

# طراحی کنترل کننده ردیاب مقاوم برای یک روبات متحرک غیرهولونومیک دارای لغزش جانبی با روش های بازطراحی لیاپانوفی و $H_\infty$ غیرخطی

فاطمه منفرد<sup>۱</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد، محمدحسین شفیعی<sup>۲</sup>، استادیار، طاهره بینازاده<sup>۳</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - f.monfared@sutech.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - shafiei@sutech.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - binazadeh@sutech.ac.ir

**چکیده:** کنترل روبات های متحرک غیرهولونومیک، به دلیل درجه آزادی کمتر نسبت به نوع هولونومیک، مشکل تر است. علاوه بر آن، وجود پدیده لغزش در این روبات ها محدودیت غیرهولونومیک را به صورت نامطلوبی دچار اغتشاش می نماید. در مطالعات انجام شده قبلی، لغزش معمولاً با استفاده از سنسورها اندازه گیری و یا با استفاده از روش های تخمین، تخمین زده می شود. در این مقاله فقط با دانستن حد بالای لغزش، دو کنترل کننده ردیاب مقاوم با استفاده از روش های بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی طراحی می شود. همچنین با تغییر زاویه مختصات کانایاما در مدل سازی خطای ردیابی، اغتشاشات موجود در مدل به صورت سازگار<sup>۱</sup> با ورودی تبدیل می شوند تا روش  $H_\infty$  قابل اعمال باشد. از طرفی به منظور تطبیق بیشتر با فیزیک مسئله، مدلی انتخاب شده که در آن لغزش می تواند علاوه بر انحراف مختصات روبات از مسیر حرکت، زاویه محور اصلی آن را نیز دچار انحراف کند (چرخش روبات به دور خود). در نهایت، عملکرد این دو کنترل کننده مقایسه شده و نتایج شبیه سازی، کارایی مناسب کنترل کننده های پیشنهادی و پایداری مجانبی خطای ردیابی را در حضور لغزش جانبی نشان می دهد.

**واژه های کلیدی:** غیرهولونومیک، لغزش، روش بازطراحی لیاپانوفی، روش  $H_\infty$  غیرخطی، کانایاما.

## Design of Robust Tracking Controller for a Nonholonomic Mobile Robot with Side Slipping based on Lyapunov Redesign and Nonlinear $H_\infty$ Methods

F. Monfared, Master Student<sup>1</sup>, M. H. Shafiei, Assistant professor<sup>2</sup>, T. Binazadeh, Assistant professor<sup>3</sup>

1- Student of Electrical Engineering, Shiraz University of Thecnology, Shiraz, Iran, f.monfared@sutech.ac.ir

2- Faculty of Electrical Engineering, Shiraz University of Thecnology, Shiraz, Iran, shafiei@sutech.ac.ir

3- Faculty of Electrical Engineering, Shiraz University of Thecnology, Shiraz, Iran, binazadeh@sutech.ac.ir

**Abstract:** Control of nonholonomic mobile robots is more complex with respect to the holonomic type due to fewer degrees of freedom of their model. In addition, side slipping in a nonholonomic mobile robot disturbs the nonholonomic constraint adversely. In previous researches, the slip is either estimated by an estimator or is measured using sensors. In this paper, two robust tracking controllers are designed with considering the upper bound of the side slip value, using the Lyapunov redesign and nonlinear  $H_\infty$  methods. Also, the angle of kanayama transformation is defined such that the model includes only matched disturbances in order to apply  $H_\infty$  method. In the presented model, the slippage not only deviate the robot from its path, it also deviates the angle of robot's main axis (the robot rotates around itself). Then, the performance of these two controllers is compared and the simulation results show the appropriate efficiency of the proposed controllers.

**Keywords:** Nonholonomic, slipping, Lyapunov redesign method, nonlinear  $H_\infty$  method, kanayama.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۵/۱۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۷/۱۴ و ۱۳۹۳/۸/۱۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۹/۱۳

نام نویسنده مسئول: محمدحسین شفیعی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - شیراز - دانشگاه صنعتی شیراز - دانشکده مهندسی برق و الکترونیک

۱- مقدمه

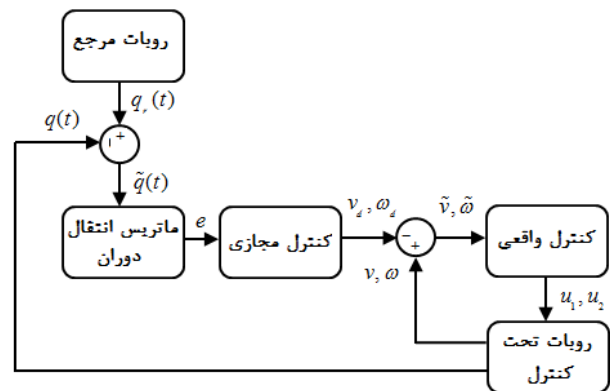
جهت فرمان به این طراحی افزوده شده و قیود محدودکننده برای سرعت‌های خطی و زاویه‌ای حذف شده است.

از روش‌های تطبیقی نیز جهت کنترل روبات غیرهولونومیک بدون لغزش استفاده شده است؛ در [۶]، یک کنترل کننده ردیاب تطبیقی برای یک روبات با استفاده از معیار  $H_{\infty}$  غیرخطی و بر اساس بهینگی معکوس<sup>۴</sup> طراحی شده است. در این مرجع، عدم قطعیت در جرم، ممان اینرسی و ثابت‌های اصطکاک وارد شده به چرخ‌ها، است. در [۷] یک الگوریتم کنترل ترکیبی بر اساس تکنیک پسگام، کنترل مد لغزشی و شبکه عصبی تطبیقی برای کنترل ردیابی یک روبات متحرک غیرهولونومیک، در غیاب لغزش، پیشنهاد گردیده است. هرچند تحقیقات مناسبی در این زمینه انجام شده است اما این کنترل کننده‌ها به حالت با لغزش توسعه نیافته است و تنها روبات غیرهولونومیک، بدون لغزش در نظر گرفته شده است.

لغزش چرخ‌ها در محیط‌های واقعی مختلفی مانند جاده مرطوب و یخ‌زده و چرخش سریع، محدودیت غیرهولونومیک را به صورت نامطلوبی دچار اغتشاش می‌کند. در عمل هنگامی که چرخ یک پیچ را طی می‌کند یک نیروی جانبی توسط عکس‌العمل بین جاده و چرخ به وجود می‌آید. این نیرو باعث می‌شود که چرخ از مسیر پیچ خارج نشود. اگر به دلیل اصطکاک کم بین سطوح جاده و چرخ، این نیروی جانبی کم باشد حرکت چرخ در جهت خارج از صفحه چرخ صورت می‌گیرد. همین مسئله باعث می‌شود که محدودیت غیرهولونومیک به صورت نامطلوبی دچار اغتشاش و منجر به لغزش روبات به پهلو شود [۸].

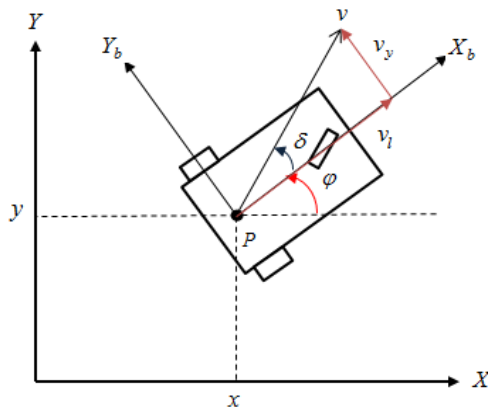
در مراجع [۹-۱۴]، کنترل کننده‌هایی برای ردیابی روبات غیرهولونومیک در حضور لغزش ارائه شده است. در [۹]، یک کنترل کننده ردیابی با استفاده از روش پسگام و آنالیز لیاپانوف، طراحی شده است که در آن لغزش‌ها توسط فیلتر کالمن خنثی<sup>۵</sup> تخمین زده می‌شود. در [۱۰] با روشی مشابه، تخمین با استفاده از سیستم GPS<sup>۶</sup> و تعدادی سنسورهای کمکی انجام می‌شود. همچنین در [۱۱]، یک کنترل کننده تطبیقی نیز برای جبران عدم قطعیت‌های پارامتری در پارامترهای محرک، به کنترل کننده مرجع قبل افزوده شده است. در [۱۲]، تخمین لغزش و عدم قطعیت‌های مدل توسط شبکه عصبی انجام شده است. در [۱۳]، یک کنترل کننده تطبیقی ردیاب مسیر در حضور لغزش با استفاده از یک رؤیت‌گر اغتشاش پیشنهاد شده است. لغزش در نظر گرفته شده در مدل این مرجع، منجر به انحراف مختصات روبات از مسیر اصلی شده است؛ اما زاویه محور اصلی روبات را دچار انحراف نمی‌کند که این نکته با فیزیک مسئله منطبق نیست. اخیراً در [۱۴]، یک کنترل کننده ردیاب مقاوم با استفاده از روش پسگام و بازطراحی لیاپانوفی در حضور لغزش پیشنهاد شده است. در این مرجع از مدل متفاوتی استفاده شده که نسبت به مدل انتخاب شده در مقاله ما تطبیق کمتری با فیزیک مسئله دارد. همچنین در این مرجع، مشابه مرجع [۱۳] لغزش، تنها منجر به انحراف مختصات روبات از مسیر اصلی آن شده است و زاویه محور آن را تغییر نمی‌دهد.

روبات‌های متحرک، در صنایع مختلفی شامل انتقال مواد، صنایع نظامی و صنایع نفت کاربرد دارند. این روبات‌ها به دو دسته روبات متحرک هولونومیک و روبات متحرک غیرهولونومیک تقسیم می‌گردند. در نوع غیرهولونومیک توانایی چرخش به پهلو وجود ندارد و قیود حاکم بر حرکت این نوع روبات‌ها غیرقابل انتگرال‌گیری است. به‌طور کلی معادلات حاکم بر روبات غیرهولونومیک به‌گونه‌ای است که در اکثر تحقیقات انجام شده، از روش پسگام<sup>۲</sup> در طراحی کنترل کننده استفاده شده است. در طراحی مبتنی بر روش پسگام به کمک ورودی‌های گشتاور، سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای روبات کنترل می‌شوند و در نهایت به کمک آن‌ها ردیابی انجام می‌شود. مرحله اول طراحی که با فرض در اختیار بودن سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای روبات به‌عنوان متغیرهای کنترلی ردیابی انجام می‌شود، اصطلاحاً کنترل مجازی نامیده می‌شود. پس از آن سعی می‌شود که ورودی‌های گشتاور به نحوی طراحی شوند که سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای به مقدار مطلوب خود همگرا شوند [۱]. شکل (۱) دیاگرام بلوکی این روش را نشان می‌دهد.



شکل ۱: بلوک دیاگرام روش پسگام

در مراجع [۵-۱]، کنترل کننده‌هایی برای روبات بدون لغزش پیشنهاد شده است. در مرجع [۱]، یک کنترل کننده ردیاب برای این روبات با استفاده از ساختار شکل ۱ و آنالیز لیاپانوف پیشنهاد شده است. در این مرجع، جرم و ممان اینرسی روبات به‌عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته شده و با استفاده از یک قانون کنترل تطبیقی، ردیابی یک مسیر دلخواه صورت گرفته است. نویسندگان مرجع [۲]، یک کنترل کننده ردیاب با استفاده از روش پسگام، برای ردیابی یک مسیر دلخواه پیشنهاد داده‌اند. طرح کنترلی پیشنهاد شده، همگرایی خطای ردیابی به صورت فراگیر و با ورودی کنترل گشتاور محدود<sup>۳</sup> با یک حد از پیش تعیین شده را تضمین می‌کند. استفاده از کنترل مد لغزشی (در مختصات قطبی) برای طراحی کنترل کننده ردیاب مقاوم در برابر اغتشاشات خارجی محدود، در مرجع [۳] صورت گرفته است. همچنین در [۴]، با تغییر سطوح لغزش، کنترل کننده‌ای با عملکرد ردیابی بهتر حاصل شده است. علاوه بر این در [۵]، پایدارسازی موقعیت و کنترل



شکل ۲: پیکربندی یک روبات متحرک در حضور لغزش جانبی

این سرعت‌ها  $(\vec{v}_x$  و  $\vec{v}_y$ )، توسط روابط هندسی زیر، با زاویه لغزش چرخ ( $\delta$ ) به صورت رابطه (۱) در ارتباط می‌باشند [۸].

$$\sin \delta = \frac{v_y}{v} \quad (1)$$

$$\cos \delta = \frac{v_x}{v}$$

بنابراین مدل حرکتی (سینماتیک) روبات متحرک غیرهولونومیک در حضور لغزش جانبی به صورت رابطه (۲) حاصل می‌شود.

$$\dot{x} = v \cos(\varphi + \delta)$$

$$\dot{y} = v \sin(\varphi + \delta) \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \sigma$$

که در آن،  $v$  سرعت خطی،  $\omega$  سرعت زاویه‌ای،  $\delta$  زاویه لغزش و  $\sigma$  تأثیر نیروی جانبی بر بردار سرعت است. همان‌طور که در این مدل دیده می‌شود، لغزش علاوه بر انحراف مختصات روبات از مسیر اصلی آن، زاویه محور اصلی روبات را نیز دچار انحراف می‌کند. محدودیت غیرهولونومیک به صورت رابطه (۳) نیز بیان می‌شود.

$$\dot{x} \sin(\varphi + \delta) - \dot{y} \cos(\varphi + \delta) = 0 \quad (3)$$

همان‌طور که دیده می‌شود در مدل حرکتی روبات متحرک غیرهولونومیک، ورودی‌های گشتاور اعمال شده به چرخ‌های عقب دیده نمی‌شوند. بنابراین با توجه به قوانین نیوتن به صورت زیر، داریم:

$$\dot{v} = \frac{1}{rm} (\tau_1 + \tau_2) = b_1 u_1 \quad (4)$$

$$\dot{\omega} = \frac{l}{rl} (\tau_2 - \tau_1) = b_2 u_2$$

که در آن  $b_2 = l/r$  و  $b_1 = 1/m$ ، که  $m$  و  $l$  به ترتیب جرم و ممان اینرسی روبات است.  $u_1 = \tau_1 + \tau_2$  و  $u_2 = \tau_1 - \tau_2$  ورودی‌های کنترلی هستند که در آن  $\tau_1$  و  $\tau_2$  (ورودی‌های گشتاور) توسط دو موتور مستقل و یکسان به روبات اعمال می‌گردد. با مشتق‌گیری از معادلات حرکتی رابطه (۲) و جایگذاری معادله (۴) در آن، مدل

در این مقاله، یک کنترل کننده، جهت ردیابی مسیر یک روبات غیرهولونومیک در حضور لغزش جانبی پیشنهاد می‌شود. در کنترل کننده پیشنهادی، از سنسور برای اندازه‌گیری مقدار لحظه‌ای لغزش یا تخمین گر برای تخمین لغزش استفاده نشده است؛ زیرا استفاده از سنسورهای اضافی، هزینه‌بر است و استفاده از روش‌های تخمین و رؤیت‌گرها، یک مدل دینامیکی به سیستم اضافه می‌کند و باعث بالا رفتن مرتبه سیستم می‌شود. همچنین الگوریتم‌های تخمین وابسته به مدل بوده و معمولاً روش‌های مبتنی بر مدل<sup>۷</sup> در برابر اغتشاشات چندان مقاوم نیستند. در این مقاله تمرکز بر روی طراحی کنترل کننده توسط رویکرد مقاوم است تا تنها با در اختیار داشتن حد بالای لغزش بتوان کنترل کننده را در حضور لغزش طراحی کرد. توجه به این نکته ضروری است که در روبات با لغزش، به دلیل نامعلوم بودن زاویه لغزش، طراحی کنترل کننده با استفاده از روش‌های مقاوم به مراتب مشکل‌تر از روش‌های تطبیقی و تخمین است. زیرا در کنترل با استفاده از روش‌های تطبیقی و تخمین، زاویه لغزش در دسترس است، اما روش‌های مقاوم الزامی به اندازه‌گیری زاویه لغزش ندارند. همچنین در مدل استفاده شده در این مقاله، لغزش روبات علاوه بر انحراف مختصات روبات از مسیر اصلی، زاویه محور اصلی روبات را نیز دچار انحراف می‌کند.

ساختار این مقاله به شرح زیر است؛ در بخش دوم، مدل روبات غیرهولونومیک در حضور لغزش جانبی معرفی می‌شود. در بخش سوم به تعریف مسئله ردیابی پرداخته می‌شود. یک کنترل کننده ردیابی مقاوم بر اساس روش بازطراحی لیاپانوفی در بخش چهارم طراحی می‌شود. در بخش پنجم نیز یک کنترل کننده ردیابی به روش  $H_\infty$  غیرخطی بر اساس بهینگی معکوس پیشنهاد می‌شود. در نهایت در بخش ششم، مقایسه و شبیه‌سازی دو کنترل کننده برای یک روبات با مقادیر واقعی انجام می‌شود و نتایج مربوط به طی مسیر روبات در حضور لغزش جانبی ارائه می‌شود.

## ۲- مدل سازی روبات متحرک غیرهولونومیک در حضور لغزش جانبی

در این بخش مدل روبات متحرک غیرهولونومیک استفاده شده در این مقاله در حضور لغزش معرفی می‌شود. شکل (۲)، پیکربندی این روبات را نشان می‌دهد. در این روبات گشتاورهای کنترلی به دو چرخ عقب وارد شده و چرخ جلو به صورت هرزگرد است. همچنین دستگاه بدنی برای این روبات، دارای محورهای مختصات  $X_b$  و  $Y_b$  و نقطه مرجع  $P$  (مرکز جرم) است که با محورهای مختصات زمینی  $X$  و  $Y$ ، زاویه  $\varphi$  را تشکیل می‌دهد. بردار  $\vec{v}$ ، سرعت نقطه مرجع  $P$  بوده و  $\vec{v}_x$  و  $\vec{v}_y$ ، به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای محور  $Y_b$  و  $X_b$  است [۸].

مختصات کانایاما، یک تبدیل به شکل یک دوران به مقدار  $\varphi + \delta$  (مجموع زاویه بدنه روبات و زاویه لغزش نسبت به دستگاه زمینی) و تعریف خطای زاویه دوران به صورت  $\varphi_e = \varphi_r - (\varphi + \delta)$  است که دستگاه مختصات محیط را به مختصات متحرک متصل شده به بردار سرعت روبات انتقال می دهد، یعنی:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \delta) & \sin(\varphi + \delta) & 0 \\ -\sin(\varphi + \delta) & \cos(\varphi + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \varphi_r - (\varphi + \delta) \end{pmatrix} \quad (8)$$

که در آن ماتریس  $T$ ، ماتریس انتقال دوران است.

بنابراین در این حالت دینامیک حاکم بر خطای ردیابی در حضور لغزش جانبی به صورت رابطه (۹) بیان می شود.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 (\omega + \sigma + \delta) - v + v_r \cos e_3 \\ \dot{e}_2 &= -e_1 (\omega + \sigma + \delta) + v_r \sin e_3 \\ \dot{e}_3 &= \omega_r - \omega - \sigma - \delta \end{aligned} \quad (9)$$

#### ۴- طراحی کنترل کننده ردیابی مقاوم بر اساس روش بازطراحی لیاپانوفی

در این بخش هدف، طراحی یک کنترل کننده ردیابی مقاوم با استفاده از ترکیب روش پسگام و بازطراحی لیاپانوفی است، به نحوی که خطای ردیابی  $e_1$  تا  $e_3$  در حضور لغزش جانبی به طور مجانبی به صفر همگرا شود. در این روش ابتدا یک کنترل کننده نامی در غیاب لغزش، با استفاده از روش پسگام و تئوری لیاپانوف طراحی می شود و سپس با استفاده از روش بازطراحی لیاپانوفی، ردیابی در حضور لغزش انجام می شود.

#### ۴-۱- طراحی کنترل کننده ردیابی مجازی برای سیستم نامی

در قدم اول طراحی، از آنجایی که ورودی های کنترل واقعی  $u_1$  و  $u_2$  در معادلات (۹) ظاهر نمی شوند،  $v$  و  $\omega$  به عنوان متغیرهای کنترل مجازی برای سیستم خطای ردیابی در نظر گرفته می شوند. طبق روش پسگام ورودی های مجازی  $v = v_d$  و  $\omega = \omega_d$  به نحوی طراحی می شوند که سیستم خطای ردیابی به صورت مجانبی پایدار شود. با توجه به رابطه (۹) معادلات سیستم خطای ردیابی، در غیاب لغزش به صورت رابطه (۱۰) بیان می شود.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \omega - v + v_r \cos e_3 \\ \dot{e}_2 &= -e_1 \omega + v_r \sin e_3 \\ \dot{e}_3 &= \omega_r - \omega \end{aligned} \quad (10)$$

در قضیه زیر کنترل کننده پایدار ساز مناسب برای سیستم (۱۰) پیشنهاد می شود:

دینامیکی روبات متحرک غیرهولونومیک در حضور لغزش به صورت رابطه (۵) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= b_1 u_1 \cos(\varphi + \delta) + \frac{\lambda}{m} \sin(\varphi + \delta) \\ \ddot{y} &= b_1 u_1 \sin(\varphi + \delta) - \frac{\lambda}{m} \cos(\varphi + \delta) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega} + \dot{\sigma}$$

که در آن  $\lambda$  ضریب لاگرانژ بوده و به صورت رابطه (۶) قابل تعریف است.

$$\lambda = -m(\dot{\varphi} + \dot{\sigma}) [\dot{x} \cos(\varphi + \delta) + \dot{y} \sin(\varphi + \delta)] \quad (6)$$

#### ۳- تعریف مسئله ردیابی

پس از محاسبه معادلات حاکم بر روبات دارای لغزش، با توجه به ردیابی بودن مسئله مورد نظر، لازم است که خطای ردیابی تعریف و معادلات حاکم بر آن محاسبه شوند. مسئله ردیابی شامل یک مسیر مرجع  $q_r(t) = [x_r(t), y_r(t), \varphi_r(t)]^T$  است که مسیر روبات تحت کنترل، یعنی  $q(t) = [x(t), y(t), \varphi(t)]^T$  باید بر آن منطبق باشد. مسیر مرجع  $q_r(t)$  توسط یک روبات مرجع ایجاد می شود تا معادلات آن در مدل حرکتی روبات متحرک و همچنین محدودیت غیرهولونومیک صدق کند. بنابراین برای تولید مسیر مرجع، سرعت خطی و سرعت زاویه ای مطلوب، به عنوان ورودی به معادله حرکتی یک روبات ایده آل (معادلات (۷)) داده می شود. خروجی متغیرهای حالت این روبات، همان مسیر مرجع است.

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= v_r \cos \varphi_r \\ \dot{y}_r &= v_r \sin \varphi_r \\ \dot{\varphi}_r &= \omega_r \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن اندیس  $r$  برای مسیر مرجع،  $v_r$  و  $\omega_r$  به ترتیب سرعت خطی مرجع و سرعت زاویه ای مرجع می باشند [۱].

**فرض ۱:** در این مقاله فرض می شود که سرعت های خطی و زاویه ای روبات مرجع و مشتقات اول آن ها در دسترس و محدود باشند.

**فرض ۲:** در مسئله ردیابی فرض می شود که سرعت های مرجع  $v_r$  و  $\omega_r$  به طور هم زمان صفر نمی شوند. این فرض، در تمام مقالات با موضوع طراحی کنترل کننده ردیاب برای یک روبات متحرک بر مبنای قضیه لیاپانوف، منتشر شده اند، در نظر گرفته شده است [۱]، [۱۸] - [۱۵].

مسئله ردیابی منجر به پیدا کردن یک قانون کنترلی فیدبک به صورت  $(u_1, u_2)^T = u(q, \dot{q}, q_r, v_r, \omega_r, \dot{v}_r, \dot{\omega}_r)$  می شود به نحوی که در حضور لغزش جانبی،  $\dot{q}(t) = \dot{q}_r(t) - q(t)$  که به عنوان خطای ردیابی مسیر تعریف می شود، حتی الامکان کوچک شود. در محاسبه خطای ردیابی مسیر تغییر مختصات کانایاما<sup>۱</sup> اعمال می شود [۱]. تغییر

است و به یک مقدار محدود همگرا می شود و  $\ddot{V}_1$  هم محدود است، با استفاده از قضیه باربالات<sup>۹</sup> [۱۹] وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $\dot{V}_1 \rightarrow 0$  با صفر شدن  $\dot{V}_1$ ،  $e_1$  و  $e_3$  نیز صفر خواهند شد. برای نشان دادن اینکه  $e_2$  نیز صفر می شود، مشتق خطای ردیابی اول از رابطه (۱۰) را در نظر بگیرید؛ با جایگزینی  $v$  و  $\omega$  در آن داریم:

$$\dot{e}_1 = e_2 \omega_r + e_2 (k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3) - k_1 e_1 \quad (۱۶)$$

به راحتی می توان نشان داد که مشتق دوم  $e_1$  نیز مشابه باحالت قبل محدود می شود و دوباره طبق قضیه باربالات وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $\dot{e}_1 \rightarrow 0$ . در نتیجه با توجه به اینکه  $e_1$  و  $e_3$  صفر هستند، رابطه (۱۶) به صورت رابطه (۱۷) تبدیل می شود.

$$e_2 \omega_r + k_2 e_2^2 v_r = 0 \quad (۱۷)$$

با روشی مشابه قبل، مشتق خطای ردیابی سوم از رابطه (۱۰) را در نظر بگیرید؛ با جایگزینی  $v$  و  $\omega$  در آن داریم:

$$\dot{e}_3 = -k_2 e_2 v_r - k_3 \sin e_3 \quad (۱۸)$$

مشابه قبل، مشتق دوم  $e_3$  نیز محدود خواهد شد و طبق قضیه باربالات وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $\dot{e}_3 \rightarrow 0$ . در نتیجه با توجه به اینکه  $e_1$  و  $e_3$  صفر هستند، رابطه (۱۸) به صورت رابطه (۱۹) تبدیل می شود.

$$k_2 e_2 v_r = 0 \quad (۱۹)$$

با توجه به فرض ۲، بنابراین  $e_2$  باید به سمت صفر همگرا شود. بنابراین برای خطاهای ردیابی، پایداری مجانبی مبدأ نشان داده شده است.

اثبات ناپایداری نقطه تعادل دوم،  $(e_1, e_2, e_3)^T = (0, 0, \pi)^T$ ، با استفاده از قضیه ناپایداری chetaev [۲۰] انجام می شود. ابتدا، باید این نقطه را تبدیل  $\bar{e}_3 = e_3 - \pi$  و  $e_2$  تغییر نمی کنند) به مبدأ شیفیت داده شود. در این حالت ورودی های کنترلی مجازی رابطه (۱۱) بر اساس متغیرهای حالت جدید به صورت رابطه (۲۰) تبدیل می شوند.

$$v = v_d = k_1 e_1 - v_r \cos \bar{e}_3 \quad (۲۰)$$

$$\omega = \omega_d = \omega_r + 2e_2 v_r - k_3 \sin \bar{e}_3$$

همچنین معادلات سیستم حلقه بسته (۱۲) به صورت رابطه (۲۱) تبدیل می شود.

$$\dot{e}_1 = e_2 (\omega_r + 2e_2 v_r - k_3 \sin \bar{e}_3) - k_1 e_1$$

$$\dot{e}_2 = -e_1 (\omega_r + 2e_2 v_r - k_3 \sin \bar{e}_3) - v_r \sin \bar{e}_3 \quad (۲۱)$$

$$\dot{\bar{e}}_3 = -2e_2 v_r + k_3 \sin \bar{e}_3$$

در قضیه ناپایداری chetaev، برای اثبات ناپایداری، لازم نیست که یک تابع مثبت معین (مشابه تابع لیاپانوف) انتخاب شود؛ تنها کافی است که تابع انتخاب شده در یک  $x_0$  به اندازه کافی نزدیک به مبدأ مثبت باشد. بنابراین برای اثبات ناپایداری نقطه تعادل دوم، تابع،

**قضیه ۱:** اگر ورودی های کنترلی مجازی  $(v_d, \omega_d)$  برای سیستم (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) انتخاب شوند.

$$v = v_d = k_1 e_1 + v_r \cos e_3 \quad (۱۱)$$

$$\omega = \omega_d = \omega_r + k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3$$

که در آن  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k_3$  ثابت های مثبت دلخواهی هستند، آنگاه، سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی بوده و خطاهای  $(e_1, e_2, e_3)$  به سمت صفر همگرا می شود.

**اثبات:** با جایگذاری قانون های کنترلی پیشنهاد شده در رابطه (۱۱) در معادلات سیستم (۱۰)، معادلات سیستم حلقه بسته به صورت رابطه (۱۲) در می آید.

$$\dot{e}_1 = e_2 (\omega_r + k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3) - k_1 e_1$$

$$\dot{e}_2 = -e_1 (\omega_r + k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3) + v_r \sin e_3 \quad (۱۲)$$

$$\dot{e}_3 = -k_2 e_2 v_r - k_3 \sin e_3$$

با توجه به معادلات (۱۲)، به راحتی می توان نشان داد که سیستم حلقه بسته دارای دونقطه تعادل به صورت  $(e_1, e_2, e_3)^T = (0, 0, 0)^T$  و  $(e_1, e_2, e_3)^T = (0, 0, \pi)^T$  است. در اینجا نشان داده می شود که نقطه اول (مبدأ) یک نقطه تعادل پایدار و نقطه تعادل دوم ناپایدار است. برای اثبات پایداری نقطه تعادل مبدأ، یک تابع لیاپانوف مثبت معین به صورت رابطه (۱۳) انتخاب می شود.

$$V_1 = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{1}{k_2} (1 - \cos e_3) \quad (۱۳)$$

که در آن  $k_2$  یک ثابت مثبت است، در این حالت مشتق تابع لیاپانوف در راستای سیستم حلقه بسته (۱۲) به صورت رابطه (۱۴) حاصل می شود.

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 - \frac{k_3}{k_2} \sin^2 e_3 \leq 0 \quad (۱۴)$$

از آنجایی که  $V_1$  از پائین محدود است (یک تابع لیاپانوف مثبت معین است) و  $\dot{V}_1 \leq 0$  (منفی نیمه معین) است، در نتیجه  $V_1$  به یک حد محدود همگرا می شود. همچنین با توجه به رابطه (۱۳)، محدود بودن  $V_1$ ، محدود بودن  $e_1$  و  $e_2$  را نتیجه می دهد. همچنین با استفاده از رابطه (۱۲)، مشتق دوم  $V_1$  به صورت رابطه (۱۵) حاصل می شود.

$$\ddot{V}_1 = -2k_1 e_1 e_2 (\omega_r + k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3) + 2k_1^2 e_1^2 + \frac{2k_3}{k_2} \sin e_3 \cos e_3 (k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3) \quad (۱۵)$$

بنابراین با توجه به انتخاب مقادیر محدود برای ثابت های  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k_3$ ، فرض اینکه  $v_r$  و  $\omega_r$  (سرعت های خطی و زاویه ای روبات مرجع) و مشتق اول آن ها محدود هستند،  $\ddot{V}_1$  محدود می شود؛ یعنی  $\dot{V}_1$  به طور یکنواخت پیوسته خواهد شد. از آنجایی که  $V_1$  دیفرانسیل پذیر

#### ۲-۴- طراحی کنترل کننده ردیابی مقاوم مجازی با استفاده از روش بازطراحی لیاپانوفی

در این بخش یک کنترل کننده ردیابی مقاوم به روش بازطراحی لیاپانوفی طراحی می شود. در این روش به کنترل کننده نامی ( $v_d$  و  $\omega_d$ )، جملات  $v_1$  و  $v_2$  اضافه می شوند، که این جملات به نحوی طراحی می شوند که زیرسیستم خطای ردیابی باز هم در حضور لغزش جانبی پایدار مجانبی شود. با افزودن جملات  $v_1$  و  $v_2$  به  $v_d$  و  $\omega_d$  به صورت رابطه (۲۴)، سیگنال های کنترلی مقاوم نسبت به اغتشاش تشکیل می شوند.

$$v_d = k_1 e_1 + v_r \cos e_3 + v_1 \quad (24)$$

$$\omega_d = \omega_r + k_2 e_2 v_r + k_3 \sin e_3 + v_2$$

اگر همان تابع لیاپانوف رابطه (۱۳) در نظر گرفته شود، با مشتق گیری از آن در راستای سیستم رابطه (۹) و جایگذاری رابطه (۲۴) به جای  $v$  و  $\omega$  در آن، خواهیم داشت:

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 - e_1 v_1 - \frac{k_3}{k_2} \sin^2 e_3 - \frac{k_3}{k_2} \sin e_3 (v_2 + \sigma + \delta) \quad (25)$$

با توجه به رابطه (۱۴)، رابطه (۲۵) به صورت رابطه (۲۶) تبدیل می شود.

$$\dot{V}_1 \leq -e_1 v_1 - \frac{k_3}{k_2} \sin e_3 (v_2 + \sigma + \delta) \quad (26)$$

اگر  $v_1 = 0$  انتخاب شود، آنگاه:

$$\dot{V}_1 \leq \frac{k_3}{k_2} (\varpi v_2 + \varpi(\sigma + \delta)) \quad (27)$$

که در آن  $\varpi = -\sin e_3$  است. بنابراین اگر  $v_2$  به نحوی طراحی شود که نامساوی (۲۸) برقرار شود.

$$\varpi v_2 + \varpi(\sigma + \delta) \leq 0 \quad (28)$$

آنگاه  $\dot{V}_1 \leq 0$  و طبق قضیه باربالات پایداری مجانبی در حضور لغزش برای خطاهای ردیابی حاصل می شود. از طرفی جهت برقراری نامساوی (۲۸)، لازم است تا یک حد بالا برای لغزش فرض شود. اگر داشته باشیم:

$$\|\sigma(t) + \delta(t)\|_{\infty} \leq \beta \quad (29)$$

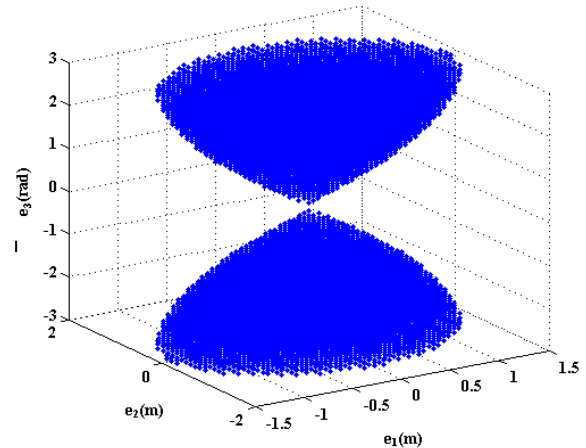
و  $v_2$  به صورت رابطه (۳۰) طراحی شود.

$$v_2 = -\eta(x) \operatorname{sgn}(\varpi) \quad (30)$$

که در آن  $\eta(x) \geq \beta$ ، آنگاه نامساوی (۲۸) برقرار شده و سیستم حلقه بسته (۹) با سیگنال های کنترلی (۲۴)، پایدار مجانبی می شود. البته برای هموار کردن سیگنال کنترلی می توان به جای تابع علامت از تابع اشباع با شیب مناسب استفاده کرد. افزایش شیب این تابع، باعث مقاوم تر شدن روبات در برابر لغزش می شود و کاهش آن، باعث هموارتر

$$\bar{V}_1 = -\frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{1}{2}(1 - \cos \bar{e}_3) \quad (22)$$

انتخاب گردید. این تابع در نقطه تعادل دوم (که اکنون به مبدأ شیفت داده شده است) صفر است و در ناحیه ای که در شکل (۳) نشان داده شده، مثبت است. بنابراین اگر نقطه  $x_0$  روی محور  $\bar{e}_3$  انتخاب شود، هرچه به مبدأ نزدیک شود، تابع  $\bar{V}_1$  مثبت خواهد بود.



شکل ۳: زیرفضایی از  $R^3$  که در آن تابع  $\bar{V}_1$  مثبت است.

مشتق این تابع لیاپانوف در راستای سیستم حلقه بسته (۲۱) به صورت رابطه (۲۳) است.

$$\dot{\bar{V}}_1 = k_1 e_1^2 + \frac{k_3}{2} \sin^2 \bar{e}_3 \quad (23)$$

بنابراین  $\dot{\bar{V}}_1$  در ناحیه نشان داده شده در شکل (۳) مثبت است و طبق قضیه ناپایداری نقطه  $(e_1, e_2, e_3)^T = (0, 0, \pi)^T$ ، یک نقطه ناپایدار است و روبات به این نقطه همگرا نمی شود.

**توجه:** استخراج تحلیلی ناحیه جذب می تواند دید بسیار مناسبی در مورد ناحیه همگرایی خطاهای سیستم به صفر ایجاد نماید. اما محاسبه تحلیلی ناحیه جذب برای یک سیستم متغیر با زمان، بسیار پیچیده است. اما از آنجایی که در مورد این سیستم تابع لیاپانوف و مشتق زمانی آن،  $\dot{V}_1$  (رابطه (۱۴)) غیرمتغیر با زمان هستند، می توان گفت که ناحیه ای که درون سطح بسته  $V_1(x) = c$  (یک ثابت مثبت) قرار دارد و در آن  $\dot{V}_1$  منفی است، یک مجموعه پایا را تشکیل می دهد. به عبارت دیگر مسیرهای فازی که از درون این ناحیه شروع می شوند، نمی توانند آن را ترک کنند. بنابراین با توجه به اثبات پایداری مجانبی نقطه تعادل مبدأ، می توان این ناحیه را به ازای بزرگ ترین  $c$  ممکن به عنوان تخمینی از ناحیه جذب در نظر گرفت. با توجه به اینکه در فواصل دور از مبدأ نیز  $\dot{V}_1$  تغییر علامت نمی دهد، می توان  $c$  را به اندازه کافی بزرگ انتخاب نمود. شبیه سازی ها هم مؤید ناحیه جذب به اندازه کافی بزرگ سیستم حول نقطه تعادل مبدأ هستند.

بنابراین با جایگذاری رابطه (۲۴) در رابطه (۳۶)، مشتق این تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۳۷) تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_1 e_1^2 - \frac{k_3}{k_2} \sin^2 e_3 + \tilde{v}(-e_1 + b_1 u_1 - \dot{v}_d) \\ & + \tilde{\omega} \left( -\frac{\sin e_3}{k_2} + b_2 u_2 - \dot{\omega}_d \right) - \frac{\sin e_3}{k_2} (v_2 + \sigma + \delta) \end{aligned} \quad (37)$$

با توجه به  $\dot{V}_1 \leq 0$  در مرحله قبل و طراحی  $v_2$  با رابطه (۳۰)، مشتق تابع لیاپانوف  $V_2$  به صورت رابطه (۳۸) درمی آید.

$$\dot{V}_2 \leq \tilde{v}(-e_1 + b_1 u_1 - \dot{v}_d) + \tilde{\omega} \left( -\frac{\sin e_3}{k_2} + b_2 u_2 - \dot{\omega}_d \right) \quad (38)$$

در این حالت اگر سیگنال های کنترلی  $u_1$  و  $u_2$  به صورت رابطه (۳۹) طراحی شوند.

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{1}{b_1} (-c_1 \tilde{v} + e_1 + \dot{v}_d) \\ u_2 = & \frac{1}{b_2} \left( -c_2 \tilde{\omega} + \frac{\sin e_3}{k_2} + \dot{\omega}_d \right) \end{aligned} \quad (39)$$

که در آن  $c_1$  و  $c_2$  ثابت های مثبت هستند، آنگاه رابطه (۳۸) به صورت رابطه (۴۰) تبدیل می شود.

$$\dot{V}_2 \leq -c_1 \tilde{v}^2 - c_2 \tilde{\omega}^2 \quad (40)$$

بنابراین با توجه به قضیه باربالات  $v$  به  $v_d$  و  $\omega$  به  $\omega_d$  همگرا می شود.

#### ۵- طراحی کنترل کننده ردیابی بر اساس روش $H_\infty$ غیرخطی

معادله دینامیکی حاکم بر خطاهای ردیابی رابطه (۹) را در نظر بگیرید، فرض کنید ورودی های سرعت خطی و سرعت زاویه ای به صورت رابطه (۴۱) انتخاب شوند.

$$\begin{aligned} v = & v_r \cos e_3 + v_0 \\ \omega = & \omega_r + k_2 e_2 v_r + \omega_0 \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن  $v_0$  و  $\omega_0$  سیگنال های پایدارسازی هستند که در ادامه توسط روش  $H_\infty$  غیرخطی طراحی می شوند. اکنون با جایگذاری ورودی های رابطه (۴۱)، مشتق تابع لیاپانوف رابطه (۱۳) در راستای سیستم (۹) به صورت رابطه (۴۲) حاصل می شود.

$$\dot{V}_1 = -e_1 v_0 - \frac{\sin e_3}{k_2} (\omega_0 + \sigma + \delta) \quad (42)$$

اکنون، با توجه به رابطه (۴۲) یک سیستم مجازی به صورت رابطه (۴۳) تعریف می شود.

شدن سیگنال کنترلی می شود. در شبیه سازی ها نیز یک تابع اشباع با شیب مناسب و کمتر برای کاهش دامنه سیگنال کنترلی استفاده شده است.

در گام دوم طراحی، با توجه به اینکه روبات توسط گشتاورهای  $\tau_1$  و  $\tau_2$  کنترل می شود، لازم است تا یک کنترل کننده دیگر جهت تنظیم سرعت خطی و سرعت زاویه ای روبات به مقادیر مطلوب  $v_d$  و  $\omega_d$  طراحی شود. در واقع ممکن است در حالت های گذرا، سرعت های مطلوب با سرعت های واقعی مساوی نباشند. بنابراین یک متغیر جدید به صورت اختلاف سرعت های واقعی و سرعت های مطلوب به صورت رابطه (۳۱) تعریف می شود.

$$v - v_d = \tilde{v} \quad (31)$$

$$\omega - \omega_d = \tilde{\omega}$$

بنابراین در گام دوم طراحی به جای  $v$  و  $\omega$  از رابطه (۳۲) به صورت زیر استفاده می شود:

$$v = \tilde{v} + v_d \quad (32)$$

$$\omega = \tilde{\omega} + \omega_d$$

با جایگذاری رابطه (۳۲) در رابطه (۹)، زیرسیستم خطای ردیابی رابطه (۹) در حضور لغزش جانبی به صورت رابطه (۳۳) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = & e_2 (\omega_d + \tilde{\omega} + \sigma + \delta) - v_d - \tilde{v} + v_r \cos e_3 \\ \dot{e}_2 = & -e_1 (\omega_d + \tilde{\omega} + \sigma + \delta) + v_r \sin e_3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\dot{e}_3 = \omega_r - \omega_d - \tilde{\omega} - \sigma - \delta$$

با مشتق گیری از رابطه (۳۱) و جایگذاری رابطه (۴) به جای  $v$  و  $\omega$  در آن ها، روابط دینامیکی حاکم بر روبات به صورت رابطه (۳۴) بیان می شود.

$$\dot{\tilde{v}} = b_1 u_1 - \dot{v}_d \quad (34)$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = b_2 u_2 - \dot{\omega}_d$$

اکنون با انتخاب یک تابع لیاپانوف مثبت معین، که مجموعی از تابع لیاپانوف مرحله قبل و متغیرهای جدید است، ورودی های گشتاور به نحوی طراحی می شوند که علاوه بر خطاهای ردیابی، متغیرهای جدید نیز به طور مجانبی به سمت صفر همگرا شوند. فرض می شود این تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۳۵) انتخاب شود.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} (\tilde{v}^2 + \tilde{\omega}^2) \quad (35)$$

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف رابطه (۳۵) در راستای سیستم های (۳۳) و (۳۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & e_1 (-v_d - \tilde{v} + v_r \cos e_3) + e_2 v_r \sin e_3 \\ & + \frac{\sin e_3}{k_2} (\omega_r - \omega_d - \tilde{\omega} - \sigma - \delta) \end{aligned} \quad (36)$$

$$+ \tilde{v} (b_1 u_1 - \dot{v}_d) + \tilde{\omega} (b_2 u_2 - \dot{\omega}_d)$$

$$\alpha = k_{11} + k_{12} e_1^2 \quad (50)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma^2} + k_{21} + k_{22} e_3^2$$

که در آن  $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$  ضرایب ثابت و مثبت هستند. بنابراین طبق روش  $H_\infty$ ، قانون کنترلی  $V_0$  به صورت رابطه (۵۱) حاصل می شود.

$$V_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} R_0^{-1} \left( \frac{\partial W}{\partial e} g_{02} \right)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha e_1 \\ \beta \sin e_3 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

با جایگذاری رابطه (۵۱) در رابطه (۴۱) ورودی های سرعت خطی و سرعت زاویه ای مطلوب به صورت رابطه (۵۲) حاصل می شود.

$$v_d = v_r \cos e_3 + \frac{1}{2} \alpha e_1 \quad (52)$$

$$\omega_d = \omega_r + k_2 e_2 v_r + \frac{1}{2} \frac{\beta}{k_2} \sin e_3$$

در گام دوم طراحی مشابه بخش ۴ مقاله، یک متغیر جدید به صورت اختلاف سرعت های واقعی و سرعت های مطلوب به صورت رابطه (۳۱) تعریف می شود. با انتخاب تابع لیاپانوف رابطه (۳۵) و با جایگذاری  $v_d$  و  $\omega_d$  از رابطه (۵۲)، مشتق آن در راستای سیستم های (۳۳) و (۳۴) به صورت رابطه (۵۳) حاصل می شود.

$$\dot{V}_2 = e_1 \left( -\frac{1}{2} \alpha e_1 \right) + \frac{\sin e_3}{k_2} \left( -\frac{1}{2} \beta \sin e_3 - \sigma - \dot{\delta} \right) + \tilde{v} (b_1 u_1 - \dot{v}_d - e_1) + \tilde{\omega} (b_2 u_2 - \dot{\omega}_d - \frac{\sin e_3}{k_2}) \quad (53)$$

در این حالت  $u_1$  و  $u_2$  به صورت رابطه (۵۴) انتخاب می شوند.

$$u_1 = \frac{1}{b_1} (\dot{v}_d + e_1 + u_{01}) \quad (54)$$

$$u_2 = \frac{1}{b_2} (\dot{\omega}_d + \frac{\sin e_3}{k_2} + u_{02})$$

که در آن  $u_{01}$  و  $u_{02}$  سیگنال های پایدارسازی هستند که با استفاده از روش  $H_\infty$  غیرخطی طراحی می شوند. سپس با توجه به رابطه (۵۳) و جایگذاری رابطه (۵۴) در آن، یک سیستم مجازی به صورت رابطه (۵۵) تعریف می شود.

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (\sigma + \dot{\delta}) + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{g_{0a}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}}_{V_0} \quad (43)$$

$$\equiv F_0 + g_{01} d_0 + g_{02} V_0$$

که در آن،  $F_0 \equiv 0$ . بنابراین با انتخاب یک تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۴۴) برای سیستم مجازی (۴۳) به صورت زیر:

$$W = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{k_2} (1 - \cos e_3) \quad (44)$$

مشتق این تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۴۵) حاصل می شود.

$$\dot{W} = -e_1 v_0 - \frac{\sin e_3}{k_2} (\omega_0 + \sigma + \dot{\delta}) \quad (45)$$

که با رابطه (۴۲) برابر است. در ادامه، هدف آن است که سیستم مجازی (۴۳) از طریق ورودی کنترل  $V_0$  به وسیله معیار کنترل  $H_\infty$  غیرخطی پایدار شود، جایی که  $d_0 = \sigma + \dot{\delta}$  به عنوان اغتشاش در نظر گرفته می شود. برای دستیابی به این هدف، معادله  $HJI$  مربوطه، به صورت رابطه (۴۶) تشکیل می شود.

$$\frac{\partial W}{\partial e} F_0 + \frac{1}{4} \frac{\partial W}{\partial e} \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_{01} g_{01}^T - g_{02} R_0^{-1} g_{02}^T \right] \frac{\partial^T W}{\partial e} + q_0 = 0 \quad (46)$$

با توجه به اینکه معادله  $HJI$  حل تحلیلی بسته ندارد، در این روش، ایده کنترل بهینه معکوس به کار گرفته می شود. به این ترتیب که با انتخاب یک تابع لیاپانوف (مانند معادله (۴۴))، ماتریس مثبت معین و متقارن  $R_0$ ، تابع مثبت  $q_0$  و ثابت مثبت  $\gamma$  به نحوی پیدا می شوند که در رابطه (۴۶) صدق کنند. بنابراین با انتخاب  $R_0^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  و جایگذاری  $F_0, g_{01}, g_{02}$  و  $\frac{\partial W}{\partial e}$  در رابطه (۴۶) داریم:

$$\frac{1}{4\gamma^2} \frac{\sin^2 e_3}{k_2^2} - \frac{1}{4} \alpha e_1^2 - \frac{1}{4} \frac{\beta}{k_2^2} \sin^2 e_3 + q_0 = 0 \quad (47)$$

در این صورت،  $\alpha, \beta$  و  $q_0$  باید به نحوی تعیین شوند که رابطه (۴۷) به ازای ماتریس مثبت معین  $R_0^{-1}$  و تابع مثبت  $q_0$  برقرار شود. بنابراین داریم:

$$q_0 = \frac{1}{4} \alpha e_1^2 + \frac{1}{4k_2^2} \sin^2 e_3 \left( \beta - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (48)$$

به منظور مثبت شدن تابع  $q_0$ ، باید شرط زیر برقرار شود:

$$\alpha > 0, \beta > \frac{1}{\gamma^2} \quad (49)$$

یکی از انتخاب های ممکن برای  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت زیر است:



$$\alpha, \alpha_1, \beta_1 > 0$$

$$\beta > \frac{1}{2\gamma^2} \quad (60)$$

در این حالت طبق روش  $H_\infty$  غیرخطی، قانون‌های کنترلی  $u_{01}$  و  $u_{02}$  به صورت رابطه (۶۱) طراحی می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \tilde{v} \\ \beta_1 \tilde{\omega} \end{pmatrix} \quad (61)$$

بنابراین قانون کنترلی رابطه (۵۴) به صورت رابطه (۶۲) تبدیل می‌شود.

$$u_1 = \frac{1}{b_1} (\dot{v}_d + e_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \tilde{v})$$

$$u_2 = \frac{1}{b_2} (\dot{\omega}_d + \frac{\sin e_3}{k_2} - \frac{1}{2} \beta_1 \tilde{\omega}) \quad (62)$$

### ۶- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری، برای یک روبات متحرک غیرهولونومیک در حضور لغزش جانبی با استفاده از دو روش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی مقایسه می‌شود. پارامترهای دینامیکی روبات شامل جرم، ممان اینرسی، شعاع چرخ‌ها و فاصله محور چرخ‌های عقب در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول ۱: مقادیر مربوط به پارامترهای دینامیکی روبات

مقادیر	پارامترهای دینامیکی روبات
۲(kg)	جرم (m)
۰/۱۸(kgm <sup>2</sup> )	ممان اینرسی (I)
۰/۳(m)	شعاع چرخ‌ها (r)
۰/۵(m)	فاصله محور چرخ‌های عقب (2l)

نتایج شبیه‌سازی برای مسیر مرجع دایره‌ای در شکل (۴) نشان داده شده است. شکل (۴-الف) و (۴-ب) به ترتیب مقایسه مسیر طی شده توسط روبات مرجع و روبات تحت کنترل را با استفاده از روش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی را نشان می‌دهد. در این شکل، خط توپر مسیر مرجع  $(q, (t))$  و خط چین مسیر روبات تحت کنترل  $(q(t))$  را نشان می‌دهد. در این شبیه‌سازی، مقادیر اولیه حالت‌های روبات تحت کنترل به صورت  $q(0) = [x(0), y(0), \varphi(0)]^T = [5, 5, 1]^T$  انتخاب شده است. همچنین یک لغزش به شکل یک پالس و به مقدار ۶۰ درجه در لحظه ۱۰ ثانیه اتفاق افتاده است که کنترل کننده‌های طراحی شده به خوبی توانسته‌اند روبات را به مسیر اولیه خود بازگردانند. همچنین شکل (۴) نشان می‌دهد که طراحی به روش بازطراحی لیاپانوفی نسبت به  $H_\infty$  غیرخطی در برابر لغزش مقاوم‌تر است.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \alpha e_1 \\ -\frac{1}{2k_2} \beta \sin e_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{F_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{s_{11}} (\sigma + \delta) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{s_{12}} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} \quad (55)$$

اکنون فرض می‌شود یک تابع لیاپانوف مثبت معین به صورت رابطه (۵۶) انتخاب شود.

$$W_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{k_2} (1 - \cos e_3) + \frac{1}{2} (\tilde{v}^2 + \tilde{\omega}^2) \quad (56)$$

در این حالت می‌توان معادله  $H_{II}$  مربوطه را به صورت رابطه (۵۷) تشکیل داد.

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} F_1 + \frac{1}{4} \frac{\partial W_1}{\partial x} \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_{11} g_{11}^T - g_{12} R_1^{-1} g_{12}^T \right] \frac{\partial^T W_1}{\partial x} + q_1 = 0 \quad (57)$$

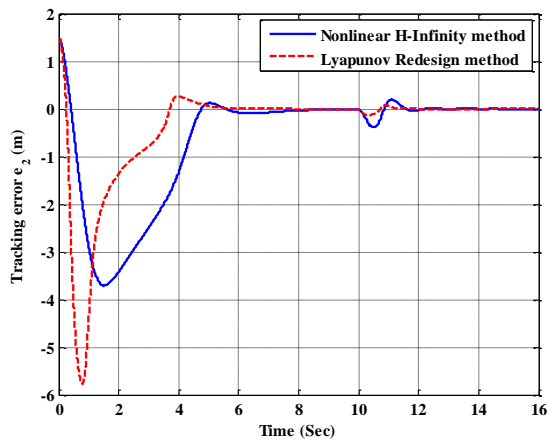
مشابه طراحی کنترل کننده مجازی، ایده کنترل بهینه معکوس به کار گرفته شده و یک ماتریس مثبت معین و متقارن  $R_1$ ، یک تابع مثبت  $q_1$  و یک ثابت مثبت  $\gamma$  از حل رابطه (۵۵) حاصل خواهد شد. بنابراین با انتخاب  $R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$  و جایگذاری  $F_1$ ،  $g_{11}$ ،  $g_{12}$  و در آن، رابطه (۵۷) به صورت رابطه (۵۸) بازنویسی می‌شود.

$$-\frac{1}{2} \alpha e_1^2 - \frac{1}{2k_2} \beta \sin^2 e_3 + \frac{1}{4\gamma^2 k_2^2} \sin^2 e_3 - \frac{1}{4} (\alpha_1 \tilde{v}^2 + \beta_1 \tilde{\omega}^2) + q_1 = 0 \quad (58)$$

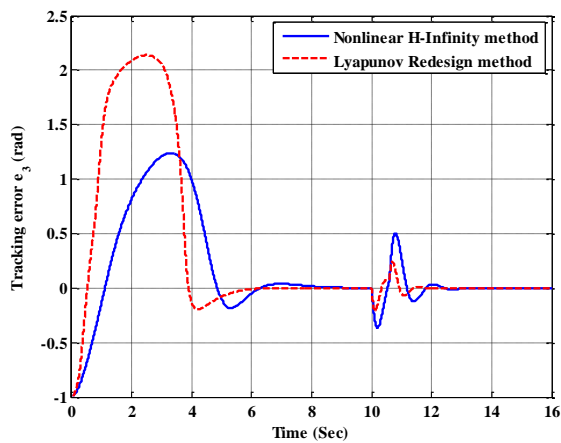
در این صورت،  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\alpha_1$  و  $\beta_1$  باید به نحوی تعیین شوند که رابطه (۵۸) به ازای ماتریس مثبت معین  $R_1^{-1}$  و تابع مثبت  $q_1$  برقرار شود. بنابراین داریم:

$$q_1 = \frac{1}{2} \alpha e_1^2 + \frac{\sin^2 e_3}{2k_2^2} \left( \beta - \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{1}{4} (\alpha_1 \tilde{v}^2 + \beta_1 \tilde{\omega}^2) \quad (59)$$

به منظور مثبت شدن  $q_1$ ، باید شرط زیر برقرار شود:

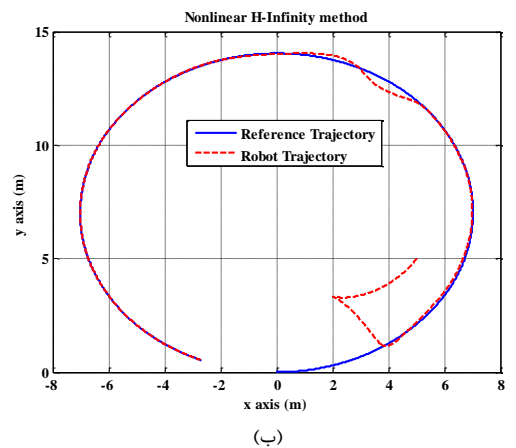
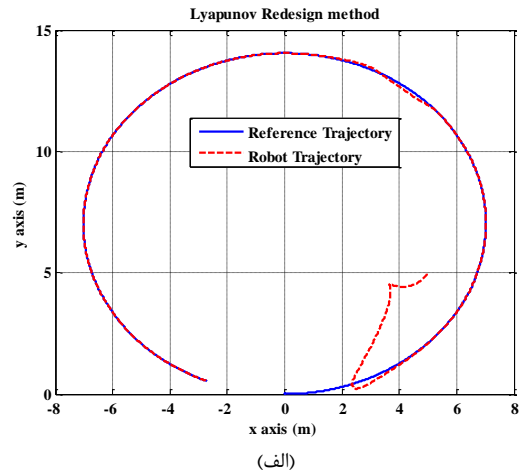


شکل ۶: مقایسه خطای ردیابی  $e_2$  در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی



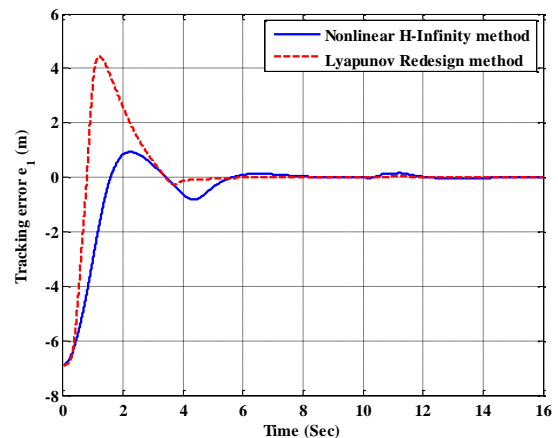
شکل ۷: مقایسه خطای ردیابی  $e_3$  در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی

همان‌طور که در شکل‌های (۷-۵) مشاهده می‌شود، خطاهای ردیابی در روش بازطراحی لیاپانوفی نسبت به  $H_\infty$  غیرخطی سریع‌تر همگرا شده و در برابر لغزش مقاوم‌تر است اما دارای فرجهش<sup>۱۱</sup> و فروجهش<sup>۱۱</sup> بیشتری است. از طرفی با طراحی سیستم کنترل مجازی و تعریف خطاهای  $\tilde{v}$  و  $\tilde{\omega}$ ، با همگرا شدن  $\tilde{v}$  و  $\tilde{\omega}$  به سمت صفر، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای روبات تحت کنترل به سمت سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مطلوب  $(v_d, \omega_d)$  همگرا می‌شوند. شکل‌های (۸) و (۹) خطاهای سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای  $(\tilde{v}, \tilde{\omega})$  را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطاهای سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای نیز در روش بازطراحی لیاپانوفی عملکرد بهتری دارند و در برابر لغزش مقاوم‌تر هستند.

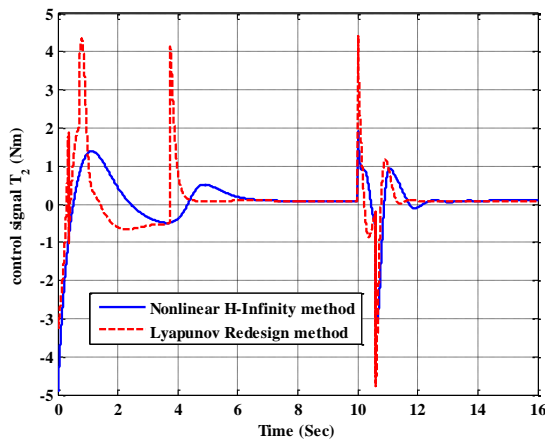


شکل ۴: مقایسه مسیر طی شده توسط روبات مرجع (خط توپر) و روبات واقعی (خط چین) با استفاده از (الف) روش بازطراحی لیاپانوفی و (ب) روش  $H_\infty$  غیرخطی

شکل‌های (۷-۵)، نیز خطاهای ردیابی  $e_1$  تا  $e_3$  را برای هر دو روش نشان می‌دهند. با توجه به اینکه خطای ردیابی به صورت  $e = T(q_r(t) - q(t))$  تعریف شده بود و با توجه به اینکه ماتریس انتقال دوران  $T$  یک ماتریس ناویژه است، همگرا شدن  $e_1$  تا  $e_3$  به سمت صفر، منجر به همگرا شدن  $q(t)$  به سمت  $q_r(t)$  می‌شود.



شکل ۵: مقایسه خطای ردیابی  $e_1$  در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی



شکل ۱۱: مقایسه سیگنال کنترلی دوم ( $\tau_2$ ) در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی

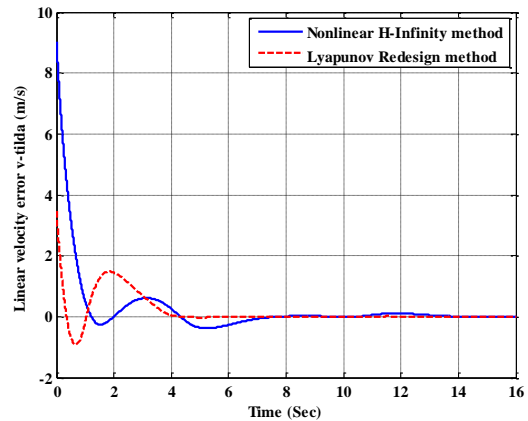
همان طور که مشاهده می شود در روش بازطراحی لیاپانوفی سیگنال کنترلی به دلیل وجود ترم ناپیوسته تابع علامت دچار ناپیوستگی شده است. درحالی که سیگنال کنترلی در روش  $H_\infty$  غیرخطی هموارتر است. از طرفی روش بازطراحی لیاپانوفی در برابر لغزش مقاوم تر است و همچنین خطاهای ردیابی سریع تر به مقدار صفر همگرا می شوند.

### ۷- نتیجه

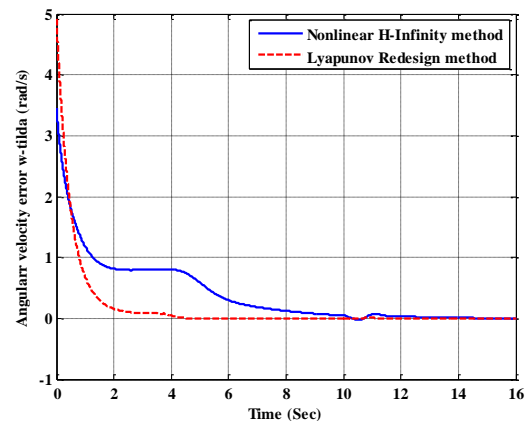
در این مقاله، دو کنترل کننده ردیابی مقاوم بر اساس روش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی برای یک روبات متحرک غیرهولونومیک در حضور لغزش جانبی طراحی شد. کنترل کننده های پیشنهادی بدون استفاده از هیچ نوع تخمین گر و سنسوری و تنها با استفاده از یک روش مقاوم توانسته اند لغزش جانبی را مهار کنند. با توجه به ردیابی بودن مسئله مورد نظر، تغییر مختصات کانایاما به نحوی تعریف شد که اغتشاشات موجود در مدل به صورت سازگار با ورودی تبدیل شدند. در روش  $H_\infty$  غیرخطی به حل معادله  $HJI$  رسیدیم و چون این معادله حل تحلیلی بسته نداشت، ایده کنترل بهینه معکوس به کار گرفته شد. شبیه سازی های انجام شده، کارایی کنترل کننده های پیشنهادی را در برابر لغزش جانبی و پایداری مجانبی خطاهای ردیابی و خطاهای سرعت خطی و سرعت زاویه ای را نشان داد. همچنین توسط مقایسه انجام شده، نشان داده شد که روش بازطراحی لیاپانوفی دارای عملکرد ردیابی بهتر و در برابر لغزش مقاوم تر است.

### مراجع

- [1] F. Pourboghraat and M. P. Karlsson, "Adaptive control of dynamic mobile robots with nonholonomic constraints," Computers & Electrical Engineering, vol. 28, no. 4, pp. 241-253, 2002.
- [2] K. D. Do, "Bounded controllers for global path tracking control of unicycle-type mobile robots," Robotics and Autonomous Systems, vol. 61, no. 8, pp. 775-784, 2013.
- [3] J.-M. Yang and J.-H. Kim, "Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots" IEEE

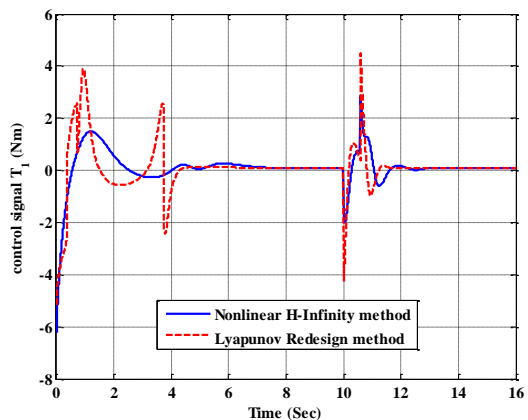


شکل ۸: مقایسه خطای سرعت خطی ( $\tilde{v} = v - v_d$ ) در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی



شکل ۹: مقایسه خطای سرعت زاویه ای ( $\tilde{w} = w - w_d$ ) در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی

سیگنال های کنترلی طراحی شده با استفاده از روش های پیشنهاد شده در این مقاله در شکل های (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. با توجه به اینکه  $u_1 = \tau_1 + \tau_2$  و  $u_2 = \tau_1 - \tau_2$  است، در شبیه سازی ها گشتاورهای  $\tau_1$  و  $\tau_2$  رسم شده اند.



شکل ۱۰: مقایسه سیگنال کنترلی اول ( $\tau_1$ ) در دوروش بازطراحی لیاپانوفی و  $H_\infty$  غیرخطی

- Transactions on Robotics and Automation, vol. 15, no. 3, pp. 578–587, 1999.
- [4] D. Chwa, J. H. Seo, P. Kim, and J.-Y. Choi, “Sliding mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots,” in American Control Conference, vol. 5, pp. 3991–3996, 2002.
- [5] D. Chwa, “Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates,” IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 12, no. 4, pp. 637–644, 2004.
- [6] Y. Miyasato, “Adaptive  $H_\infty$  control of nonholonomic mobile robot based on inverse optimality,” in American Control Conference, pp. 3524–3529, 2008.
- [7] Y. Li, Z. Wang and L. Zhu, “Adaptive neural network PID sliding mode dynamic control of nonholonomic mobile robot,” IEEE International Conference on Information and Automation, pp. 753–757, 2010.
- [8] D. Wang and C. B. Low, “Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: control design perspective,” IEEE Transactions on Robotics, vol. 24, no. 3, pp. 676–687, 2008.
- [9] B. Zhou, Y. Peng, and J. Han, “UKF based estimation and tracking control of nonholonomic mobile robots with slipping,” IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, pp. 2058–2063, 2007.
- [10] C. B. Low and D. Wang, “GPS-based tracking control for a car-like wheeled mobile robot with skidding and slipping,” IEEE A/SME Transactions On Mechatronics, vol. 13, no. 4, pp. 480–484, 2008.
- [11] A. Tarakameh, K. Shojaei, and A. M. Shahri, “Adaptive control of nonholonomic wheeled mobile robot in presence of lateral slip and dynamic uncertainties,” Iranian Conference on Electrical Engineering, pp. 592–598, 2010.
- [12] S. J. Yoo, “Adaptive neural tracking and obstacle avoidance of uncertain mobile robots with unknown skidding and slipping,” Information Sciences, vol. 238, pp. 176–189, 2013.
- [13] J. Taheri-Kalani and M. J. Khosrowjerdi, “Adaptive trajectory tracking control of wheeled mobile robots with disturbance observer,” International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 28, no. 1, pp. 14–27, 2014.
- [14] E.-J. Hwang, H.-S. Kang, C.-H. Hyun, and M. Park, “Robust Backstepping Control Based on a Lyapunov Redesign for Skid-Steered Wheeled Mobile Robots,” International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 10, 2013.
- [15] T.-Y. Wang and C.-C. Tsai, “Adaptive Robust Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots,” in 16th IFAC World Congress, 2005.
- [16] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, and T. Noguchi, “A stable tracking control method for an autonomous mobile robot,” IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990, pp. 384–389.
- [17] Z.-P. JIANGdagger and H. Nijmeijer, “Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping,” Automatica, vol. 33, no. 7, pp. 1393–1399, 1997.
- [18] R. Fierro and F. L. Lewis, “Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics,” IEEE Conference on Decision and Control, 1995, vol. 4, pp. 3805–3810.
- [19] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. vol. 199, no. 1. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.
- [20] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. 3<sup>rd</sup> edition, Upper Saddle River: Prentice hall, 2002.

زیر نویس ها

- <sup>1</sup> Matched
- <sup>2</sup> Backstepping
- <sup>3</sup> Bounded
- <sup>4</sup> Inverse optimality
- <sup>5</sup> Unscented Kalman Filter
- <sup>6</sup> Global positioning system
- <sup>7</sup> Model based
- <sup>8</sup> Kanayama
- <sup>9</sup> Bralbat
- <sup>10</sup> Overshoot
- <sup>11</sup> Undershoot