،۵) توسط کوادروتور



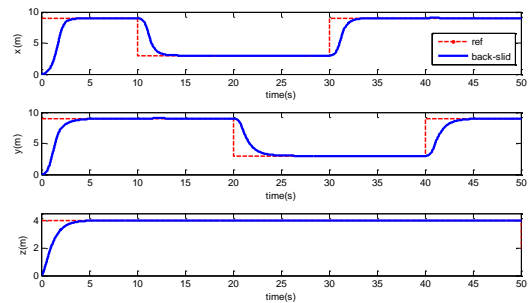
شکل ۵: ردیابی موقعیت (۱،۱،۵) کوادروتور در مرجع [۵]

قسمت دوم شبیه‌سازی به جهت کارایی ضریب طراحی شده در رابطه (۲۷) و مقاومت آن در برابر تغییر ناگهانی بار انجام شده است. با توجه به نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۶ و ۷ تغییرات بار در عدم حضور کنترل‌کننده تطبیقی یا همان ضریب جبران‌ساز تأثیری در ردیابی موقعیت (x, y) نداشته است اما در شکل ۸ ارتفاع کوادروتور مطابق با افزایش ۵۰ درصدی بار در ثانیه ۱۵ دچار کاهش پله‌ای و در ثانیه ۳۵ به‌طور نمایی افزایش یافته است. در این مقاله برای حذف اثر این اغتشاش، با اعمال کنترل‌کننده تطبیقی ارائه‌شده تغییرات ارتفاع حاصل از اغتشاش بار به‌خوبی حذف شده طوری که از کاهش ۳۷ درصدی ارتفاع به‌زای افزایش بار ۵۰ درصد جلوگیری شده است و علاوه بر آن سرعت ردیابی ارتفاع نیز افزایش یافته است به بیان دیگر همان‌طور که در شکل ۹ مشهود است دینامیک ضریب جبران‌ساز $\hat{\alpha}$ که طبق رابطه (۱۶) به‌دست آمده است در ورودی ضرب می‌شود و مقدار عکس تغییرات بار را به ورودی اعمال می‌کند تا اثر کاهش ارتفاع ایجادشده توسط اضافه بار حذف شود و کوادروتور پس از ۲ ثانیه به مسیر مرجع خود باز برگردد.

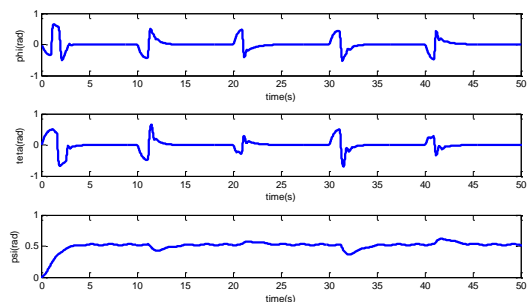
به شکل ۳ همان‌طور که از روابط (۳۰) و (۳۱) انتظار می‌رفت، با تغییر موقعیت مرجع کوادروتور، زاویه آن نیز دچار تغییر شده و کنترل‌کننده در زمان کوتاهی آن را ردیابی نموده است. به‌منظور مقایسه سرعت همگرایی موقعیت کوادروتور در مرحله اولیه طراحی، شبیه‌سازی این مقاله مجدداً در شکل ۴ به‌زای مسیرهای مرجع و اغتشاش باد در نظر گرفته‌شده در مرجع [۵] اجرا شده است. شکل ۵ موقعیت کوادروتور به‌زای روش انتخابی در مرجع [۵] را نشان می‌دهد که در آن کوادروتور جهت ردیابی مسیر ایده‌آل حداقل نیاز به ۱۱ ثانیه زمان دارد که این زمان در مقایسه با شکل ۴ بیانگر تسریع سرعت همگرایی در روش ارائه‌شده در مقاله حاضر می‌باشد.

جدول ۱: پارامترهای مدل کوادروتور

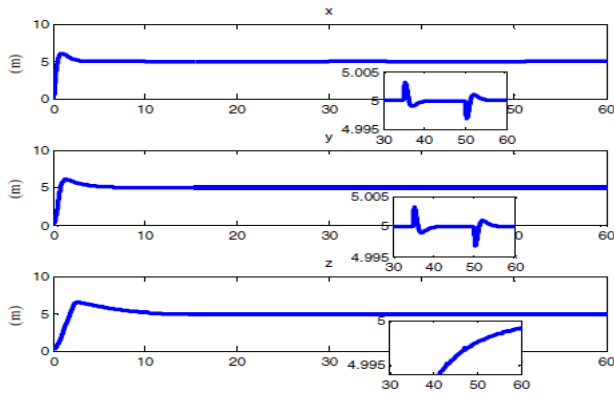
پارامتر	مقدار
m	۲ kg
I_x	$0.0075 \text{ Ns}^2/\text{rad}$
I_y	$0.0075 \text{ Ns}^2/\text{rad}$
I_z	$0.013 \text{ Ns}^2/\text{rad}$
J_r	$0.0075 \text{ Ns}^2/\text{rad}$
b	$0.0000313 \text{ Ns}^2/\text{rad}$
l	0.23 m
d	0.00000075 Nms^2
g	9.8 m/s^2



شکل ۲: ردیابی موقعیت (x, y, z) در حضور اغتشاش باد

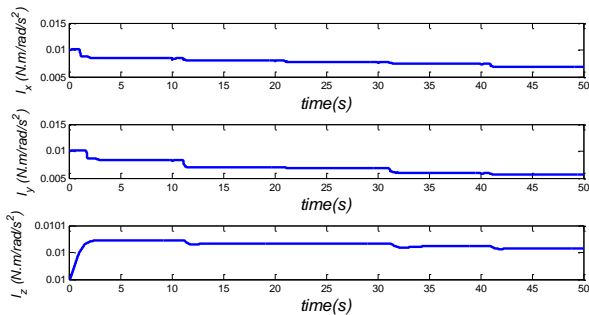


شکل ۳: خروجی‌های وضعیت (ϕ, θ, ψ) کوادروتور



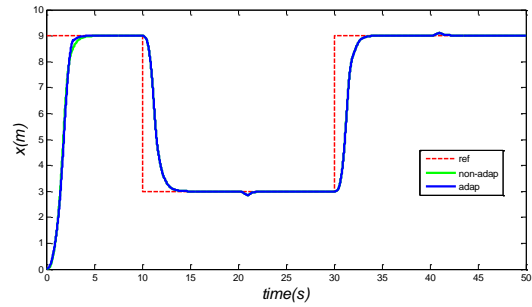
شکل ۱۰: اعمال اغتشاش معادل ۱ نیوتن در مرجع [۷]

در قسمت سوم از شبیه‌سازی با توجه به عدم اطلاع از مقادیر ماتریس اینرسی، همگرا شدن پارامترهای ماتریس اینرسی بررسی شده است. شکل ۱۱ همگرا شدن اینرسی‌ها به مقادیر ثابت، به‌زای ورودی‌های مرجع شکل ۲ را نشان می‌دهد. با توجه به دینامیک تخمین به‌دست‌آمده در روابط (۵۰) تا (۵۲) مقادیر اینرسی تابعی از تغییرات زوایا می‌باشند و با تغییر زوایا در شکل ۳، ممان‌های اینرسی نیز در مدت‌زمان کوتاهی به مقدار جدید همگرا می‌شوند و از طرفی با توجه به این‌که تغییر بار به‌طور مستقیم بر روی ممان‌های اینرسی لحاظ شده است، تغییرات بار تأثیر مخرب بر روی عملکرد سیستم نداشته است.

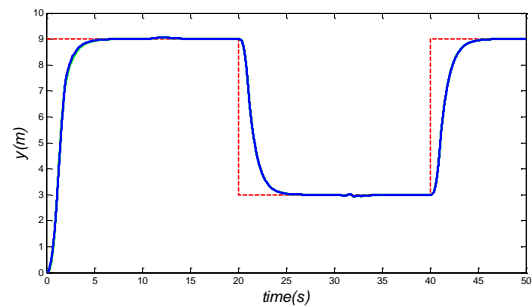


شکل ۱۱: تخمین پارامترهای ماتریس اینرسی به‌زای مسیرهای مرجع
شکل ۲

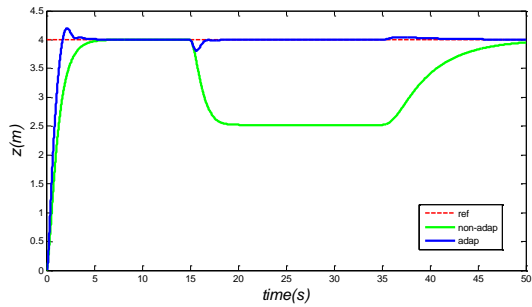
در مقاله [۱۲] نیز جهت تخمین اینرسی روشی ارائه شده که در آن هر ترکیبی از اینرسی‌های ضرب‌شده در حالت‌های وضعیت (رابطه (۱۰))، که مجموعاً یازده عدد می‌باشند را به‌عنوان یک پارامتر تخمین در نظر می‌گیرد و به‌همین دلیل تخمین آن‌ها از حساسیت بالایی در برابر تغییرات برخوردار می‌باشد، در صورتی که با توجه به تابع لیاپانوف ارائه‌شده در این مقاله که تلفیقی از سه وضعیت کوادروتور می‌باشد تنها سه پارامتر ماتریس اینرسی مستقیماً تخمین زده می‌شوند که روش ارائه‌شده جهت تخمین‌های اینرسی در این مقاله و مقاله [۱۲] به ترتیب در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش ارائه‌شده در بهبود سرعت همگرایی مؤثر بوده طوری که سرعت همگرایی ممان‌های اینرسی (I_x, I_y, I_z) به ترتیب از



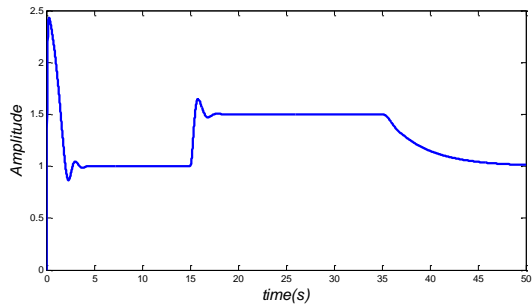
شکل ۶: ردیابی خروجی موقعیت (x)



شکل ۷: ردیابی خروجی موقعیت (y)

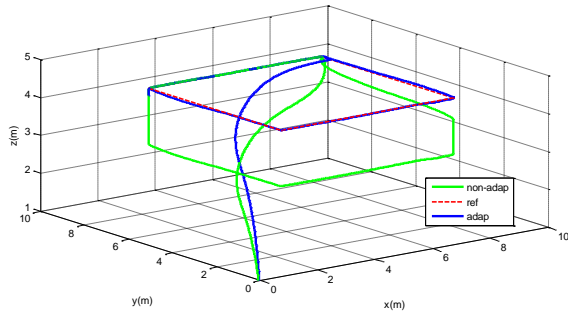


شکل ۸: ردیابی خروجی موقعیت (z)



کل ۹: ضریب جبران‌ساز تطبیقی $\hat{\alpha}$

بار اضافه‌شده در این مقاله ۱ کیلوگرم معادل ۱۰ نیوتن می‌باشد که در زمان کم‌تر از ۴ ثانیه اثر آن حذف شده است در صورتی که در مقالات [۷، ۸] که شکل ۱۰ بیانگر آن می‌باشد این اغتشاش به مقدار ۱ نیوتن است که پس از گذشت ۳۰ ثانیه اثر آن حذف شده است.



شکل ۱۵: نمودار سه بعدی مسیر ردیابی مسیر

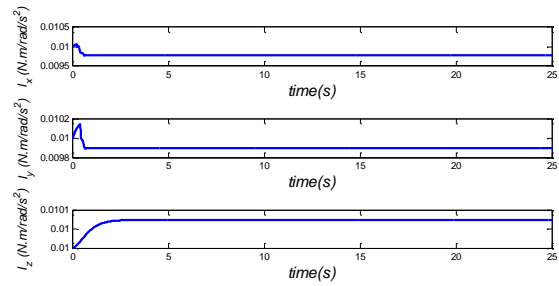
۵- نتیجه گیری

هدف از این مقاله ردیابی مسیر ایده آل و کنترل کوادروتور در حضور اغتشاش بار و در شرایط عدم اطلاع از ماتریس اینرسی می باشد. ابتدا روش کنترل مد لغزش برگشت به عقب در نظر گرفته شده است که این روش جهت ردیابی مسیر ایده آل کامل می باشد اما هنگام وارد شدن اغتشاش بار، توانایی حذف آن را ندارد. راه حل اول افزایش ضرایب مد لغزشی است که با این کار ردیابی مسیر ایده آل با سرعت کمتری انجام می شود. راه حل دوم که همان راه حل پیشنهادی در این مقاله می باشد، ضریبی را به عنوان جبران کننده تغییرات بار کوادروتور در کنترل کننده در نظر گرفته است که این روش علاوه بر حذف اغتشاش بار، ضمن محدود بودن سیگنال کنترل، سرعت ردیابی را نیز افزایش می دهد و همان طور که انتظار می رفت به دلیل وجود کنترل کننده U_1 در معادلات انتقال (x, y) ، تغییرات بار تأثیری بر روی ردیابی موقعیت (x, y) کوادروتور نداشته و از طرفی پارامترهای ماتریس اینرسی به محض تغییر زوایای کوادروتور به مقدار جدید همگرا شده اند و در مقام مقایسه با مقاله [۱۲] به ازای ورودی های یکسان، سرعت همگرایی به مقدار زیادی بهبود یافته بود. شبیه سازی عددی ارائه شده و وارد کردن اغتشاش بار به دو صورت متفاوت پله ای و نمایی، مقاوم بودن کنترل کننده طراحی شده را تأیید می کند.

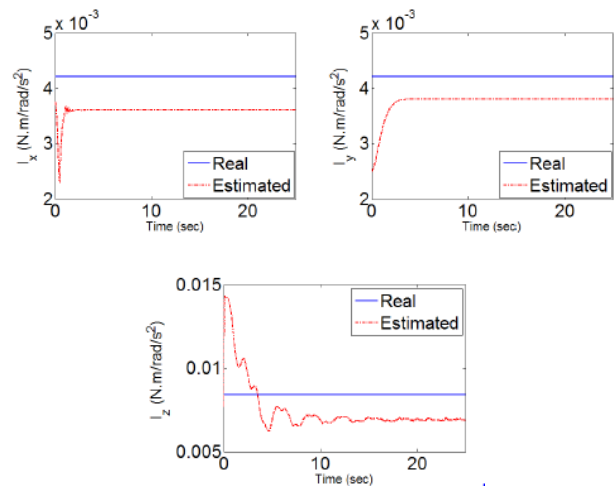
مراجع

- [1] A. Mian and W. Daobo "Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 DOF quadrotor helicopter", *Chinese Journal of Aeronautics* 21, 261-268, 2008.
- [2] T. Madani and A. Benallegue "Backstepping control for a quadrotor helicopter", *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Beijing, China October 9 - 15, 2006*.
- [3] H. Bouadi, M. Bouchoucha and M. Tadjine "Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type quadrotor", *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering* Vol. 1, No. 2, 2007.
- [4] S. Bouabdallah and R. Siegwart "Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor", *International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain, 2005*.

مقادیر (۱۵ و ۳ و ۵ و ۱) ثانیه به مقادیر (۲/۵ و ۱ و ۱) ثانیه کاهش یافته است.

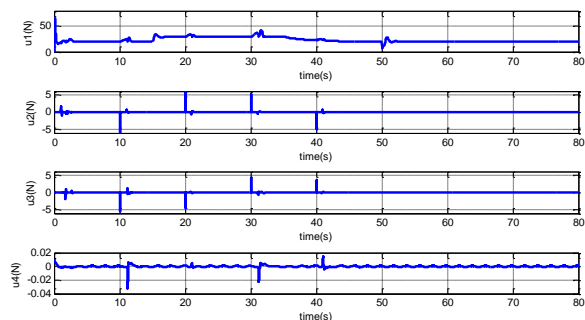


شکل ۱۲: تخمین پارامترهای ماتریس اینرسی به ازای مسیر مرجع [۱۲]



شکل ۱۳: تخمین پارامترهای ماتریس اینرسی در مرجع [۱۲]

شکل ۱۴ بیانگر ورودی های کنترلی در حضور اغتشاش باد و تغییرات بار می باشد که تأثیر آن بر روی ورودی ها کاملاً مشهود است و محدود بودن آن ها بیانگر قابل اجرا بودن روش در عمل می باشد. موارد بیان شده در مراحل قبل از قبیل ردیابی، تأثیر تغییر بار در حضور اغتشاش باد بر موقعیت کوادروتور به صورت سه بعدی در شکل ۱۵ نمایش داده شده است.



شکل ۱۴: ورودی های کنترلی

- [14] J. Cazalilla, M. Vallés, V. Mata, M. Díaz-Rodríguez and A. Valera, "Adaptive control of a 3-DOF parallel manipulator considering payload handling and relevant parameter models", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 30, pp. 468-477, 2014.
- [15] L. Márton and B. Lantos, "Control of Robotic Systems with Unknown Friction and Payload" *IEEE Transaction on Control System Technology*, vol. 19, no. 6, November 2011.
- [16] L. Liu, H. Chai and Y. Li, "Adaptive rigid control of a rigid manipulator handling a flexible payload" (*ICNC 2010*), Yantai, Shandong, China, 10-12 august 2010.
- [17] S. Beyhan, Z. Lendek, R. Babuška, M. Wisse and Musa Alc, "Adaptive fuzzy and sliding mode control of a robot manipulator with varying payload", *2011 50th IEEE Conference (CDC-ECC) Orlando, FL, USA*, December 12-15, 2011.
- [18] A. Satici, H. Poonawala and W. Spong, "Robust Optimal Control of Quadrotor UAVs", *ACCESS IEEE Robust*, vol. 1, pp. 79-93, 2013.
- [19] M.T. Elliott, X. Ma and P.N. Brett, "Tracking the position of an unknown moving load along a plate using the distributive sensing method", *Sensors and Actuators A*, vol. 138, pp. 28-36, 2007.
- [20] T. Cai, H. Zhang, L. Gu and Z. Gao "On active disturbance rejection control of the payload position for gantry cranes" *2013 (ACC) Washington, DC, USA*, June 17-19, 2013.
- [21] X. Zhang and Y. Zhang, "Fault Tolerant Control for Quad-rotor UAV by Employing Lyapunov-based Adaptive Control Approach", *AIAA Guidance Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario Canada. August 2 – 5, 2010.
- [22] T. Bresciani, *Modelling Identification and Control of a Quadrotor Helicopter*, Master Thesis, Department of Automatic Control Lund University, October 2008.
- [5] علیرضا مدیروستا و مهدی خدابنده، «طراحی یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی برای پایدارسازی زمان محدود و مقاوم پرند چهارمخه»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۶، شماره ۱، بهار ۱۳۹۵.
- [6] J. J. Xiong and E. HuiZheng, "Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV", journal homepage: <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2014.01.004i>
- [7] A. Modirrousta and M. khodabandeh, "Adaptive robust sliding mode controller design for full control of quadrotor with external disturbances", *International Conference on Robotics and Mechatronics*, Tehran, Iran. October 15-17, 2014.
- [8] A. Modirrousta and M. Khodabandeh, "Adaptive second order terminal backstepping sliding mode for attitude control of quadrotor flying robot with external disturbances", *Majlesi Journal of Electrical Engineering, (MJEE)*, vol. 9, no. 2. pp. 51-58, June 2015.
- [9] E.H. Zheng, J.J. Xiong and J.L. Luo, "Second order sliding mode control for a quadrotor UAV", *ISA Transactions*, 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2014.03.010>.
- [10] L. Luque-Vegan, B. Castillo-Toledo and Alexander G. Loukianov, "Robust block second order sliding mode control for a quadrotor", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, pp. 719-739, 2012.
- [11] T. Lee, "Robust adaptive attitude tracking on SO (3) with an application to a quadrotor UAV", *IEEE Transaction on Control System Technology*, vol. 21, no. 5, 2013.
- [12] H. Bouadi, A. Aoudjif and M. Guenifi, "Adaptive flight control for quadrotor UAV in the presence of external disturbances", *Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)*, 2015 6th International Conference on Istanbul, 27-29 May 2015.
- [13] C. Nicol, C.J.B. Macnab and A. Ramirez-Serrano, "Robust adaptive control of a quadrotor", *Mechatronics*, vol. 21, pp. 927-938, 2011.

ضمیمه ۱ - نحوه محاسبه ماتریس اینرسی

اینرسی یا همان گشتاور ماند در واقع میزان مقابله جسم در برابر چرخش از حالت طبیعی حول محور مشخصی است که به آن اینرسی دورانی نیز می‌گویند. در واقع اینرسی همان نقشی را که جرم در دینامیک خطی دارد، در دینامیک دورانی ایفا می‌کند. با تعریف I_x, I_y, I_z به ترتیب به‌عنوان اینرسی حول محورهای x, y, z در فضای سه‌بعدی، ماتریس زیر به‌عنوان ماتریس اینرسی قطری شده در نظر گرفته می‌شود.

$$I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z) \quad (54)$$

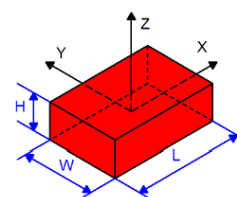
به‌عنوان مثال اینرسی برای مکعب مستطیل شکل ۱۶ به طول L ، عرض W ، ارتفاع H ، جرم M و ثابت چگالی $\rho = \frac{M}{LWH}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I = \iiint_V \rho r^2 dv \quad (55)$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_z \int_y \int_x \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \rho \left(LH \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} y^2 dy + LW \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \\ &= \frac{M}{LWH} \left(LH \frac{W^3}{12} + LW \frac{H^3}{12} \right) = M \left(\frac{W^2}{12} + \frac{H^2}{12} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho (x^2 + z^2) dx dy dz = M \left(\frac{L^2}{12} + \frac{H^2}{12} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_z \int_y \int_x \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \rho \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = M \left(\frac{L^2}{12} + \frac{W^2}{12} \right) \end{aligned} \quad (58)$$



شکل ۱۶: منشور مکعب مستطیل