

تولید چرخه حدی پایدار و مقاوم در سیستم‌های غیرخطی دارای عدم قطعیت با استفاده از کنترل کننده مد لغزشی

علیرضا حکیمی^۱، دانشجوی دکتری؛ طاهره بینازاده^۲، دانشیار

۱- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - a.hakimi@sutech.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - binazadeh@sutech.ac.ir

چکیده: ایجاد نوسانات پایدار در سیستم‌های دینامیکی یکی از مباحث مهم و کاربردی است که در این مقاله با رویکردی جدید به آن پرداخته شده است. برای این منظور، ایده جدیدی در طراحی سطح لغزش مطرح می‌گردد، به نحوی که قرار گرفتن بر روی سطح لغزش منجر به ایجاد چرخه‌های حدی پایدار و در نتیجه ایجاد نوسانات پایدار مطلوب در سیستم حلقه‌بسته دارای عدم قطعیت گردد. این امر بدون استفاده و تولید سیگنال مرجع متناوب (و مشتقات آن) که در رویکردهای مرسوم در حل مسئله ردیابی در سیستم‌های دینامیکی صورت می‌پذیرد، بوده و با استفاده از مفهوم مجموعه‌های پایا و حدی مثبت صورت پذیرفته است. برای این منظور با در نظر گرفتن چرخه حدی پایدار به‌عنوان یک مجموعه پایا و حدی مثبت، تابع لیاپانوف مناسب برای آنالیز پایداری مجموعه‌ها (به‌جای آنالیز پایداری نقطه تعادل) به‌گونه‌ای متفاوت و متناسب با شکل چرخه حدی هدف انتخاب می‌شود. سپس، بر مبنای تابع لیاپانوف انتخابی، ورودی مجازی مناسب برای ایجاد چرخه حدی پایدار در معادلات کاهش مرتبه یافته طراحی می‌گردد. پس از آن، سطح لغزش مطلوب بر اساس این ورودی مجازی انتخاب شده و قانون کنترلی مناسب جهت ایجاد نوسانات مطلوب در پاسخ خروجی و دستیابی زمان محدود به سطح لغزش مذکور طراحی گردیده است. نتایج شبیه‌سازی بر روی یک سیستم ربات با مفصل انعطاف‌پذیر، کارایی کنترل کننده پیشنهادی را در تولید چرخه حدی پایدار در سیستم حلقه‌بسته ربات و ایجاد نوسانات پایدار در خروجی آن را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: چرخه حدی، پایداری مجموعه‌های پایا، نوسانات پایدار، سیستم‌های دارای عدم قطعیت، سطح لغزش.

Generation of Stable and Robust Limit Cycle in the Uncertain Nonlinear Systems Using Sliding Mode Controller

A. Hakimi¹, PhD Student; T. Binazadeh², Associate Professor

1- Department of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: a.hakimi@sutech.ac.ir

2- Department of Electrical and Electronic Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: binazadeh@sutech.ac.ir

Abstract: Generation of stable oscillations in the dynamical systems is one of the most important practical issues that have been addressed in this paper with a new approach. For this purpose, a novel approach is proposed in designing the sliding surface, such that moving on the sliding surface leads to achieving stable limit cycle and consequently stable oscillations in the output of the uncertain closed-loop system. This is done without periodic reference signal (and its derivatives) which is a common approach in solving the tracking problem in dynamical systems and is done using the concept of positive limit sets. For this purpose, considering a limit cycle as an invariant and positive limit set, the Lyapunov function that is suitable for stability analysis of the invariant sets (instead of stability analysis of equilibrium point) is selected in a different way depend on the geometric shape of the target limit cycle. Next, based on this Lyapunov function, the suitable virtual control input is designed in order to create the considered stable limit cycle in the reduced order equations. After that, the suitable sliding surface is selected according to this virtual control input and appropriate control input is designed to reach the sliding surface in the finite time and create the admissible oscillations in the output response. Simulation results on single link flexible joint robot demonstrate the proficiency of the proposed controller in generating stable limit cycle in the closed-loop robot system and creating stable oscillations in its output.

Keywords: Limit cycle, stability of invariant sets, stable oscillations, uncertain systems, sliding surface.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۱۰/۱۹

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۲۹ و ۱۳۹۵/۰۵/۱۴ و ۱۳۹۵/۰۷/۰۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۱۳

نام نویسنده مسئول: طاهره بینازاده

نشانی نویسنده مسئول: ایران - شیراز - بلوار مدرس - دانشگاه صنعتی شیراز - دانشکده برق و الکترونیک.

۱- مقدمه

آنجایی که بسیاری از سیستم‌های عملی که ایجاد نوسانات پایدار در آن‌ها اهمیت دارد، از مراتب بالاتر هستند لذا نیاز است که بحث ایجاد چرخه‌های حدی مقاوم در سیستم‌هایی از مراتب بالاتر نیز مورد بررسی قرار گیرد که این امر موضوع مقاله حاضر می‌باشد که البته با تکنیکی متفاوت از مرجع [۱۱] به آن پرداخته شده است.

یکی از تکنیک‌های مقاوم در طراحی کنترل‌کننده، روش کنترلی مد لغزشی (SMC) می‌باشد [۱۲]. به‌طور خلاصه، مد لغزشی شامل دو فاز اصلی می‌باشد: فاز دستیابی و فاز لغزش. در این روند ابتدا سطح لغزش مناسب به نحوی طراحی می‌گردد که معادلات حرکت بر روی سطح لغزش (معادلات کاهش مرتبه یافته) پایدار مجانبی باشند. در فاز دستیابی با توجه به اینکه شرایط اولیه متغیرهای حالت می‌توانند خارج از سطح لغزش قرار گیرند، قانون کنترلی به نحوی طراحی می‌گردد که دستیابی به سطح لغزش، فاز لغزش آغاز می‌شود که عملکرد مناسب در دستیابی به سطح لغزش، فاز لغزش آغاز می‌شود که عملکرد مناسب در این فاز به انتخاب مناسب سطح لغزش باز می‌گردد.

تاکنون، از تکنیک مد لغزشی عمدتاً به‌منظور پایدارسازی مبدأ در سیستم‌های گوناگون از قبیل سیستم‌های دارای عدم قطعیت [۱۳، ۱۴]، سیستم‌های فازی [۱۵]، سیستم‌های گسسته-زمان [۱۶، ۱۷] و یا سیستم‌های دارای تأخیر [۱۸، ۱۹] استفاده شده است. حتی در استفاده از این تکنیک در ردیابی سیگنال مرجع، ابتدا معادلات دینامیک خطا نوشته می‌شود و سپس سطح لغزش به‌نحوی طراحی می‌گردد که پایداری مبدأ برای دینامیک خطا تضمین شود [۲۰، ۲۱].

در این مقاله، از این تکنیک به‌منظور ایجاد چرخه‌های حدی پایدار در سیستم‌های دارای عدم قطعیت سازگار استفاده می‌شود. این امر با ارائه رویکردی متفاوت در طراحی سطح لغزش انجام پذیرفته است، به‌نحوی که واقع شدن مسیره‌های فاز سیستم بر روی سطح لغزش طراحی شده منجر به ایجاد چرخه حدی مطلوب در معادلات کاهش مرتبه یافته و در نتیجه ایجاد نوسانات پایدار در خروجی سیستم (در حضور ترم‌های نایقینی سازگار با ورودی) شود.

در ادامه، پس از ارائه برخی قضایا و تعاریف پایه، اصول طراحی کنترل‌کننده مقاوم بر اساس ایده ارائه شده در این مقاله به‌تفصیل شرح داده می‌شود. در انتها نیز، به‌منظور نشان‌دادن کاربردی بودن ایده مطرح شده و تأیید نتایج تئوری، کنترل‌کننده پیشنهادی برای معادلات دینامیکی یک ربات با مفصل انعطاف‌پذیر که یک سیستم مرتبه چهارم است طراحی گردیده و در محیط سیمولینک شبیه‌سازی گردیده است. نتایج شبیه‌سازی عملکرد مطلوب قانون کنترلی پیشنهادی را نشان می‌دهند.

۲- قضایا و تعاریف پایه‌ای

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

ایجاد نوسانات پایدار در سیستم‌های غیرخطی، یکی از مباحث مهم در تئوری کنترل می‌باشد. این اهمیت به‌دلیل کاربردی بودن این نوسانات در بسیاری از زمینه‌های علوم مهندسی از قبیل نوسان‌سازهای الکترونیکی آزمایشگاهی [۱]، مبدل‌های قدرت [۲، ۳]، الگوهای حرکتی که در ربات‌های انسان‌نما و یا ربات‌های صنعتی مشاهده می‌شود مثل الگوی قدم‌برداشتن ربات انسان‌نما که تکرار پیایی آن، حرکت ربات را منجر می‌شود [۴] و اخیراً ناوبری ربات‌های هدایت‌شونده با استفاده از مسیره‌های فاز معادلات دیفرانسیل دارای چرخه حدی پایدار [۵] می‌باشد.

تاکنون، دو رویکرد عمده به‌منظور تولید نوسانات پایدار در سیستم‌های غیرخطی پیشنهاد شده است. در رویکرد اول، مسئله‌ی ایجاد نوسانات پایدار به مسئله‌ی ردیابی یک سیگنال مرجع متناوب در خروجی سیستم حلقه بسته تبدیل می‌شود که بر این اساس کنترل‌کننده‌های گوناگون غیرخطی تحلیلی و هوشمند برای سیستم‌های با ساختار گوناگون پیشنهاد داده شده است [۶، ۷]. از معایب این رویکرد را می‌توان نیاز به تولید سیگنال مرجع و مشتقات آن ذکر کرد که برای برطرف نمودن آن رویکرد دومی ارائه گردید. در رویکرد دوم قضایای پایداری لیاپانوف از پایداری نقطه تعادل به پایداری مجموعه‌ها بسط داده می‌شود. بر اساس این رویکرد، قانون کنترلی به‌گونه‌ای طراحی می‌گردد که باعث ایجاد چرخه حدی (به‌عنوان یک مجموعه حدی مثبت) در سیستم حلقه‌بسته گردد که خود باعث ایجاد نوسانات پایدار در خروجی سیستم می‌شود. این امر با انتخاب متفاوت تابع لیاپانوف صورت می‌پذیرد و این تابع بر اساس شکل هندسی چرخه حدی مطلوب انتخاب می‌شود. مراجع [۸-۱۰] قانون کنترلی مناسب را بر اساس این رویکرد، برای سیستم‌های غیرخطی گوناگون و با استفاده از تکنیک‌های غیرخطی همچون CLF [۸]، پسگام [۹] و ... طراحی نموده‌اند. این در حالی است که به‌رغم مزایای این رویکرد، طراحی قانون کنترلی مقاوم بر اساس این رویکرد تاکنون کمتر مد نظر قرار گرفته است و اکثر مقالات تنها مدل نامی از سیستم را در روند طراحی در نظر گرفته‌اند. واضح است که به دلایلی نظیر ساده‌سازی در فرایند مدل‌سازی، وجود خطا در اندازه‌گیری پارامترهای سیستم و یا اغتشاشات خارجی، ترم‌های نایقینی در روند مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی ایجاد می‌گردد که عدم در نظر گرفتن آن‌ها در روند طراحی کنترل‌کننده، منجر به عملکرد نامطلوب کنترل‌کننده طراحی شده در عمل می‌گردد. بر همین اساس، در مرجع [۱۱] یک روش مقاوم برای ایجاد چرخه حدی در دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی ارائه گردیده است. البته در مرجع [۱۱] صرفاً سیستم‌های غیرخطی از مرتبه ۲ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و چرخه حدی ایجادشده با استفاده از روش بازطراحی لیاپانوفی مقاوم‌سازی گردیده است. مرجع مذکور از این جنبه که صرفاً سیستم‌های غیرخطی از مرتبه ۲ را بررسی نموده است دارای محدودیت کاربردی بوده و از

$f_1(\eta, \xi): R^n \rightarrow R$ و $f_0(\eta, \xi): R^n \rightarrow R$ ، $f_a(\eta, \xi): R^n \rightarrow R^{n-1}$ توابعی هموار هستند که شروط $f_0(0,0)=0$ ، $f_a(0,0)=0$ و $f_1(\eta, \xi) \neq 0$ را در ناحیه D برآورده می‌کنند. همچنین $f_1(\eta, \xi) \geq \bar{f}_1 > 0$ می‌باشد که \bar{f}_1 یک ثابت مثبت است. علاوه بر این تابع $\bar{\delta}(t, x)$ ترم عدم قطعیت است که می‌تواند ناشی از عواملی مثل ساده‌سازی در فرایند مدل‌سازی، عدم قطعیت در پارامترها، خطای اندازه‌گیری و یا ناشی از عوامل اغتشاشی باشد. این تابع، تکه‌ای پیوسته در t و به‌اندازه کافی هموار در x فرض می‌شود. اگرچه این تابع نامعلوم است، اما حد بالای آن که تابع مثبت $\rho(x)$ است معلوم در نظر گرفته می‌شود.

$$|\bar{\delta}(t, x)| \leq \rho(x) \quad (۶)$$

هدف، طراحی قانون کنترلی مقاوم برای ایجاد نوسانات پایدار در خروجی‌های سیستم (۵) با استفاده از رویکرد مد لغزشی است. سیستم (۵) دارای فرم رگولار است و ξ را هم می‌توان به‌عنوان ورودی مجازی برای زیرسیستم اول آن (زیرسیستم $\dot{\eta}$) در نظر گرفت. بنابراین در مرحله اول، ورودی مجازی $\xi = \phi(\eta)$ باید به‌گونه‌ای طراحی شود که مدل کاهش مرتبه یافته یعنی دینامیک $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$ که در واقع گویای معادلات حرکت بر روی سطح لغزش می‌باشد، به نوسانات پایدار مورد نظر دست یابد. سپس، با در اختیار داشتن $\phi(\eta)$ ، سطح لغزش مناسب به‌صورت $\sigma = \xi - \phi(\eta)$ طراحی گردیده و با برقراری قید دستیابی زمان محدود، قانون کنترلی مقاوم محاسبه می‌شود. همان‌طور که در مقدمه نیز ذکر شد در مد لغزشی کلاسیک، $\phi(\eta)$ به نحوی طراحی می‌گردد که دینامیک کاهش مرتبه یافته پایدار مجانبی باشد. ایده اصلی این مقاله، طراحی $\phi(\eta)$ به نحوی است که معادلات کاهش مرتبه یافته دارای چرخه حدی پایدار مطلوب باشند.

۳-۱- طراحی سطح لغزش

در مقدمه به روش‌های متفاوتی برای ایجاد پاسخ‌های نوسانی در سیستم‌های دینامیکی مختلف اشاره گشت. در اینجا، ایجاد پاسخ نوسانی با استفاده از چرخه‌های حدی پایدار مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. به‌طور خاص، روش ذکرشده در این قسمت، برای سیستم‌هایی از مرتبه دلخواه که در فرم آبخاری هستند (و یا با اعمال تبدیل مناسب به این فرم در می‌آیند) کاربرد دارد. در این روش، با استفاده از خاصیت آبخاری سیستم که ایده پسگام در آن قابل اعمال است، ورودی مجازی $\xi = \phi(\eta)$ ، مرحله به مرحله و به‌صورت بازگشتی محاسبه می‌گردد. سپس با در دست داشتن $\phi(\eta)$ سطح لغزش طراحی می‌گردد. بر همین اساس، زیرسیستم $\dot{\eta}$ از سیستم (۵) را با $n-1=m \geq 2$ متغیر حالت به‌صورت زیر در نظر بگیرد:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= f_2(\eta_1, \eta_2) + g_2(\eta_1, \eta_2)\eta_3 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_m &= f_m(\eta_1, \dots, \eta_m) + g_m(\eta_1, \dots, \eta_m)\xi \end{aligned} \quad (۷)$$

که $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in D \subset R^n$ ($\{0\} \in D$) بردار حالت و $f: D \rightarrow R^n$ یک تابع پیوسته در D است که شرط $f(0) = 0$ را برآورده می‌کند. پاسخ سیستم (۱) با فرض شرط اولیه $x(0) = x_0$ به‌صورت $s(t, x_0)$ بیان می‌گردد.

تعریف ۱ [۲۱]: مجموعه $M \subset D \subseteq R^n$ یک مجموعه پایای مثبت از سیستم (۱) است اگر به ازای هر $t \geq 0$ ، $s(t, M) \subseteq M$ باشد که $s(t, M) = \{s(t, x) : x \in M\}$.

تعریف ۲ [۱۲]: مجموعه پایا و بسته M پایدار مجانبی است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد یک $\delta > 0$ به‌نحوی که:

$$x(0) \in U_\delta \Rightarrow x(t) \in U_\varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (۲)$$

که در عبارت فوق:

$$U_\delta = \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, M) < \delta\}; U_\varepsilon = \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, M) < \varepsilon\} \quad (۳)$$

$$\text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

و همچنین:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x, M) = 0 \quad (۴)$$

قضیه ۱ [۱۲]: مجموعه پایا مثبت و بسته از سیستم (۱) را در نظر بگیرید. اگر یک تابع پیوسته دیفرانسیل پذیر $V(x)$ وجود داشته باشد به‌نحوی که:

$$V(x) = 0, \quad \forall x \in M \quad (۱)$$

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in \{D \setminus M\} \quad (۲)$$

$$\dot{V}(x) = (\partial V / \partial x)f(x) < 0, \quad \forall x \in \{D \setminus M\} \quad (۳)$$

آنگاه مجموعه M پایدار مجانبی است. (به صفحات ۳۳۱ و ۳۳۲ از مرجع [۱۲] مراجعه شود).

۳-۲- ایجاد چرخه حدی مقاوم

در این بخش به بیان رویکرد پیشنهادی پرداخته می‌شود. رویکرد مذکور بر اساس توسعه روش مد لغزشی از پایدارسازی نقطه تعادل به ایجاد چرخه حدی مقاوم است. طراحی کنترل‌کننده به روش مد لغزشی شامل دو مرحله است: مرحله اول طراحی سطح لغزش است به‌نحوی که حرکت سیستم در امتداد سطح لغزش، هدف کنترلی مسئله را برآورده سازد. مرحله دوم، طراحی قانون کنترلی است به‌نحوی که متغیرهای حالت سیستم به سمت سطح لغزش حرکت کرده و پس از رسیدن به سطح لغزش در زمان محدود بر روی آن باقی بمانند. سیستم غیرخطی در فرم کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_a(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= f_0(\eta, \xi) + f_1(\eta, \xi)u + \bar{\delta}(t, x) \\ y &= C\eta \end{aligned} \quad (۵)$$

که $x = [\eta^T \ \xi]^T \in D \subset R^n$ بردار حالت ($\xi \in R$) و $\eta \in R^{n-1}$ ، $u \in R$ ورودی کنترلی، $y = [\eta_1 \ \eta_2]^T$ بردار خروجی است. توابع غیرخطی

راستای معادلات سیستم حلقه‌بسته (۱۱) با اعمال قانون کنترلی (۱۲) محقق می‌گردد. ■

در ادامه، با استفاده از خاصیت آشنایی سیستم (۷) و با استفاده از روش پسگام، ورودی مجازی ξ برای سیستم (۷) محاسبه می‌گردد. بدین منظور، ابتدا متغیر جدیدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_3 = \eta_3 - \varphi_3(\eta_1, \eta_2) \quad (14)$$

حال سه معادله اول از سیستم (۷) را در نظر گرفته و معادلات سیستم را در مختصات جدید (η_1, η_2, z_3) بازنویسی می‌کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -k_d(\gamma - r^2)\lambda - \tau + g_2 z_3 \\ \dot{z}_3 &= \dot{\eta}_3 - \dot{\varphi}_3 = f_3 + g_3 \eta_4 - \dot{\varphi}_3 \end{aligned} \quad (15)$$

که در رابطه فوق $(\partial \varphi_3 / \partial \eta_1) \dot{\eta}_1 + (\partial \varphi_3 / \partial \eta_2) \dot{\eta}_2$ می‌باشد. حال متغیر η_4 را می‌توان به عنوان ورودی مجازی برای زیرسیستم (۱۵) در نظر گرفت. در ادامه تابع لیاپانوف زیر برای سیستم (۱۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} V_3(\eta_1, \eta_2, z_3) &= V_2(\eta_1, \eta_2) + \frac{1}{2} z_3^2 \\ &= \frac{1}{2} (\gamma(\eta_1, \eta_2) - r^2)^2 + \frac{1}{2} z_3^2 \end{aligned} \quad (16)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \frac{\partial V_2}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} \dot{\eta}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\ &= -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} g_2 z_3 \\ &\quad + z_3 (f_3 + g_3 \eta_4 - \dot{\varphi}_3) \end{aligned} \quad (17)$$

حال با انتخاب $\eta_4 = \varphi_4(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \eta_4 &= \varphi_4(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \\ &= \frac{1}{g_3} \left(-f_3 + \dot{\varphi}_3 - \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} g_2 - c_3 z_3 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن c_3 یک ثابت مثبت است و با جایگذاری (۱۸) در (۱۷) داریم:

$$\dot{V}_3(\eta_1, \eta_2, z_3) = -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 - c_3 z_3^2 \quad (19)$$

که کاهشی بودن تابع لیاپانوف (۱۶) را به ازای $\gamma(\eta_1, \eta_2) - r^2 \neq 0$ و $z_3 \neq 0$ نتیجه می‌دهد. با توجه به منفی معین بودن (۱۹) در نواحی مذکور، $(\gamma(\eta_1, \eta_2) - r^2)$ و z_3 به صفر همگرا می‌شوند. بنابراین، $\gamma(\eta_1, \eta_2) \rightarrow r^2$ همگرا شده و چرخه حدی مطلوب در صفحه $\eta_1 - \eta_2$ ایجاد می‌شود.

این رویه بازگشتی تا محاسبه قانون کنترلی $\xi = \phi(\eta)$ ادامه می‌یابد. در حالت کلی، ورودی کنترلی $\xi = \phi(\eta)$ در دو حالت $m = 2$ و $m > 2$ از روابط زیر محاسبه می‌شود:

حالت اول $m = 2$: در این حالت تابع $\phi(\eta)$ به صورت زیر خواهد بود:

که $\xi \in R$ ، $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_m]^T \in D \subset R^m$ ، $\{0\} \in D$ به منزله ورودی مجازی، $f_i(\cdot)$ و $g_i(\cdot)$ ها به ازای $i = 2, 3, \dots, m$ توابع غیرخطی هموار در D با شرط $f_i(0) = 0$ و $g_i(\eta) \neq 0$ هستند.

برای محاسبه ورودی $\xi = \phi(\eta)$ مناسب، ابتدا لازم است شکل هندسی چرخه حدی مطلوب تعیین گردد. بدین منظور، در حالت کلی، چرخه حدی مطلوب را به صورت مجموعه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{M} = \{ \eta \in R^m : \text{where } \gamma(\eta_1, \eta_2) = r^2 \} \quad (8)$$

که $\gamma(\eta_1, \eta_2)$ یک تابع هموار، مثبت و پیوسته دیفرانسیل پذیر بوده و $r \neq 0$ مقداری ثابت و مثبت است.

نکته ۱: شکل تابع $\gamma(\eta_1, \eta_2)$ و همچنین دامنه ثابت r ، در دامنه و فرکانس نوسانات پایدار که در سیستم ایجاد می‌شوند، مؤثر است و باید با توجه به پاسخ نوسانی مطلوب تعیین گردند. به عنوان مثال اگر پاسخ زمانی مطلوب $\eta_1(t)$ و $\eta_2(t)$ به صورت زیر باشند:

$$\eta_1(t) = A \sin \omega_0 t, \quad \eta_2(t) = A \omega_0 \cos \omega_0 t, \quad (9)$$

آنگاه باید چرخه حدی زیر که دارای شکل هندسی بیضوی است در صفحه $\eta_1 - \eta_2$ برای سیستم حلقه‌بسته (۷) ایجاد گردد [۱۱]:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \eta_1^2 + \eta_2^2 &= r^2, \\ r &= A \omega_0 \end{aligned} \quad (10)$$

به منظور محاسبه قانون کنترلی جهت همگرایی سیستم حلقه‌بسته به مجموعه حدی تعریف شده در (۸)، ابتدا معادله اول و دوم از سیستم (۷) را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= f_2(\eta_1, \eta_2) + g_2(\eta_1, \eta_2) \eta_3 \end{aligned} \quad (11)$$

در این زیرسیستم، متغیر η_3 را می‌توان به عنوان ورودی مجازی در نظر گرفت. قانون کنترلی مجازی $\eta_3 = \varphi_3(\eta_1, \eta_2)$ که چرخه حدی مطلوب را در سیستم (۱۱) ایجاد می‌کند در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۲ [۱۰]: قانون کنترلی زیر، چرخه حدی پایدار \bar{M} را در صفحه فاز سیستم (۱۱) تولید می‌کند:

$$\begin{aligned} \eta_3 &= \varphi_3(\eta_1, \eta_2) \\ &= \frac{1}{g_2} \left(-f_2 - k_d (\gamma - r^2) \lambda - \tau \right) \end{aligned} \quad (12)$$

که $k_d > 0$ پارامتر ثابت و توابع λ و τ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \lambda(\eta_1, \eta_2) &= \frac{\partial \gamma(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2}, \\ \tau(\eta_1, \eta_2) &= \eta_2 \frac{\partial \gamma(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} / \lambda(\eta_1, \eta_2). \end{aligned} \quad (13)$$

اثبات: به مرجع [۱۰] مراجعه شود. در این مرجع تابع لیاپانوف به صورت $V_2(\eta_1, \eta_2) = 0.5(\gamma(\eta_1, \eta_2) - r^2)^2$ انتخاب گردیده که شروط (۱) و (۲) قضیه ۱ را برای مجموعه \bar{M} دارا است. همچنین نشان داده شده که شرط سوم قضیه ۱ نیز با مشتق‌گیری از این تابع لیاپانوف در

بوده و در نتیجه با حرکت بر روی سطح لغزش $\sigma=0$ ، می‌توان تضمین نمود که معادلات حرکت بر روی سطح $(\dot{\eta}=f_a(\eta, \phi(\eta)))$ ، همگرایی به مجموعه حدی $\gamma(\eta_1, \eta_2) = r^2$ را تضمین می‌کند.

۲-۳- طراحی قانون کنترلی

در این قسمت، قانون کنترلی برای سیستم (۵) با استفاده از کنترل کننده مد لغزشی به گونه‌ای طراحی می‌شود تا سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی، به چرخه حدی مطلوب دست یابد.

در طراحی قانون کنترلی با استفاده از مد لغزشی مرتبه اول، قانون کنترلی به نحوی طراحی می‌گردد که شرط زیر برقرار باشد [۱۲]:

$$\dot{\sigma} \leq -N|\sigma| \quad (28)$$

که N یک ثابت مثبت است. این شرط **قانون دستیابی** نامیده می‌شود و تضمین می‌کند که تمام مسیرهایی که خارج از سطح لغزش شروع شده‌اند (به عبارتی $\sigma(0) \neq 0$ است)، در زمان محدود t_r به سطح لغزش $\sigma=0$ رسیده و دیگر آن را ترک نمی‌کنند.

برای طراحی قانون کنترلی، ابتدا از سطح لغزش مشتق گرفته می‌شود. لذا با استفاده از معادله سیستم (معادله (۵)) نتیجه می‌شود:

$$\dot{\sigma} = \dot{\xi} - \dot{\phi}(\eta) = f_0(\eta, \xi) + f_1(\eta, \xi)u + \bar{\delta}(t, x) - \dot{\phi}(\eta) \quad (29)$$

با انتخاب تابع لیاپانوف $V(\sigma) = 0.5\sigma^2$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma) &= \sigma(t)\dot{\sigma}(t) \\ &= \sigma(t)(f_0(\eta, \xi) + f_1(\eta, \xi)u(t) + \bar{\delta}(t, x) - \dot{\phi}(\eta)) \end{aligned} \quad (30)$$

اکنون قانون کنترلی به صورت زیر طراحی می‌گردد:

$$u = \frac{-f_0 - \dot{\phi}}{f_1} + v \quad (31)$$

جایگذاری عبارت فوق در معادله (۲۹)، نتیجه می‌دهد:

$$\dot{\sigma} = f_1(\eta, \xi)v + \bar{\delta}(t, x) \quad (32)$$

حال با توجه به حد بالای تابع $\bar{\delta}(t, x)$ و حد پایین تابع f تابع مثبت $\rho_1(x)$ به دست می‌آید به نحوی که:

$$\left| \frac{\bar{\delta}(t, x)}{f_1} \right| \leq \rho_1(x) \quad (33)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sigma\dot{\sigma} &= \sigma\bar{\delta}(t, x) + \sigma f_1 v \\ &\leq f_1 \{ \sigma v + |\sigma| \rho_1(x) \} \end{aligned} \quad (34)$$

حال با انتخاب $v = -\beta(x)\text{sgn}(\sigma)$ که در آن $\beta(x) \geq \rho_1(x) + \beta_0$ می‌باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \sigma\dot{\sigma} &\leq f_1 \{-\beta(x) + \rho_1(x)\} |\sigma| \\ &\leq f_1 \{-\rho_1(x) - \beta_0 + \rho_1(x)\} |\sigma| \\ &\leq -f_1 \beta_0 |\sigma| \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(\eta) \\ &= \frac{1}{g_2} (-f_2 - k_d(\gamma - r^2)\lambda - \tau) \end{aligned} \quad (20)$$

با این ورودی مجازی، مشتق تابع لیاپانوف $V_2(\eta_1, \eta_2) = 0.5(\gamma(\eta) - r^2)^2$ خواهد بود:

$$\dot{V}_2 = -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 \quad (21)$$

حالت دوم $m > 2$: بر اساس روند ذکرشده در این حالت تابع $\phi(\eta)$ خواهد بود:

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(\eta) \\ &= \frac{1}{g_m(\eta)} \left(-f_m(\eta) + \dot{\phi}_m(\eta) - \frac{\partial V_{m-1}}{\partial z_{m-1}} g_{m-1}(\eta) - c_m z_m \right) \end{aligned} \quad (22)$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \frac{1}{g_2} (-f_2 - k_d(\gamma - r^2)\lambda - \tau) \\ \varphi_i &= \frac{1}{g_{i-1}} (-f_{i-1} + \dot{\phi}_{i-1} - c_{i-1} z_{i-1} - \frac{\partial V_{i-2}}{\partial z_{i-2}} g_{i-2}) \text{ for } i = 4, \dots, m \\ V_2 &= 0.5(\gamma - r^2)^2 \\ V_i &= 0.5(\gamma - r^2)^2 + 0.5z_3^2 + \dots + 0.5z_i^2 \text{ for } i = 3, \dots, m \end{aligned} \quad (23)$$

که c_i ها ثوابت مثبت هستند و داریم:

$$\begin{aligned} z_2 &= \eta_2 \\ z_i &= \eta_i - \varphi_i(\eta_1, \dots, \eta_{i-1}), \quad i = 3, \dots, m \end{aligned} \quad (24)$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{i-1} &= (\partial \varphi_{i-1} / \partial \eta_1) \dot{\eta}_1 + (\partial \varphi_{i-1} / \partial \eta_2) \dot{\eta}_2 + \\ &\dots + (\partial \varphi_{i-1} / \partial \eta_{i-2}) \dot{\eta}_{i-2} \end{aligned} \quad (25)$$

و توابع λ و τ نیز در رابطه (۱۳) تعریف شده‌اند.

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف زیر:

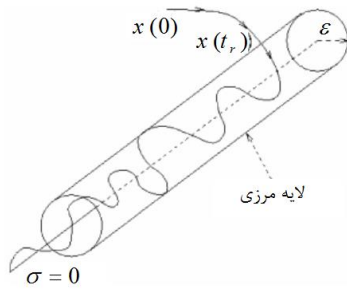
$$V_m(\eta_1, \eta_2, z_3, \dots, z_m) = \frac{1}{2}(\gamma(\eta) - r^2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^m 0.5z_i^2 \quad (26)$$

با جایگذاری ورودی مجازی (۲۲) در مشتق تابع لیاپانوف، نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{V}_m = -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 - \sum_{i=3}^m c_i z_i^2 \quad (27)$$

بنابراین، ورودی مجازی (۲۲) همگرایی مسیره‌های فاز زیرسیستم (۷) را به منحنی $\gamma(\eta_1, \eta_2) - r^2 = 0$ و همگرایی $z_i \rightarrow 0$ (برای سیستم (۷) از طریق دستیابی به چرخه حدی پایدار $\gamma(\eta_1, \eta_2) = r^2$ در صفحه $\eta_1 - \eta_2$ ایجاد می‌گردد.

پس از طراحی $\phi(\cdot)$ و جایگذاری $\xi = \phi(\eta)$ در زیرسیستم اول از سیستم (۵)، معادله دینامیکی $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$ دارای چرخه حدی مطلوب می‌باشد. حال سطح لغزش $\sigma = \xi - \phi(\eta)$ به عنوان سطح لغزش مناسب در نظر گرفته می‌شود. زیرا $\sigma=0$ معادل با $\xi = \phi(\eta)$



شکل ۱: مفهوم لایه مرزی

که $\phi(\eta)$ در رابطه (۲۲) داده شده است. تفاوت معادلات فوق با حالتی که تابع sgn استفاده شود این است که در حالت قبل چون دقیقاً در فاز لغزش مسیره‌های فاز سیستم بر روی خود سطح لغزش واقع می‌شد (نه در یک لایه مرزی حول سطح) لذا $\sigma(t) = 0$ بود ولی در این حالت از آنجایی که در فاز لغزش $\sigma(t)$ غیر صفر است؛ لذا در معادلات فوق ظاهر شده است. البته چون اثبات گردید که مسیره‌های فاز سیستم در زمان محدود به لایه مرزی رسیده و در آن می‌ماند. لذا در فاز لغزش $|\sigma(t)| \leq \epsilon$ است.

حال اگر همان تابع لیاپانوف رابطه (۲۶) را برای سیستم فوق اعمال شده و مشابه روند اثبات شده در مقاله عمل گردد، ناشی از صفر نبودن $\sigma(t)$ یک جمله به مشتق تابع لیاپانوف که در (۲۷) آورده شده است اضافه می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$\dot{V}_m = -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 - \sum_{i=3}^m c_i z_i^2 + g_m \sigma z_m \quad (40)$$

با توجه به اینکه در لایه مرزی $|\sigma(t)| \leq \epsilon$ است لذا داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &\leq -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 - \sum_{i=3}^{m-1} c_i z_i^2 - c_m z_m^2 + |g_m| |z_m| \epsilon \\ &= -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 - \sum_{i=3}^{m-1} c_i z_i^2 - c_m (1 - \theta) z_m^2 \\ &\quad - c_m \theta z_m^2 + |g_m| |z_m| \epsilon \end{aligned} \quad (41)$$

که در عبارت فوق $\theta \in (0, 1)$ است. لذا برای ناحیه‌ای که دو جمله آخر عبارت فوق منفی شوند یعنی ناحیه $|z_m| \geq \frac{|g_m| \epsilon}{c_m \theta}$ داریم:

$$\dot{V}_m \leq -k_d \lambda^2 (\gamma - r^2)^2 - \sum_{i=3}^{m-1} c_i z_i^2 - c_m (1 - \theta) z_m^2 \quad (42)$$

اگر به قضایای فصل ۴ مرجع [۱۲] که در مورد حد نهایی پاسخ است، مراجعه شود عبارت فوق دقیقاً حد نهایی خطا را تضمین می‌نماید. در واقع منفی بودن تابع لیاپانوف در ناحیه مذکور بیانگر این است که در فاز لغزش علی‌رغم اینکه مسیره‌های فاز سیستم به جای قرار گرفتن دقیق بر روی سطح در لایه مرزی اطراف سطح باقی می‌مانند، برای هر $|z_m| \geq |g_m| \epsilon / (c_m \theta)$ مسیره‌ها به نحوی حرکت می‌کنند که خطا کاهش یابد در ضمن مشخص است که ϵ کوچک‌تر ناحیه پایداری بزرگ‌تر و دقت بیشتری را نتیجه می‌دهد.

در ادامه، به منظور نشان دادن روند طراحی، یک مثال عملی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بنابراین، قانون دستیابی زمان محدود به ازای $N = \bar{f}_1 \beta_0$ برقرار گردید و قانون کنترلی (۳۱) باعث حذف اثر اغتشاشات در زمان محدود در پاسخ خروجی سیستم می‌شود. حال اگر در شروع، شرایط اولیه بر روی سطح لغزش $\sigma(t) = 0$ واقع نباشند دو حالت متصور است: یا $\sigma(0) < 0$ است و یا $\sigma(0) > 0$ است. در حالت اول برقراری قانون دستیابی $|\dot{\sigma}| \leq -N|\sigma|$ برای $\sigma(0) > 0$ منجر به $\dot{\sigma} \leq -N$ شده و برای حالت دوم منجر به $\dot{\sigma} \geq N$ می‌شود. در هر دو مورد با انتگرال‌گیری از طرفین روابط حاصل شده از 0 تا t این نتیجه حاصل می‌شود که $\sigma(t)$ در زمان محدود t_r صفر شده و بعد از آن صفر می‌ماند که $t_r \leq \frac{|\sigma(0)|}{N}$ است. به عبارت دیگر $\sigma(t) = 0, \forall t \geq t_r$ است.

لذا برقراری قانون دستیابی تضمین می‌کند که قانون کنترلی طراحی شده زمان محدود بودن فاز دستیابی را محقق ساخته است.

نکته ۲: قانون کنترلی (۳۱) گسسته است و در عمل می‌تواند باعث ایجاد پدیده چترینگ در سیستم شود. این پدیده ناشی از نقص در سوییچ‌زنی و تأخیر در آن می‌باشد. برای حذف این پدیده می‌توان از تقریب پیوسته تابع sgn استفاده کرد. در اینجا از تابع sat با شیب زیاد $1/\epsilon$ استفاده می‌شود. لذا داریم:

$$\begin{aligned} v &= -\beta(x) \text{sat}\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right) \quad \text{where} \\ \text{sat}\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right) &= \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) & |\sigma| \geq \epsilon \\ \frac{\sigma}{\epsilon} & |\sigma| \leq \epsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

با جایگذاری عبارت فوق در معادله (۳۴) خواهیم داشت:

$$\dot{\sigma} \leq f_1 \left\{ \sigma \left(-\beta(x) \text{sat}\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right) \right) + |\sigma| \rho_1(x) \right\} \quad (37)$$

لذا در ناحیه $|\sigma| \geq \epsilon$ بر اساس تعریف ذکر شده از تابع اشباع نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &\leq f_1 \left\{ \sigma (-\beta(x) \text{sgn}(\sigma)) + |\sigma| \rho_1(x) \right\} \\ &\leq f_1 \left\{ -\rho_1(x) - \beta_0 + \rho_1(x) \right\} |\sigma| \\ &\leq -\bar{f}_1 \beta_0 |\sigma| \quad \text{for } |\sigma| \geq \epsilon \end{aligned} \quad (38)$$

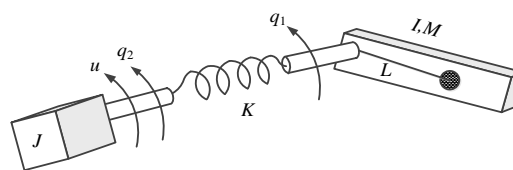
در این حالت، عبارت فوق تضمین می‌کند که مسیره‌های فاز در زمان محدود به یک محدوده در اطراف سطح لغزش می‌رسند و در آن محدوده باقی می‌مانند که در آن محدوده $\{|\sigma(t)| \leq \epsilon\}$ است. این محدوده به لایه مرزی موسوم است [۱۲]. شکل ۱ این مفهوم را نشان می‌دهد.

در این صورت معادلات سیستم در فاز لغزش (برای $t \geq t_r$) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -k_d (\gamma - r^2) \lambda - \tau + g_2 z_3 \\ \dot{z}_3 &= \dot{\eta}_3 - \dot{\phi}_3 = f_3 + g_3 \eta_4 - \dot{\phi}_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_m &= f_m(\eta_1, \dots, \eta_m) + g_m(\eta_1, \dots, \eta_m)(\phi(\eta) + \sigma) \end{aligned} \quad (39)$$

۴- بررسی یک مثال و شبیه‌سازی

ساختار مکانیکی سیستم ربات با مفصل انعطاف‌پذیر در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل ۲: ساختار مکانیکی ربات با مفصل انعطاف‌پذیر

مدل ریاضی برای این سیستم به صورت زیر بیان می‌گردد [۲۲]:

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + M_0 g_0 \sin(q_1) + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (۴۳)$$

که q_1 و \dot{q}_1 به ترتیب، مکان، سرعت و شتاب زاویه‌ای لینک هستند. همچنین، مکان، سرعت و شتاب زاویه‌ای شفت به ترتیب با نمادهای q_2 ، \dot{q}_2 و \ddot{q}_2 بیان شده‌اند. I و J ممان‌های اینرسی، M_0 جرم، g_0 انعطاف‌پذیری مفصل، g_0 شتاب گرانش، l طول لینک و u گشتاور اعمال شده موتور (ورودی سیستم) را نشان می‌دهند. با تعریف $x_1 = q_1$ ، $x_2 = \dot{q}_1$ ، $x_3 = Kq_2/I$ ، $x_4 = K\dot{q}_2/I$ و فرض آنکه یک اغتشاش نامعلوم ولی محدود، ناشی از یک گشتاور خارجی بر روی سیستم اثر می‌گذارد، مدل ریاضی سیستم در فضای حالت به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{Mgl}{I} \sin x_1(t) - \frac{K}{I} x_1(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{K^2}{IJ} x_1(t) - \frac{K}{J} x_3(t) + \frac{K}{IJ} (u(t) + \bar{\delta}(t, x)) \\ y &= x_1(t) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

در رابطه فوق $y = x_1(t)$ خروجی سیستم و $\bar{\delta}(t, x)$ ترم نایقینی است که سازگار با ورودی فرض می‌شود. هدف، طراحی قانون کنترلی مقاوم جهت ایجاد نوسانات سینوسی با دامنه $A = 1$ و فرکانس $\omega_0 = 2$ در خروجی سیستم می‌باشد. از نکته ۱، هدف فوق با دستیابی به چرخه حدی مطلوب:

$$\bar{M} = \{x \in D \subset R^2 : 4x_1^2 + x_2^2 = 4\} \quad (۴۵)$$

در صفحه $x_1 - x_2$ میسر می‌شود. جهت محاسبه قانون کنترلی مقاوم از طریق رویکرد ارائه شده در این مقاله، سیستم فوق، به دو زیرسیستم با متغیرهای حالت به صورت $\eta = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ و $\xi = x_4$ تقسیم‌بندی می‌شود. لذا، زیرسیستم $\dot{\eta}$ از سیستم (۴۳) به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{Mgl}{I} \sin x_1(t) - \frac{K}{I} x_1(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \end{aligned} \quad (۴۶)$$

معادلات فوق دارای ساختار معادلات (۷) هستند به ازای توابع زیر:

$$\begin{aligned} f_2 &= -\frac{Mgl}{I} \sin x_1(t) - \frac{K}{I} x_1(t) \quad g_2 = 1 \\ f_3 &= 0 \quad g_3 = 1, \quad m = 3 \end{aligned} \quad (۴۷)$$

در $\xi = x_4$ را می‌توان به عنوان ورودی مجازی برای زیرسیستم η نظر گرفت. با توجه به مباحث فوق، ابتدا باید $x_4 = \phi(\eta)$ طراحی گردد. در رابطه (۳۲)، $\gamma(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$ می‌باشد. در نتیجه، توابع $\lambda(x)$ و $\tau(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{\partial(4x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_2} = 2x_2 \\ \tau(x) &= x_2 \frac{\partial(4x_1^2 + x_2^2)}{\partial x_1} / 2x_2 = 4x_1. \end{aligned} \quad (۴۸)$$

با توجه به رابطه (۲۳)، ورودی مجازی زیر چرخه حدی مطلوب را در زیرسیستم (x_1, x_2) ایجاد می‌کند:

$$\begin{aligned} x_3 &= \phi_3(x_1, x_2) \\ &= \frac{Mgl}{I} \sin x_1 + \frac{K}{I} x_1 - 2k_d(4x_1^2 + x_2^2 - 4)x_2 - 4x_1 \end{aligned} \quad (۴۹)$$

با تعریف متغیر جدید به صورت $z_3 = x_3 - \phi_3(x_1, x_2)$ و جایگذاری در $g_3 = 1$ و $f_3 = 0$ ، $z_{m-1} = z_2 = x_2$ ، $V_{m-1} = V_2 = (4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2$ رابطه (۲۲)، ورودی مجازی $\xi = x_4 = \phi(\eta)$ به منظور ایجاد چرخه حدی مطلوب در زیرسیستم کاهش مرتبه یافته (۴۶) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\phi(\eta) = \dot{\phi}_3(x_1, x_2) - (4x_1^2 + x_2^2 - 4)x_2 - c_3 z_3 \quad (۵۰)$$

همچنین بر اساس رابطه (۲۶) تابع لیاپانوف مربوطه برای آنالیز معادلات کاهش مرتبه یافته به صورت $V_3 = 0.5(4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 + 0.5z_3^2$ است.

بنابراین، سطح لغزش مناسب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

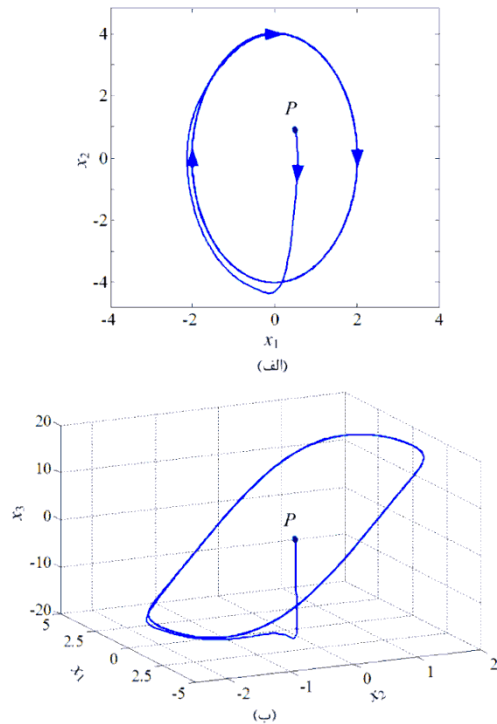
$$\begin{aligned} \sigma &= x_4 - \phi(\eta) \\ &= \dot{\phi}_3(x_1, x_2) - (4x_1^2 + x_2^2 - 4)x_2 - c_3 z_3 \end{aligned} \quad (۵۱)$$

حال هدف طراحی ورودی کنترلی u است به نحوی که دستیابی به سطح لغزش مذکور را در زمان محدود تضمین کند. در شبیه‌سازی، ترم عدم قطعیت به صورت $\bar{\delta}(t, x) = -\sin(5x_2)$ در نظر گرفته شده است. این عدم قطعیت شرط $|\bar{\delta}| \leq 1$ را برآورده می‌کند. با انتخاب $\beta(x) = 2$ ، قانون کنترلی مقاوم پیوسته به صورت زیر محاسبه می‌شود:

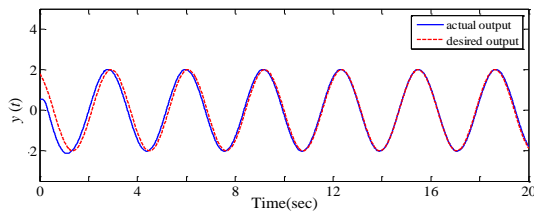
$$u = \frac{IJ}{K} \left(-\frac{K^2}{IJ} x_1(t) + \frac{K}{J} x_3(t) + \dot{\phi}(\eta) \right) - 2 \text{sat} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right) \quad (۵۲)$$

از آنجایی که بنا بر نکته ۲ قانون پیوسته فوق منجر به همگرایی مسیرهای فاز به محدوده $|\sigma| \leq \varepsilon$ (لایه مرزی) در زمان محدود

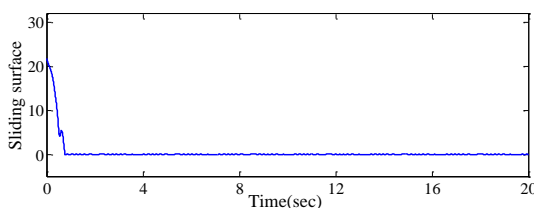
مفصل انعطاف پذیر) شبیه سازی شد. نتایج شبیه سازی دستیابی به چرخه حدی مطلوب و ایجاد نوسانات پایدار در خروجی را نشان دادند.



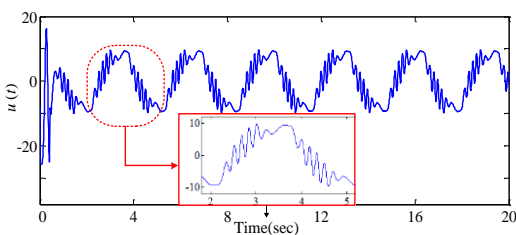
شکل ۳: همگرایی مقاوم سیستم حلقه بسته به چرخه حدی مطلوب؛ (الف) در صفحه x_1-x_2 ، (ب) در فضای $x_1-x_2-x_3$



شکل ۴: پاسخ زمانی خروجی حاصل شده و خروجی مطلوب



شکل ۵: پاسخ زمانی سطح لغزش



شکل ۶: پاسخ زمانی ورودی کنترلی

می گردد. لذا پس از قرار گرفتن در لایه مرزی، معادلات فاز لغزش بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2k_d(4x_1^2 + x_2^2 - 4)x_2 - 4x_1 + z_3 \\ \dot{z}_3 &= x_4 - \dot{\phi}_3 = \phi(\eta) - \dot{\phi}_3 + \sigma \end{aligned} \quad (53)$$

که $\phi(\eta)$ در رابطه (۵۰) طراحی شده است. در معادلات فوق همان طور که قبلاً هم ذکر شد به این دلیل σ ظاهر می شود که در ناحیه مرزی σ دقیقاً صفر نبوده بلکه مقدار محدود کوچکی ($|\sigma| < \varepsilon$) دارد. حال با مشتق گیری از تابع لیاپانوف

$$\begin{aligned} V_3 &= 0.5(4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 + 0.5z_3^2 \\ \dot{V}_3 &= -4k_d x_2^2 (4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 - c_3 z_3^2 + \sigma z_3 \\ &\leq -4k_d x_2^2 (4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 - c_3 z_3^2 + \varepsilon |z_3| \\ &= -4k_d x_2^2 (4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 - (1-\theta)c_3 z_3^2 - \theta c_3 z_3^2 + \varepsilon |z_3| \\ &\leq -4k_d x_2^2 (4x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 - (1-\theta)c_3 z_3^2, \quad \forall |z_3| \geq \frac{\varepsilon}{\theta c_3} \end{aligned} \quad (54)$$

بنابراین، کاهشی بودن تابع لیاپانوف در ناحیه $|z_3| \geq \frac{\varepsilon}{\theta c_3}$ به اثبات رسید. در ادامه، نتایج شبیه سازی به ازای $\mu = 2$ ، $\iota = 1$ ، $J = 0.5$ ، $k_d = 0.5$ و همچنین $\varepsilon = 1$ ، $K = 15$ ، $I = Ml^2 = 2$ ، $g_0 = 9.8$ ، $c_3 = 1$ و شرایط اولیه $x_0 = [0.5 \ 1 \ 0 \ -1]^T$ آمده است. شکل ۳ (الف) همگرایی مقاوم مسیر فاز سیستم به چرخه حدی مطلوب در صفحه دوعبدي x_1-x_2 و شکل ۳ (ب) همگرایی به چرخه حدی مذکور را در زیرسیستم سه بعدی η نشان می دهد (P نقطه شروع مسیر است). شکل ۴، پاسخ واقعی خروجی و پاسخ مطلوب آن را نشان می دهد. همان گونه که مشاهده می شود پس از گذشتن زمان گذرای اولیه، نوسانات مطلوب در خروجی ایجاد شدند و علی رغم جایگزینی تابع علامت با تابع اشباع، عملکرد قانون کنترلی از دقت قابل قبول برخوردار است. از طرفی، دستیابی به سطح لغزش در زمان محدود بیانگر تحقق قانون دستیابی است که با بررسی شکل ۵ این امر تأیید می گردد. پاسخ زمانی ورودی کنترلی نیز در شکل ۶ نمایش داده شده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله به چگونگی ایجاد نوسانات پایدار در سیستم های غیرخطی پیوسته-زمان دارای عدم قطعیت پرداخته شد. به منظور مقابله با ترم های عدم قطعیت که می توانند در اثر عواملی همچون ساده سازی حین مدل سازی، عدم قطعیت در پارامترها و اغتشاشات خارجی ایجاد شوند از کنترل کننده مد لغزشی استفاده گردید. ذکر این نکته ضروری است که رویکرد کلاسیک مد لغزشی منجر به پایداری مبدأ مختصات می شود، اما در این مقاله، طراحی سطح لغزش با رویکردی جدید و با هدف ایجاد چرخه حدی پایدار در معادلات کاهش مرتبه یافته صورت گرفت. مراحل طراحی سطح لغزش و ورودی کنترلی نیز به تفصیل شرح داده شد. ایده پیشنهادی بر روی یک سیستم از مرتبه چهار (ربات با

مراجع

- application in inertia pendulum”, *Modares Journal of electrical engineering*, vol. 12, no. 3, pp. 1-6, 2012.
- [12] H. K. Khalil, *Nonlinear systems, Edition 3*. Prentice hall Upper Saddle River, 2002.
- [13] A. Modirrousta and M. Khodabandeh, “Design of an Adaptive Integral Sliding Mode Control for Robust and Finite Time Stabilization for a Quadrotor”, *Tabriz Journal of Electrical Eng.*, vol. 46, no. 1, pp. 321-332, 2016.
- [14] D. Nojavanzadeh and M.A. Badamchizadeh, “Control of Two Degree of Freedom Overhead Crane System with Adaptive Sliding Mode Controller”, *Tabriz Journal of Electrical Eng.*, vol. 45, no. 4, pp. 203-209, 2015.
- [15] T. Orowska-Kowalska, M. Kamiński and K. Szabat, “Implementation of a sliding-mode controller with an integral function and fuzzy gain value for the electrical drive with an elastic joint,” *IEEE Transaction On Industrial Electronic*, vol. 57, no. 4, pp. 1309–1317, 2010.
- [16] K. Abidi, J.-X. Xu and Y. Xinghuo, “On the discrete-time integral sliding-mode control,” *Autom. Control IEEE Trans. On*, vol. 52, no. 4, pp. 709–715, 2007.
- [17] W. Gao, Y. Wang and A. Homaifa, “Discrete-time variable structure control systems,” *Ind. Electron. IEEE Trans. On*, vol. 42, no. 2, pp. 117–122, 1995.
- [18] M. Yan and Y. Shi, “Robust discrete-time sliding mode control for uncertain systems with time-varying state delay,” *Control Theory Appl. IET*, vol. 2, no. 8, pp. 662–674, 2008.
- [19] Y. Xia, G.-P. Liu, P. Shi, J. Chen, D. Rees and J. Liang, “Sliding mode control of uncertain linear discrete time systems with input delay,” *Control Theory Appl. IET*, vol. 1, no. 4, pp. 1169–1175, 2007.
- [20] T. Binazadeh and M.H. Shafiei, “Output tracking of uncertain fractional-order nonlinear systems via a novel fractional-order sliding mode approach,” *Mechatronics*, vol. 23, no. 7, pp. 888-892, 2013.
- [21] W. M. Haddad and C. VijaySekhar. *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton University Press, 2008.
- [22] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.
- [1] A. Teplinsky and O. Feely, “Limit Cycles in a MEMS Oscillator,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs*, vol. 55, no. 9, pp. 882–886, Sep. 2008.
- [2] S. Hashimoto, S. Naka, U. Sosorhang, and N. Honjo, “Generation of optimal voltage reference for limit cycle oscillation in digital control-based switching power supply,” *J. Energy Power Eng.*, vol. 6, no. 4, pp. 623–628, 2012.
- [3] C. Albea-Sanchez, *Control Design for Electronic Power Converters*, Citeseer, 2010.
- [4] D. G. Hobbelen, *Limit cycle walking*. TU Delft, Delft University of Technology, 2008.
- [5] Y. W. Lim, Y. H. Kim, J. U. An and D. H. Kim, “Path Planning Algorithm Based on the Limit-Cycle Navigation Method Applied to the Edge of Obstacles,” in *FIRA RoboWorld Congress*, pp. 226-233. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [6] S. Andary, A. Chemori and S. Krut, “Control of the underactuated inertia wheel inverted pendulum for stable limit cycle generation,” *Adv. Robot.*, vol. 23, no. 15, pp. 1999–2014, 2009.
- [7] Y. Yang, G. Feng and J. Ren, “A Combined Backstepping and Small-Gain Approach to Robust Adaptive Fuzzy Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part 1*, vol. 34, no. 3, pp. 406–420, May 2004.
- [8] T. Kai, “Limit-cycle-like control for planar space robot models with initial angular momenta,” *Acta Astronaut.*, vol. 74, pp. 20–28, May 2012.
- [9] J. Aracil, F. Gordillo and E. Ponce, “Stabilization of oscillations through backstepping in high-dimensional systems,” *IEEE Transacton On Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 705–710, 2005.
- [10] C. Aguilar-Ibáñez, J. C. Martinez, J. de J. Rubio and M. S. Suarez-Castanon, “Inducing sustained oscillations in feedback-linearizable single-input nonlinear systems,” *ISA Trans.*, vol. 54, pp. 117–124, Jan. 2015.
- [11] A.R. Hakimi and T. Binazadeh, “Stable limit cycles generating in a class of uncertain nonlinear systems: