

## قطعه‌بندی تصویر مبتنی بر برش نرمالیزه گراف از دیدگاه میزان اطلاعات جداکننده

معصومه محسنی<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری؛ مهدی ازوجی<sup>۲</sup>، استادیار؛ رضا قادری<sup>۳</sup>، دانشیار

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل - بابل - ایران - m.mohseni@stu.nit.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل - بابل - ایران - m.ezoji@nit.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی هسته‌ای - دانشگاه شهید بهشتی - تهران - ایران - r\_ghaderi@abu.ac.ir

**چکیده:** قطعه‌بندی تصویر، یک مسئله پایه در بینایی ماشین است. در روش مبتنی بر برش نرمالیزه گراف (Ncut)، حل این مسئله به انتخاب بردار ویژه متناظر با دومین کوچک‌ترین مقدار ویژه یک ماتریس خاص می‌انجامد. در این مقاله، ضمن بیان هم‌ارزی رابطه ریاضی حاکم بر مسئله بدون مربی Ncut با معیار Fisher-Rao در طبقه‌بندی با مربی، از نگاهی نو به مسئله انتخاب بردار ویژه پرداخته شده است. در این مقاله با پیشنهاد معیاری کارا از دیدگاه Fisher-Rao، گزینش و مرتب‌سازی بردارهای ویژه در مسئله هم‌ارز Ncut آن انجام شده است. نتایج آزمایش هم‌ارزی قطعه‌بندی تصویر بر پایه این دو معیار، ارائه قطعه‌بندی با اندازه Ncut کمتر و گوناگونی ارزش‌گذاری بردارهای ویژه را نشان می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** قطعه‌بندی تصویر، گروه‌بندی گراف، LDA، Ncut.

## Image Segmentation based on Normalized Cut from the Perspective of the Discriminant Information

Masoumeh Mohseni, PhD Student<sup>1</sup>; Mehdi Ezoji, Assistant Professor<sup>2</sup>; Reza Ghaderi, Associate Professor<sup>3</sup>

1- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran, Email: m.mohseni@stu.nit.ac.ir

2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran, Email: m.ezoji@nit.ac.ir

3- Faculty of Nuclear Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran, Email: r\_ghaderi@sbu.ac.ir

**Abstract:** Image segmentation is a fundamental problem in computer vision. Normalized Cut (Ncut) scheme uses second smallest eigenvector of a special matrix to solve this problem. In this paper, firstly, it is shown that optimization of Ncut (as an unsupervised method) is equivalent to optimization of Fisher-Rao criterion (as a supervised method) in classification. Then, the classification experience is used to gain a new perspective on the order and selection of eigenvectors in Ncut approach. Experimental results on image segmentation, demonstrate the truth about this alternative view of eigenvector selection which leads to less amount of Ncut for image segmentation.

**Keywords:** Image segmentation, Graph cut, LDA, Ncut.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۰۳/۰۷

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۰۴/۲۷، ۱۳۹۳/۰۶/۱۷ و ۱۳۹۳/۰۸/۲۵

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۱۱/۳۰

نام نویسنده مسئول: مهدی ازوجی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - بابل - خیابان دکتر شریعتی - دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر.

## ۱- مقدمه

تصویر به‌عنوان حوضه‌های آبریز (catchment basins) و مقادیر حداکثر بین دو حوضه آبریز به‌عنوان خط مرزی نشان داده می‌شود. دسته پنجم قطعه‌بندی مبتنی بر انرژی است. در این‌گونه روش‌ها، با تعریف تابع انرژی مناسب به جستجوی قطعه‌بندی مطلوبی پرداخته می‌شود که این تابع انرژی را کمینه کند. روش‌های Live wire [۹]، کانتور فعال [۱۰]، مجموعه‌های سطح [۱۱-۱۲] و برش گراف [۱۴-۱۳] در این دسته گروه‌بندی می‌شوند.

در میان رویکردهای گوناگون قطعه‌بندی تصویر، روش‌های مبتنی بر تئوری گراف، از کارایی خوبی برخوردار است [۱]. در این رویکرد مسئله قطعه‌بندی تصویر، به مسئله قسمت کردن گراف به چند زیرگراف جدا از هم تبدیل می‌شود به‌گونه‌ای که هر کدام از این زیرگراف‌ها نماینده یک بخش معنی‌دار در تصویر است. بدین ترتیب در این رویکرد بیان ریاضی مسئله روشن‌تر و تلاش برای حل آن هدفمندتر و نتیجه قطعه‌بندی کارآمدتر است.

روش‌های قطعه‌بندی تصویر مبتنی بر تئوری گراف، به پنج دسته تقسیم می‌شوند:

- روش مبتنی بر درخت پوشای کمینه [۱۵]
- برش گراف و تابع هزینه [۱۶]
- برش گراف روی مدل میدان تصادفی مارکوف [۱۷]
- روش‌های مبتنی بر کوتاه‌ترین مسیر [۱۸]
- روش‌های دیگری مانند [۱۹] که در دسته‌بندی‌های ذکرشده تاکنون نمی‌گنجد.

در قطعه‌بندی تصویر به روش برش گراف [۱۶]، ابتدا گراف متناظر با تصویر که حاوی اطلاعات مکانی و شدت پیکسل‌ها است تشکیل می‌شود. آنگاه مسئله قطعه‌بندی به پیدا کردن برش کمینه در گراف منجر می‌شود.

روش موسوم به Ncut که در [۲۰] ارائه شده، به‌عنوان یک کار پایه، الهام‌بخش بسیاری از روش‌های دیگر در این زمینه بوده است. کوشش‌های انجام‌شده مبتنی بر برش گراف، یا درصد بازنمایی مناسب اطلاعات تصویر در ساختار گرافی هستند [۲۱] یا در راستای ارائه معیاری مناسب‌تر برای ایجاد برش بهینه قرار دارند [۲۲] و یا در صدد هستند تا این روش را در کاربردهای گوناگون بکار گیرند [۲۳-۲۴]. در این مقاله، مبتنی بر روش پایه Ncut [۲۰]، از دیدگاهی دیگر به برش گراف مناسب جهت قطعه‌بندی تصویر پرداخته شده است.

مقاله حاضر چنین سازمان‌دهی شده است: ابتدا در بخش دو، مسئله قطعه‌بندی مبتنی بر Ncut مطرح شده است. در بخش سه، به هم‌ارزی معادله توصیف‌کننده مسئله بدون مربی برش گراف و مسئله با مربی Fisher-Rao پرداخته شده است. در ادامه برای انتخاب مرز و آستانه‌ای برای تصمیم‌گیری راه مناسب‌تری نسبت به [۲۰] ارائه شده است. در پایان طی آزمایش‌های گوناگون، به بررسی و مقایسه الگوریتم پیشنهادی و مرجع پایه [۲۰] پرداخته شده است.

قطعه‌بندی تصویر، یکی از مسئله‌های پایه‌ای و بنیادی در بینایی ماشین است. در مسئله قطعه‌بندی، یک تصویر به چند زیرمجموعه بدون هم‌پوشانی به‌گونه‌ای افزای می‌شود که هر زیرمجموعه با بخش معنی‌داری از تصویر متناظر با سطوح هم‌جنس، ناهمگونی، جسم متحرک و ... در صحنه در ارتباط باشد. از این رو قطعه‌بندی تصویر می‌تواند کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌هایی مانند تفکیک بافت‌های گوناگون در تصویرهای پزشکی، تشخیص شیء و ردیابی جسم متحرک و تحلیل صحنه داشته باشد.

این‌که تا چه اندازه الگوریتم قطعه‌بندی توانسته است قسمت‌های همسان (شاید در صحنه واقعی هم‌جنس و ...) تصویر را در یک بخش قرار دهد، می‌تواند کارایی کل سیستم بینایی را تحت تأثیر قرار دهد. از این‌رو تلاش‌های زیادی در راستای ارائه راهکاری برای حل این مسئله انجام شده است [۱].

رویکردهای گوناگون قطعه‌بندی را می‌توان به پنج دسته، گروه‌بندی کرد. دسته اول قطعه‌بندی مبتنی بر آستانه است که معمولاً تصویر را به دو بخش یعنی پیش‌زمینه و پس‌زمینه تقسیم می‌کند [۲]. هنگامی که شدت پیکسل‌ها بزرگ‌تر / کوچک‌تر از یک آستانه از پیش تعریف‌شده باشد، آن پیکسل‌ها به‌عنوان پیش‌زمینه و در غیر این‌صورت به‌عنوان پس‌زمینه طبقه‌بندی می‌شوند. روش مبتنی بر آستانه ساده‌ترین و سریع‌ترین روش در میان تمام روش‌های قطعه‌بندی موجود است. مشکل این روش پیدا کردن آستانه‌ای است که توسط آن بتوان تصویر را به دو بخش تقسیم نمود.

در دسته دوم قطعه‌بندی که مبتنی بر لبه است فرض می‌شود که مقادیر پیکسل‌های متصل‌کننده پیش‌زمینه و پس‌زمینه مجزا هستند [۳-۴]. این ناپوستگی معمولاً با روش مشتقات مرتبه اول و دوم مانند گرادیان و لاپلاسین که نسبت به نویز حساس هستند، تشخیص داده می‌شوند [۲، ۴-۶].

دسته سوم قطعه‌بندی مبتنی بر ناحیه است [۳-۵]. الگوریتم‌های رشد و تقسیم و ادغام ناحیه از این دست هستند [۲]. برای روش رشد ناحیه، لازم است مجموعه‌ای از دانه‌ها (seeds) در ابتدا شناخته شده باشند. پس از آن، پیکسل‌های همسایه این دانه‌ها از طریق معیارهای از پیش تعریف‌شده مانند تشابه شدت، رنگ و بافت گروه‌بندی می‌شوند. در روش تقسیم و ادغام ناحیه‌ای، ابتدا تصویر به یک سری نواحی کوچک‌تر تقسیم می‌شود، سپس این نواحی کوچک‌تر با شرایط از پیش تعیین‌شده با هم ادغام یا تقسیم می‌شوند یا به‌عبارت دیگر تصویر به بسیاری از نواحی غیر هم‌پوشان تقسیم می‌شود تا زمانی که دیگر نتوان آن را تقسیم نمود. پس از آن، مناطق مجاور تا وقتی که یک شرط از پیش تعریف‌شده را برآورده سازند، با هم ادغام می‌شوند.

دسته چهارم روش‌های مبتنی بر watershed است [۴-۷، ۸]. این روش تصویر را به‌صورت یک سطح توپولوژیکی و مقدار شدت روشنایی را به‌عنوان ارتفاع نمایش می‌دهد. مقادیر حداقل ناحیه‌ای در

## ۲- Ncut و قطعه‌بندی تصویر

در قطعه‌بندی تصویر I به روش برش گراف، ابتدا اطلاعات تصویر طی یک گراف وزن‌دار بدون جهت  $G = (V, E)$  بازنمایی می‌شود که V مجموعه رأس‌ها به تعداد  $N = |V|$  رأس و E نیز مجموعه یال‌ها است. برش یک گراف  $G = (V, E)$  و پیرو آن قطعه‌بندی تصویر متناظرش به افزای رأس‌های آن به دو مجموعه ناهم‌پوشان A و  $B = V - A$  می‌انجامد.

وزن  $W(u, v)$  یالی که بین دو گره  $u$  و  $v$  قرار دارد به گونه‌ای تعیین می‌شود که بیان‌گر میزان تشابه این دو گره یا میزان هم‌قطعه بودن پیکسل‌های متناظرشان باشد. بر این اساس، طبق رابطه (۱)، مجموع وزن‌های یال‌های متصل بین دو قسمت A و B می‌تواند معیاری برای ارزیابی تشابه میان این دو قسمت باشد. روشن است که هرچه این تشابه کمتر باشد، قطعه‌بندی مناسب‌تر خواهد بود.

$$cut(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} w(u, v) \quad (1)$$

الگوریتم‌های زیادی برای حل این مسئله بهینه‌سازی ارائه شده است [۲۷-۲۵]. از آنجاکه این الگوریتم تمایل دارد مجموعه کوچکی از گره‌های مجزا در گراف را جدا نماید، برای جلوگیری از این بایاس غیر طبیعی در برش مجموعه کوچکی از گره‌ها [۲۰، ۲۵] یک معیار جدید موسوم به Ncut، برای اندازه‌گیری تشابه میان دو زیرگراف ارائه دادند که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$Ncut(A, B) = \frac{cut(A, B)}{assoc(A, V)} + \frac{cut(A, B)}{assoc(B, V)} \quad (2)$$

که  $asso(A, V) = \sum_{u \in A, t \in V} w(u, t)$  مجموع وزن همه یال‌ها از گره‌های A به تمام گره‌ها در گراف است و  $asso(B, V)$  به طریق مشابه تعریف می‌گردد.

روشن است که قطعه‌بندی مناسب باید به مینیمم شدن Ncut بیانجامد.

در [۲۰] نشان داده شده است که دو قسمت کردن بهینه گراف  $G = (V, E)$  به مسئله بردار ویژه زیر تبدیل می‌شود:

$$D^{-\frac{1}{2}}(D - W)D^{-\frac{1}{2}}z = \lambda z \quad (3)$$

که D یک ماتریس قطری  $N \times N$  با المان‌های قطری  $d(i) = \sum_j w(i, j)$  است و W یک ماتریس متقارن با المان‌های  $(i, j)$   $w_{ij}$  به عنوان مقدار ویژه و Z به عنوان بردار ویژه است.

مرجع [۲۰] نشان داده است که بردار ویژه Z متناظر با دومین کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس  $C = D^{-\frac{1}{2}}(D - W)D^{-\frac{1}{2}}$ ، که با روش تقریب Lanczos به دست می‌آید، حل با مقدار حقیقی است که به کمک بردار دوسطحی شده  $y = D^{-\frac{1}{2}}z$  گراف را به دو قسمت بهینه تبدیل می‌کند. از روش سلسله مراتبی هم برای یافتن نقطه جداسازی می‌توان بهره گرفت زیرا درایه‌های بردار ویژه مقدار پیوسته‌ای را به خود می‌گیرد.

این الگوریتم می‌تواند بر روی هر زیر گراف تکرار شود تا زمانی که مقدار Ncut به یک حد آستانه خاصی برسد.

تعیین مقدار آستانه مناسب برای دوسطحی کردن بردار y، مسئله مهمی است که در روش برش گراف نرمالیزه بدان برخورد می‌شود. در این مقاله، آستانه مناسبی برای دوسطحی کردن بردار y پیشنهاد می‌شود.

## ۳- انتخاب مؤلفه اساسی در LDA دو مرحله‌ای

آنالیز جداساز خطی (LDA) یک ابزار مهم و شناخته‌شده در بازشناسی آماری الگو است که معمولاً طبق معیار Fisher-Rao چنین تعریف می‌شود:

$$Z^* = \arg \min_z \frac{Z^T S_W Z}{Z^T S_B Z} \quad (4)$$

که بردارهای ویژگی جداکننده و  $S_W$  و  $S_B$  هم به ترتیب ماتریس‌های پراکندگی درون کلاسی و برون کلاسی هستند. Z ی مناسب‌تر است که به  $J(Z)$  کمتر منجر شود.

معیار Fisher-Rao به حل مسئله بردار ویژه زیر برای یافتن Z متناظر با کمینه  $J(Z)$  منجر می‌شود:

$$(S_W)^{-1} S_B Z = \lambda Z \quad (5)$$

که  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  ماتریس قطری از مقدار ویژه‌ها است و در آن:  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$

در اینجا یافتن بردار ویژه‌ای که دارای اطلاعات زیاد جداسازی و همچنین تحت تأثیر کمتری نسبت به نویز است، اهمیت می‌یابد.

در [۲۸] با الهام از PCA با چشم‌پوشی از برخی بردارهای ویژه  $S_W$  رابطه (۵) چنین بازنویسی شده است:

$$(S_W^{-1} S_B)_s Z = \lambda Z \quad (6)$$

که S زیرمجموعه‌ای از s (که  $s \leq p$ ) است. طی تحلیلی که در مقاله [۲۸] انجام شده، میزان اهمیت بردار ویژه  $z_j$  از ماتریس درون کلاسی  $S_W$  را می‌توان با رابطه زیر ارزیابی کرد:

$$F_j = \sum_{i=1}^q (u_j^T w_i)^2, \quad (1 \leq j \leq p) \quad (7)$$

که در رابطه (۷)،  $w_i$  بردار ویژه ماتریس  $S_B$  است. در ادامه نشان خواهیم داد که رابطه (۷) به عنوان معیاری برای سنجش اهمیت بردار ویژه در برخی مسئله‌های هم‌ارز با LDA توانایی ایجاد تمایز بین این بردارها را ندارد.

## ۴- روش پیشنهادی

روش پیشنهادی در این مقاله بر پایه تحلیل و نگاه مستقل مقاله‌های [۲۸] و [۲۰] است. [۲۰] مسئله قطعه‌بندی را به یافتن بردار ویژه متناظر با دومین کوچک‌ترین مقدار ویژه از ماتریس C نسبت می‌دهد و

از یکی از درایه‌های  $y = D^{-\frac{1}{2}}z$  به‌عنوان آستانه‌ای برای دوسطحی کردن  $y$  استفاده شده است. نتایج حاصل از آزمایش نشان داده است که این مقدار آستانه جدید به اندازه  $Ncut$  کمتری منجر می‌شود.

بر اساس حقیقت‌ها و یا نکته‌های بیان‌شده، الگوریتم پیشنهادی را می‌توان چنین کوتاه معرفی کرد:

گام یک- به‌ازای تصویر ورودی داده‌شده، از روی گراف متناظر آن، ماتریس‌های  $W$  و  $D$  و در نتیجه  $C$  تعیین می‌شود.

گام دو- با مرتب کردن بردارهای ویژه ماتریس  $C$  مبتنی بر معیار  $MFJ$ ، مناسب‌ترین آن یعنی  $Z^*$  را برگزیده می‌شود.

گام سه- از روی بردار ویژه برگزیده، (مطابق نکته سوم) آستانه مناسبی برای دوسطحی کردن  $y = D^{-\frac{1}{2}}z^*$  یافته می‌شود.

گام چهار- از روی بردار دوسطحی شده  $y$  مطابق تحلیل [۲۰]، به قطعه‌بندی تصویر ورودی پرداخته می‌شود.

### ۵- ارزیابی الگوریتم پیشنهادی

برای ارزیابی و مقایسه کارایی الگوریتم پیشنهادی قطعه‌بندی نسبت به [۲۰]، چهار آزمایش متفاوت انجام شده است. برای مقایسه کارایی الگوریتم پیشنهادی با روش  $Ncut$  از گد پیاده‌سازی شده و موجود در [۲۹] استفاده شده است.

در همه آزمایش‌های انجام‌شده از سه تصویر موجود در کتابخانه MATLAB با نام‌های `snowflakes`، `rice` و `bag` استفاده شده است. برای راحتی در اعمال الگوریتم و مقایسه نتایج، از هر کدام از این تصاویر بخشی با اندازه ۳۲ در ۳۲ طبق الگوی زیر استخراج شده است:

$$[xmin \ ymin \ width \ height] = [70 \ 70 \ 32 \ 32]$$

**آزمایش ۱:** نتایج حاصل از اعمال الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم ارائه‌شده در [۲۰]، بر روی تصاویر مذکور، در جدول ۱ نشان داده شده است. جدول ۱ نشان می‌دهد که با اعمال دو الگوریتم پیشنهادی و ارائه‌شده در [۲۰] بر روی تصاویر، مقدار  $Ncut$  به‌دست‌آمده برای هر تصویر برای دو الگوریتم یکسان است. این بدان معناست که روش پیشنهادی در این مقاله که از نگاهی متفاوت به حل مسئله  $Ncut$  می‌پردازد، منجر به پاسخی مشابه الگوریتم [۲۰] می‌شود.

در واقع الگوریتم پیشنهادی، بیان راه حل دیگری جدای از راه حل [۲۰] است که نتایج یکسانی با این الگوریتم دارد و بیان‌گر هم‌ارزی دو روش حل است در نتیجه قطعه‌بندی تصویر یکسانی را ارائه می‌دهد.

جدول ۱: مقدار  $Ncut$  به‌دست‌آمده از اعمال الگوریتم پیشنهادی و [۲۰] بر

روی سه تصویر گوناگون

الگوریتم	rice	snow flakes	Bag
[۲۰]	۰/۰۵۲۵	۰/۰۵۳۳	۰/۰۵۴۵
الگوریتم پیشنهادی	۰/۰۵۲۵	۰/۰۵۳۳	۰/۰۵۴۵

[۲۰] یافتن بردارهای متناظر با کوچک‌ترین مقادیر ویژه را حساس به عواملی مانند تغییرات ناخواسته می‌داند. ایده اصلی روش پیشنهادی این است که به حل مسئله بردار ویژه متناظر با قطعه‌بندی مبتنی بر  $Ncut$  [۲۰]، از نگاه معادله هم‌ارز آن در جداسازی مبتنی بر معیار Fisher-Rao در [۲۸] می‌پردازد. سپس معیار مناسبی برای ارزش‌گذاری و گزینش بردارهای ویژه متناظر از ماتریس  $C$  (معرفی‌شده در بخش ۲) معرفی خواهد شد. در پایان هم برای دوسطحی کردن مبتنی بر با ارزش‌ترین بردار ویژه روشی ارائه می‌شود که در مقایسه با [۲۰] به اندازه  $Ncut$  کمتر منجر می‌شود. پایه‌های کار پیشنهادی در این مقاله چنین بنا شده است:

**نکته نخست:** روشن است که به‌کمک Rayleigh quotient طبق

[۲۰] با جایگزینی  $S_B = I$  و  $S_W = D^{-\frac{1}{2}}(D - W)D^{-\frac{1}{2}}$  مسئله طبقه‌بندی مبتنی بر معیار مری Fisher-Rao [۲۸] به مسئله قطعه‌بندی مبتنی بر روش بدون مری  $Ncut$  [۲۰] تبدیل می‌شود.

**نکته دوم:** از آنجا که با جایگزینی  $S_B = I$  تمامی بردارهای ویژه ماتریس  $S_B = I$  همان بردارهای یکه خواهند بود، بنابراین از دید معیار  $F_j$  همه بردارهای ویژه همسان خواهند بود.

اثبات: اگر ستون  $i$  ام ماتریس همسانی را  $I_i$  بنامیم، با توجه به اورتونورمال بودن  $u_j$  ها داریم:

$$F_j = \sum_{i=1}^q (u_j^T w_i)^2 = \sum_{i=1}^q (u_j^T I_i)^2 = \sum_{i=1}^q (u_j^T)^2 = 1$$

یعنی از نظر معیار [۲۸] همه بردارهای ویژه همسان خواهند بود. اما روشن است که از دید دو تحلیل و نگاه مستقل [۲۰] و [۲۸] بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه کوچک‌تر برای قطعه‌بندی مناسب‌تر هستند و از سویی دیگر به عوامل ناخواسته مانند نویز هم حساس‌ترند [۲۸].

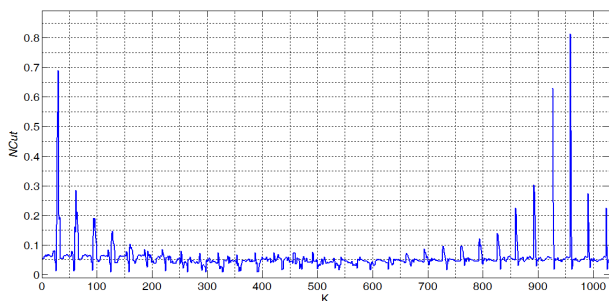
بر این اساس، ما مبتنی بر همان تحلیل ارائه‌شده در [۲۸]، با فرض  $S_B = I$  برای اندازه‌گیری اهمیت بردارهای ویژه  $S_W$  در یک فضای داده رابطه زیر را ارائه می‌دهیم:

$$MF_j = \sum_{i=1}^q |u_j^T|, \quad (1 \leq j \leq p) \quad (۸)$$

روشن است که معیار پیشنهادی همه شرایط تحلیل [۲۸] را پوشش می‌دهد.

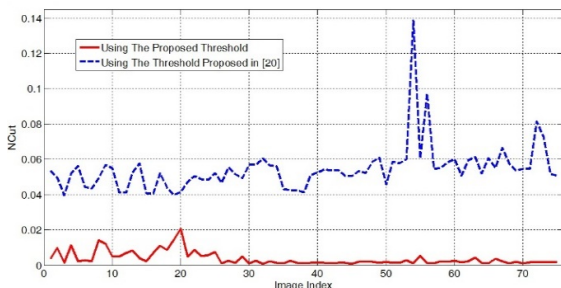
به بیان دیگر، در مقاله حاضر برای قطعه‌بندی تصویر، پس از ارائه ساختار گرافی آن، بردار ویژه‌ای از معادله هم‌ارز طبقه‌بندی مبتنی بر Fisher-Rao چنان انتخاب می‌شود که معیار  $MF_j$  را ماکزیمم کند. آزمایش‌ها نشان می‌دهد که نگاه مبتنی بر معیار پیشنهادی  $MF_j$  و نیز نگاه مبتنی بر [۲۰]، در گزینش بهترین بردار ویژه ماتریس  $C$  همسان‌اند ولی ارزش‌گذاری‌های گوناگونی را به دیگر بردارهای ویژه ماتریس  $C$  می‌دهند.

**نکته سوم:** در [۲۰] برای دوسطحی کردن بردار  $y = D^{-\frac{1}{2}}z$  میانگین درایه‌های آن به‌عنوان آستانه استفاده شده است. در این مقاله



شکل ۱: اندازه Ncut حاصل از قطعه‌بندی تصویر rice متناظر با انتخاب مؤلفه  $\lambda$  از  $\gamma$  به‌عنوان آستانه

همان‌گونه که دیده می‌شود، میانگین و نیز تغییرات مقدار Ncut حاصل از [۲۰] در همه ۷۵ تصویر استفاده‌شده بسیار بالاتر از میانگین و تغییرات مقدار Ncut به‌دست‌آمده از آستانه‌گذاری پیشنهادی است.



شکل ۲: مقایسه اندازه Ncut حاصل از قطعه‌بندی ۷۵ تصویر گوناگون با اندازه ۳۲ در ۳۲ به‌کمک آستانه‌گذاری پیشنهادی و روش [۲۰]

**آزمایش V:** در این آزمایش، به مقایسه دیداری نتیجه قطعه‌بندی تصویری با اندازه ۱۲۵ در ۱۲۶ (شکل ۴-الف) مبتنی بر Ncut، بر اساس آستانه میانگین استفاده‌شده در [۲۰] و آستانه پیشنهادی پرداخته شد. اگرچه قطعه‌بندی چنین تصویری برای روش‌های کلاسیک ساده است، حاصل قطعه‌بندی مبتنی بر Ncut با آستانه گذاری پیشنهادی این مقاله (به ازای  $\delta_1 = \delta_x = 5$ ) در شکل ۴ نشان داده شده است.

همان‌گونه که دیده می‌شود آستانه‌گذاری پیشنهادی توانسته است تا به بهبود قطعه‌بندی مبتنی بر Ncut بپردازد.

**آزمایش VI:** در این آزمایش به مقایسه ارزش بردارهای ویژه، برای قطعه‌بندی تصویر مبتنی بر معیار پیشنهادی در [۲۰] و معیار پیشنهادی در این مقاله پرداخته می‌شود.

از نگاه Ncut ارزش بردار ویژه برای قطعه‌بندی با اندازه مقدار ویژه متناظر با آن تعیین می‌شود و در این ترتیب از بردارهای ویژه، معیار  $F_1$  طبق نکته دوم، نمی‌تواند به تمایزی میان این بردارها منجر شود. مطابق نمودار شکل ۵، در این آزمایش، بردارهای ویژه، برحسب اندازه مقدارهای ویژه متناظرشان (از کوچک به بزرگ) شماره‌گذاری شده است. در شکل ۵، به ازای هر بردار ویژه، مقدار معیار  $MF_1$  نشان داده شده است.

**آزمایش II:** در این آزمایش، الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم ارائه‌شده در [۲۰] بر روی تصاویر snowflakes، rice و bag اعمال شده است و نتایج حاصل از قطعه‌بندی این تصاویر در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱، دیده می‌شود که به‌دلیل روش آستانه‌گذاری یکسان برای دوسطحی کردن  $y = D^{-\frac{1}{2}}Z^*$  که به مقدار Ncut یکسان منجر می‌شود، دو الگوریتم قطعه‌بندی یکسانی را ارائه می‌دهند.

**آزمایش III:** برای گروه‌بندی پیکسل‌های تصویر به دو قسمت، به یک آستانه نیاز است بدین منظور [۲۰] از میانگین درایه‌های بردار ویژه‌ای که ضابطه Ncut را کمینه می‌کند ( $\tau$  در معادله ۳) استفاده می‌کند. بدین‌صورت که اگر مقادیر درایه‌های این بردار ویژه از این مقدار میانگین، بزرگ‌تر باشند، پیکسل‌های متناظر تصویر در یک گروه و در غیر این‌صورت در گروه دیگر گروه‌بندی می‌شوند.

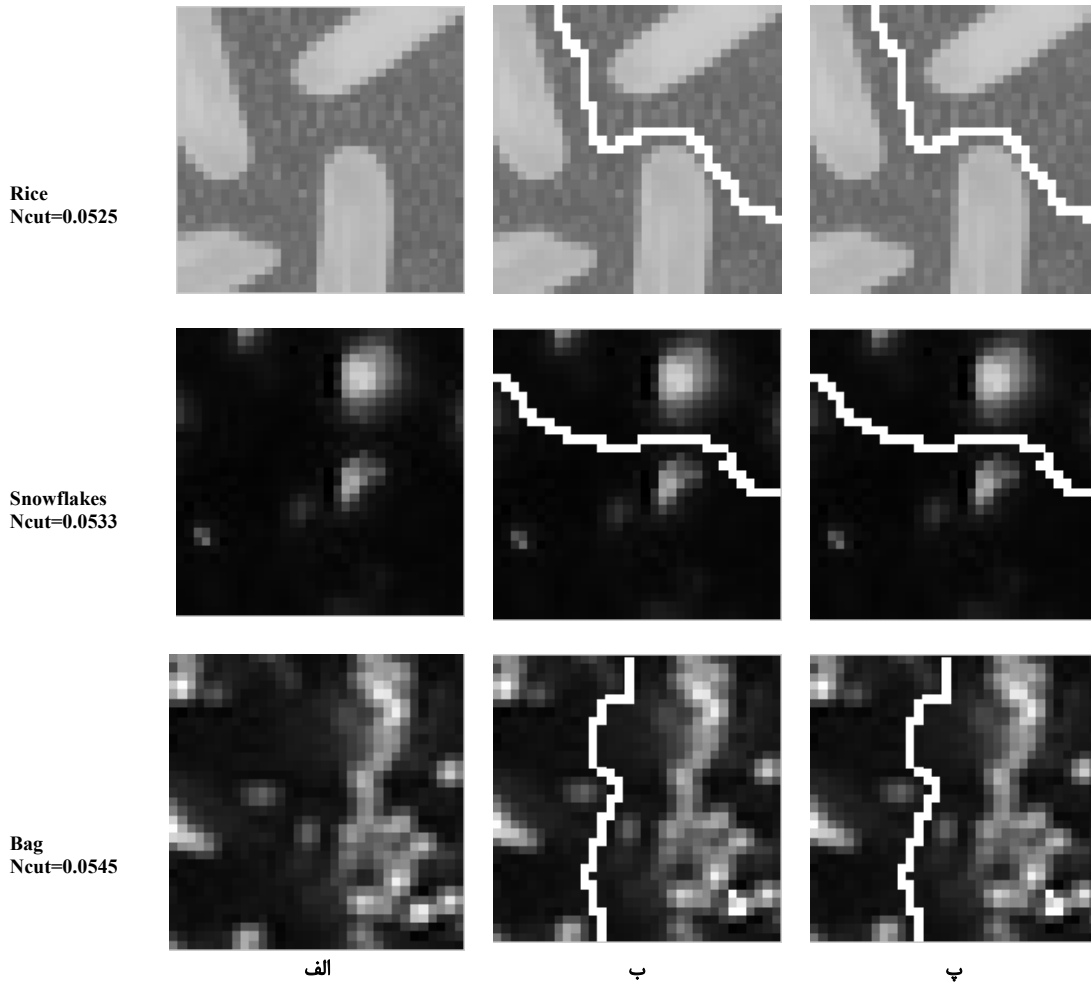
در این مقاله، به‌جای استفاده از میانگین مقادیر بردار ویژه مذکور به‌عنوان مقدار آستانه، تک‌تک درایه‌های  $\gamma$  را بررسی می‌شود، در پایان آزمایش درایه‌ای از بردار ویژه یافت می‌شود که اگر به‌عنوان آستانه از آن استفاده شود، مقدار Ncut کمتری نسبت به استفاده از میانگین درایه‌های بردار ویژه به‌دست می‌آید. نتایج این آزمایش در جدول ۲ نشان داده شده است.

برای بررسی آستانه پیشنهادی برای دوسطحی کردن  $\gamma = D^{-\frac{1}{2}}Z^*$  اندازه Ncut حاصل از قطعه‌بندی تصویر نمونه متناظر با انتخاب مؤلفه  $\lambda$  از  $\gamma$  به‌عنوان آستانه‌ای برای دوسطحی کردن آن را برای تصویر rice در شکل ۲، نشان داده شده است.

**آزمایش IV:** در این آزمایش، ۷۵ تصویر گوناگون با اندازه ۳۳ در ۳۳ استفاده شده‌اند. همان‌گونه که انتظار می‌رود با آستانه‌گذاری ارائه‌شده در [۲۰]، طبق تحلیلی ارائه‌شده دو نگاه مستقل [۲۰] و مقاله حاضر به مقدار Ncut یکسانی منجر می‌شود. مقدار Ncut به‌دست‌آمده از [۲۰] و نیز حاصل از به‌کارگیری آستانه معرفی‌شده در مقاله حاضر، در شکل ۳ نشان داده شده است.

جدول ۲: مقدار Ncut به‌دست‌آمده از اعمال الگوریتم پیشنهادی و [۲۰] بر روی تصاویر با مقدار آستانه جدید

		تصاویر		
		Rice	Snow flakes	Bag
روش		۳۵۸	۶۷۹	۲۰
Ncut برای دو الگوریتم مبتنی بر	روش پیشنهادی	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۲۰	۹/۲۶۲۸۰-۰۰۴
	آستانه ارائه‌شده در [۲۰]	۰/۰۵۲۵	۰/۰۵۳۳	۰/۰۵۴۵



شکل ۳: مقایسه قطعه‌بندی تصاویر با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و [۲۰]؛ الف - تصویر ورودی، ب - قطعه‌بندی حاصل از اعمال [۲۰] بر روی تصاویر، پ - قطعه‌بندی حاصل از اعمال الگوریتم پیشنهادی بر روی تصاویر

به بیان دیگر، مقدار معیار MFz که به گونه‌ای نشان‌دهنده توانایی هر بردار ویژه برای تمایزدهی بین قطعه‌بندی‌ها است، بر حسب ارزش آن‌ها از نگاه Ncut نشان داده شده است. شکل ۶، بزرگ‌نمایی شده شکل ۵ است. همان‌گونه که در شکل ۶ دیده می‌شود، رفتار این نمودار تا پنج نخستین بردار ویژه، روندی یکنوا نزولی دارد. پس از آن بردارهای مهم‌تر از دید Ncut لزوماً بردارهایی مهم‌تر از دید تمایزدهی میان دو قطعه نخواهند بود. گویا معیار Ncut باید برای پوشش‌دهی به این موضوع مهم، مورد بازبینی، ویرایش و بهبود قرار گیرد.

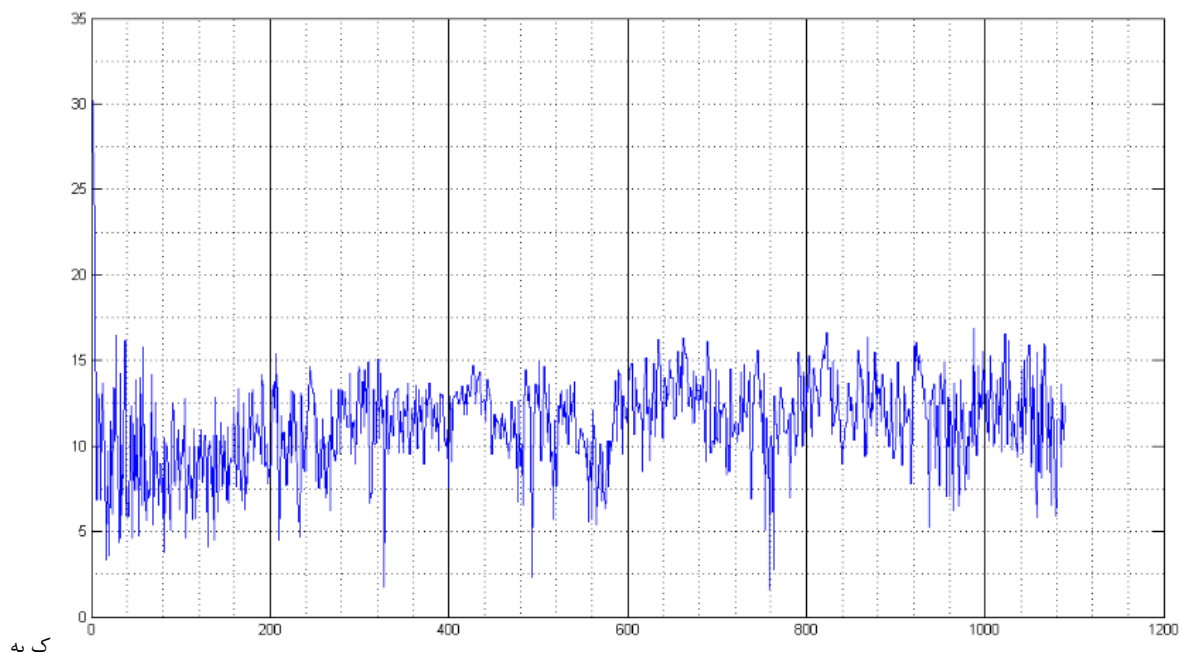
#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به هم‌ارزی رابطه توصیف‌کننده مسئله قطعه‌بندی ارائه‌شده در [۲۰] که برای قطعه‌بندی از بردار ویژه متناظر با دومین کوچک‌ترین مقدار ویژه استفاده می‌کند، با معیار Fisher-Rao در LDA، به معرفی چینی‌سازی تازه از بردارهای ویژه در قطعه‌بندی



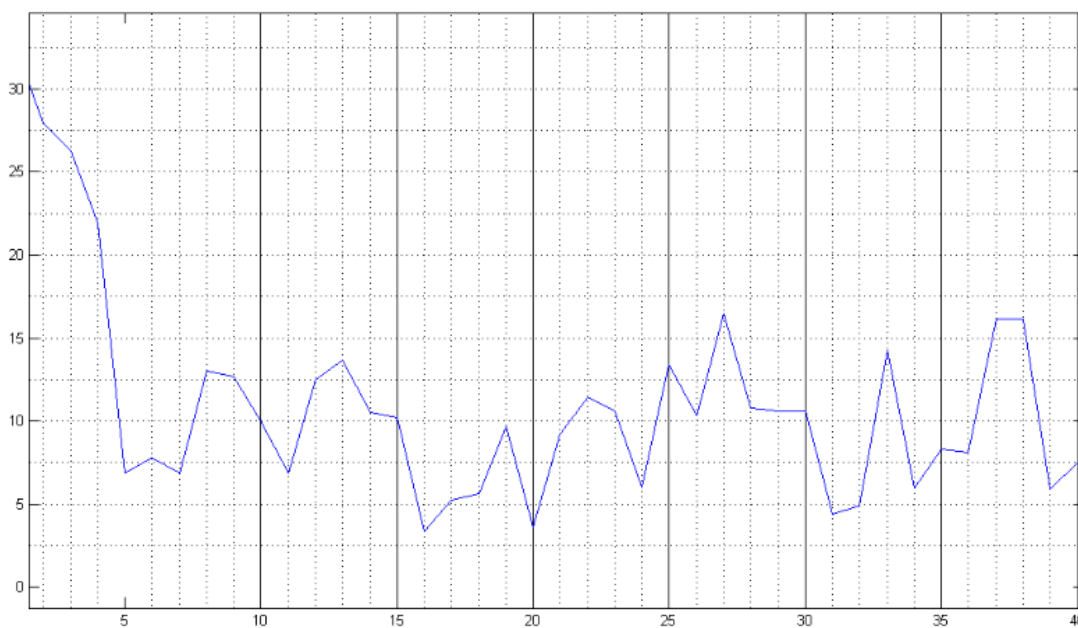
شکل ۴: الف - تصویر ورودی، ب - حاصل قطعه‌بندی مبتنی بر Ncut با آستانه پیشنهادی این مقاله، پ - حاصل قطعه‌بندی مبتنی Ncut با آستانه پیشنهادی در [۲۰]

پرداخته شد که توانایی ایجاد تمایز بین قطعه‌ها را هم در نظر می‌گیرد. در ادامه به ارائه استراتژی آستانه‌گذاری مناسب بر درایه‌های بردار ویژه انتخابی پرداخته شد که به اندازه Ncut کمتری منجر شد. بازبینی، ویرایش و بهبود معیار Ncut برای پوشش‌دهی به ملاحظات تمایزهای قطعه‌بندی که در این مقاله بررسی شده، به‌عنوان کار آینده می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.



ک به

شکل ۵: نمودار حاصل از اعمال الگوریتم پیشنهادی بر روی تصویر رایس با اندازه ۳۲ در ۳۲ و تابع هزینه‌ای با  $10^{-24}$  بردار ویژه؛ محور افقی: بردار ویژه شماره‌گذاری شده بر حسب اندازه مقدار ویژه متناظر آن (از کوچک بزرگ)، محور عمودی: معیار  $MF_i$  به ازای هر بردار ویژه



شکل ۶: چهل بردار ویژه مرتب‌شده از شکل ۵ در نمای نزدیک

## مراجع

- [15] J.B. Kruskal. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 7, no. 1, pp. 48-50, 1956.
- [16] Z. Wu, and R. Leahy, "Tissue classification in MR images using hierarchical segmentation," *Proc. IEEE Int. Conf: Medical Imaging*, vol. 12, no. 1, pp. 81-85, 1990.
- [17] D. German, and B. Gidas, *Image Analysis and Computer Vision*, National Academy Press, Chapter 2, pp.9-36, 1991.
- [18] E.W. Dijkstra, "Some theorems on spanning subtrees of a graph," *Indag Math.*, vol. 22, no. 2, pp. 196-199, 1960.
- [19] L. Grady. "Multilabel random walker segmentation using prior models," *IEEE Conference of Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 1, pp. 763-770, 2005.
- [20] J. Shi, and J. Malik, "Normalized cut and image segmentation," *IEEE Transaction On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 8, 2000.
- [21] S.D. Inderjit, Y. Guan, and B. Kulis, "Weighted graph cuts without eigenvectors: a multilevel approach," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 29, no. 11, 2007.
- [22] S. Wang, and J.M. Siskind; "Image segmentation with ratio cut," *IEEE Transaction On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25; no. 6, 2003.
- [23] E.R. Pujadas, and M. Reisert, "Shape-based normalized cuts using spectral relaxation for biomedical segmentation," *Image Processing*, vol. 23, no. 1, pp. 163-170, 2014.
- [24] F. Riaz, F.B. Silva, M.D. Ribeiro, and M.T. Coimbra, "Impact of visual features on the segmentation of gastroenterology images using normalized cuts," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 60, no. 5, pp. 1191-1201, 2013.
- [25] Z.Y. Wu, and R. Leahy, "An optimal graph theoretic approach to data clustering: theory and its application to image segmentation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach.Intell.*, vol. 15, no. 11, pp. 1101-1113, 1993.
- [28] D. Wangnerand, and F. Wangner, *Between Min Cut and Graph Bisection*, TU Berlin, Berlin, Germany, Algorithmic Discrete Mathematics, Technical Report, 1991.
- [29] A. Pothen, and H. Simon, "Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graph," *IBM Journal of Research and Development*, pp. 420-425, 1973.
- [30] M. Zhu, and A.M. Martinez, "Selecting principal components in a two-stage LDA algorithm," *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2006.
- [31] <http://www.cis.upenn.edu/~jshi/software/>.
- [1] B. Peng, L. Zhang, and D. Zhang, "A survey of graph theoretical approach to image segmentation," *Pattern Recognition*, 2012.
- [2] R.C. Gonzalez, and R.E. Wood, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, New York, USA, 2002.
- [3] S. Naz, H. Majee, and H. Irshad, "Image segmentation using fuzzy clustering: A survey," *International Conference on Emerging Technologies*, pp. 181-186, 2010.
- [4] S. Raut, M. Raghuvanshi, and R. Dharaskar, A. Raut, "Image segmentation: a state-of-art survey for prediction," *ICACC*, pp. 420-424, 2009.
- [5] L. Wang, "Comparison for edge detection of colony image," *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, vol. 6 no. 9A, 2006.
- [6] Z. Musoromy, R. Soodamani, and B. Nico, "Edge detection comparison for License plate detection," *Int. Control, Automation, Robotics and Vision*, 2010.
- [7] I. Karoui, J. Boucher, and J. Augustin, "Variational region-Based segmentation using multiple texture statistics," *IEEE Trans on Image Processing*, vol. 19, no. 12, 2010.
- [8] C. Rambabu, I. Chakrabarti, and A. Mahanta, "Flooding-based watershed algorithm and its prototype hardware architecture," *IEEE Proceedings Vision Image and Signal Processing*, vol. 151, no. 3, pp. 224-234, 2004.
- [9] A.X. Falcao, J.K. Udupa, and F.K. Miyazawa, "An ultra-fast user-steered image segmentation paradigm: live wire on the fly," *IEEE Trans on Medical Imaging*, vol. 19, no. 1, pp. 55-62, 2002.
- [10] G. Sundaramoorthi, A. Yezzi, and A.C. Mennucci, "Coarse-to-Fine segmentation and tracking using sobolev active contours," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 30, no. 5, pp. 851-864, 2008.
- [11] R.M. Willett, and R.D. Nowak, "Minimax optimal level-set estimation," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 16, no. 12, pp. 2965-2979, 2007.
- [12] H. Yu, D. Wang, and Z. Tan, "Level set methods and image segmentation," *International Workshop on Medical Imaging and Augmented Reality*, pp. 204-208, 2002.
- [13] Y.B. Yuri, and G.F. Lea, "Graph cuts and efficient N-D image segmentation," *International Journal of Computer Vision*, vol. 70, no. 2, pp. 109-131, 2006.
- [14] Y.B. Yuri, and M.P. Jolly, "Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in N-D images," *Proceedings of International Conference on Computer Vision*, vol. 1, pp. 105-112, 2001.