

طراحی کنترل کننده پیش بین مقاوم با استفاده از نامساوی های ماتریسی خطی برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره

فاطمه پیروزمند^۱، دانشجوی کارشناسی ارشد، نعمت... قهرمانی^۲، دانشیار، محمدرضا عاروان^۳، دانشیار
 ۱- دانشگاه آزاد اسلامی - واحد علوم و تحقیقات - بروجرد - ایران - pirouzmand.f@gmail.com
 ۲- مجتمع برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی مالک اشتر - تهران - ایران - ghahramani@aut.ac.ir
 ۳- مجتمع برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی مالک اشتر - تهران - ایران - arvan@mut.ac.ir

چکیده: در این مقاله یک «کنترل کننده پیش بین مقاوم (RMPC)^۱» بهبود یافته بر مبنای «سیستم تطبیقی مدل مرجع (MRAS)^۲» ارائه شده است. در این الگوریتم از تلفیق سیستم تطبیقی مدل مرجع و کنترل کننده پیش بین مقاوم یک کنترل کننده پیش بین مقاوم بهبود یافته با عنوان «کنترل کننده پیش بین مقاوم ترکیبی (CRMPC)^۳» برای سیستم ماهواره سه درجه آزادی طراحی شده است به گونه ای که سیستم حلقه بسته در مقابل نامعینی ممان اینرسی و اغتشاش خارجی مقاوم باشد. قانون کنترل به صورت فیدبک حالتی است که بهره آن از حل یک مسئله بهینه سازی محدب تحت چندین نامساوی ماتریسی خطی به دست می آید. برای اجتناب از اشباع عملگرها یک نامساوی ماتریسی خطی در مسئله بهینه سازی مذکور تلفیق می شود. از مزایای کنترل کننده ترکیبی حاصل می توان به عدم ضرورت اطلاع دقیق از مدل سیستم، مقاومت در مقابل اغتشاش خارجی و مفادیر بالای نامعینی اشاره نمود. روش حاضر با روش «کنترل پیش بین تفاضلی تعمیم یافته (GIPC)^۴» مقایسه شده است. نتایج حاصل از شبیه سازی نشان می دهند که کنترل کننده پیشنهادی حاضر از رفتار مقاومتری برخوردار است.

واژه های کلیدی: کنترل کننده پیش بین مقاوم، نامساوی ماتریسی خطی، سیستم تطبیقی مدل مرجع، سیستم کنترل وضعیت ماهواره.

Robust Predictive Controller design using LMI for Satellite Attitude Control System

F. Pirouzmand¹, N. Ghahramani², M.R. Arvan³

1- Department of Control Engineering, Science and research Branch, Islamic Azad University, Boroujerd, Iran,

2, 3- Department of Control Engineering, Malek ashtar University of Technology, Tehran, Iran,

Abstract: In this paper, a robust model predictive control (RMPC) is proposed based on model reference adaptive system (MRAS). In this algorithm, using the MRAS a combinational RMPC controller, which is called CRMPC, for three degree freedom satellite is designed such that the effect of moment of inertia uncertainty and external disturbance is compensated on the stability and performance of closed loop system. Control law is a state feedback which its gain is obtained by solving a convex optimization problem subject to several linear matrix inequalities (LMIs). To avoid the actuators saturation a linear matrix inequality is incorporated as LMI in the mentioned optimization problem. The advantages of this algorithm are needless to exact information from system's model, robustness against model uncertainties and external disturbance. The proposed algorithm is implemented on the satellite attitude control system and the results of them are compared to generalized incremental model predictive control (GIPC) algorithm. The results show that the suggestive controller is more robust than the GIPC method.

Keywords: Robust model predictive control; Linear matrix inequality; Model reference adaptive system; Satellite attitude control system.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۲/۵/۲۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۲/۱۱/۳۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۳/۱۰

نام نویسنده مسئول: فاطمه پیروزمند

نشانی نویسنده مسئول: ایران - بروجرد - بلوار مدرس - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد علوم و تحقیقات - دانشکده مهندسی برق - دپارتمان کنترل.

۱- مقدمه

مقابل لرزش ارائه شده است. در [۱۰] یک کنترل کننده پیش بین واضح برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره طراحی شده است. الگوریتم‌های MPC اگرچه برای کنترل سیستم‌های پیچیده بسیار مناسب است لیکن محاسبات آن برای سیستم‌هایی که مسئله زمان اجرا برای آن‌ها بسیار حائز اهمیت است مناسب به نظر نمی‌رسد. در [۱۱] با بهبود کنترل کننده MPC به لحاظ زمان اجرا، کنترل کننده‌ای برای سیستم نانو ماهواره طراحی شده است که زمان پاسخ آن بسیار مناسب می‌باشد.

در کنترل کننده‌های RMPC مذکور، موضوع دفع اغتشاش کم‌تر مورد توجه قرار گرفته و در مواردی نیز اغتشاش به صورت محدود به سیستم اعمال شده است. در این مقاله، از تلفیق کنترل کننده RMPC روی خط با سیستم MRAS یک کنترل کننده RMPC بهبود یافته با عنوان کنترل کننده CRMPC با وجود نامعینی پارامتری، اغتشاش خارجی و قید ورودی طراحی شده است. سپس کنترل کننده پیشنهادی حاضر برای مدل سه درجه آزادی ماهواره با وجود نامعینی ممان اینرسی، اغتشاش خارجی و قید ورودی فرموله و شبیه‌سازی شده است. مزیت عمده کنترل کننده ترکیبی حاضر نسبت به الگوریتم‌های پیش بین مقاوم مذکور، مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاش است. عملگر مورد نظر از نوع چرخ‌های عکس‌العملی با محدوده ورودی یک نیوتن‌متر است.

این مقاله در شش بخش آماده شده است. پس از مقدمه در بخش دوم مسئله طراحی کنترل کننده RMPC ترکیبی ارائه شده است. در بخش سوم مختصری از روابط ریاضی روش GIPC بیان شده است. در بخش چهارم مدل غیرخطی و خطی شده ماهواره به دست خواهد آمد. در بخش پنجم به شبیه‌سازی الگوریتم RMPC ترکیبی و مقایسه نتایج آن با نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم GIPC پرداخته شده است. در بخش ششم نیز چکیده‌ای از نتایج حاصل بیان شده است. **تبره ۱.** علامت \times بیانگر مقدار متقارن در ماتریس‌ها است.

۲- طراحی کنترل کننده CRMPC

در این قسمت ابتدا فرمولاسیون کنترل کننده RMPC در زیربخش (۱-۲) بیان می‌شود سپس به بررسی مسئله ردیابی در زیربخش (۲-۲) می‌پردازیم و در زیربخش (۳-۲) نیز مسئله دفع اغتشاش و طراحی کنترل کننده CRMPC مطرح می‌شود.

۲-۱- مسئله RMPC

سیستم خطی متغیر با زمانی را به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [A(k) \quad B(k)] &\in \Omega \\ \Omega &= Co\{[A_1 \quad B_1] [A_2 \quad B_2] \dots [A_L \quad B_L]\} \end{aligned} \quad (2)$$

طی سال‌های اخیر، کنترل کننده پیش بین به علت کاربرد فراوان برای سیستم‌های پیچیده، چندمتغیره و مقید، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به‌رغم این مزایا، چون در ساختار کنترل کننده‌های پیش بین کلاسیک به‌وضوح به مسئله نامعینی پرداخته نشده است لذا ممکن است مقاومت و عملکرد سیستم با وجود نامعینی تضمین نشود. از سال ۱۹۹۰ تاکنون پژوهش‌های فراوانی جهت گنجاندن مسئله مقاومت در الگوریتم کنترل پیش بین صورت گرفته است. در [۱] یک کنترل کننده RMPC در قالب قانون کنترل فیدبک حالت پویا برای سیستم‌های خطی نامعین طراحی شده است. این الگوریتم حجم محاسبات بالایی داشته و سرعت اجرای آن کند است. برای افزایش سرعت آن از تلفیق روش جدول بندی بهره با الگوریتم پیش بین مذکور استفاده شده است و حاصل آن الگوریتم‌های RMPC خارج از خط بود. در [۲] یک کنترل کننده RMPC خارج از خط برای سیستم‌هایی با دو نوع نامعینی، نامعینی چندوجهی و نامعینی محدود، در قالب قانون کنترل فیدبک خروجی طراحی شده است. در [۳] یک کنترل کننده RMPC خارج از خط با نواحی کاربردی بزرگ‌تر برای سیستم‌های غیرخطی نامعین طراحی شده است. الگوریتم‌های خارج از خط اگرچه سرعت بالایی دارند لیکن سیگنال کنترل آن‌ها در مقایسه با الگوریتم‌های روی خط از نرمی کم‌تری برخوردار است. در [۴] یک کنترل کننده RMPC خارج از خط برای سیستم‌های خطی با وجود اغتشاش حالت و نویز اندازه‌گیری محدود طراحی شده است. در این مقاله اغتشاش و نویز عضو یک مجموعه محدب در نظر گرفته شده‌اند. در [۵] و [۶] نمونه‌های کاربردی از این الگوریتم‌ها در زمینه کنترل فرآیند بیان شده است. در سایر این الگوریتم‌ها مسئله طراحی کنترل کننده RMPC به صورت کمینه‌سازی یک تابع هزینه با افق بینهایت روی مجموعه‌ای از مدل‌های نامعین بیان شده است. جهت حل این مسئله حد بالایی برای تابع هزینه مذکور در نظر گرفته می‌شود و با کمینه‌سازی آن تحت برخی LMIها که مقاومت سیستم را تضمین می‌کنند یک قانون کنترل فیدبک حالت / فیدبک خروجی به دست می‌آید. هم‌چنین قیود ورودی با استفاده از مفاهیم بیضی‌گون‌های ثابت در قالب LMI در ساختار مسئله بهینه‌سازی فوق گنجانده می‌شوند تا مانع از اشباع عملگرها شوند. در مقالات مذکور به مسئله اغتشاش کم‌تر پرداخته شده است. البته در [۴] اغتشاش و نویز عضو یک مجموعه نامعین فرض شده و این نامعینی‌ها نیز در الگوریتم بهینه‌سازی گنجانده شده‌اند. در [۷] نیز بخش بهینه‌سازی الگوریتم‌های RMPC مراجع قبلی مورد بازنگری قرار گرفته و بهبود یافته است. طی سال‌های اخیر کنترل کننده پیش بین در سایر صنایع از جمله صنایع هوافضا پیشرفت چشم‌گیری یافته است. در [۸] یک کنترل کننده پیش بین برای کنترل فضایی که با تعقیب فضایی هدف در مدار قرار می‌گیرد، طراحی شده است. پرتاب کننده‌ها هنگام پرتاب ماهواره لرزش بسیار بالایی دارند. لذا در [۹] یک کنترل پیش بین برای ایزولاسیون کل ماهواره در

لم ۱ (لم مکمل شور): فرض کنید $Q(x), R(x)$ و $S(x)$ سه تابع ماتریسی هستند که $R(x)$ و $Q(x)$ توابع ماتریسی متقارن و $S(x)$ تابعی خطی از متغیر x است. در این صورت نامساوی‌های زیر برقرار هستند [۱۲]:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \quad (7)$$

$$\begin{cases} R(x) > 0 & Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S^T(x) > 0 \\ Q(x) > 0 & R(x) - S(x)Q(x)^{-1}S^T(x) > 0 \end{cases}$$

برای حل مسئله (۵) در آغاز به یک حد بالا برای مسئله بیشینه‌سازی نیاز داریم که در این مرحله به دست می‌آید. تابع لیاپانوف $V(x) = x^T P x, P = P^T > 0$ را در زمان نمونه‌برداری k در نظر بگیرید که متغیرهای حالت آن همان دینامیک‌های سیستم (۱) هستند. مجموعه چندوجهی به شکل رابطه ۸ را در نظر بگیرید.

$$[A(k+i|k) \quad B(k+i|k)] \in \Omega, i \geq 0 \quad (8)$$

در این صورت نامساوی (۹) که تضمین کننده پایداری مقاوم سیستم (۱) با مجموعه نامعین (۲) است، برقرار می‌باشد [۵].

$$V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) \leq -[x(k+i|k)]^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k) \quad (9)$$

با توجه به تئوری پایداری لیاپانوف می‌دانیم که اگر $x(\infty|k) = 0$ آنگاه $V(x(\infty|k)) = 0$. از مجموع رابطه ۹ از $i = 0$ تا ∞ و با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف داریم:

$$[A(k+i) \quad B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0 \quad j_{\infty} \leq \max V(x(k|k)) \leq \gamma \quad (10)$$

نحوه محاسبه این رابطه در ضمیمه الف به تفصیل بیان شده است. بنابراین حد بالای مقدار $j_{\infty}(k)$ در $[A(k+i) \quad B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0$ در رابطه (۵) است و مسئله (۵) به صورت رابطه (۱۱) ساده می‌شود.

$$\min_{u(k+i|k)=F(k)x(k+i|k)} \gamma \quad (11)$$

در این مرحله هدف یافتن قانون کنترل فیدبک حالتی است که γ را کمینه کند. باید بهره فیدبک حالتی محاسبه شود که این شرایط را فراهم سازد. قضیه ۱ نحوه محاسبه آن را بیان می‌کند.

قضیه ۱: فرض کنید $x(k) = x(k|k)$ حالت سیستم (۱) باشد که در هر زمان نمونه‌برداری محاسبه می‌شود و Ω نیز مجموعه نامعینی پارامتری مطابق رابطه (۲) است. هم‌چنین فرض کنید هیچ قیدی در ورودی نداشته باشیم. در این صورت ماتریس بهره فیدبک حالت F در قانون کنترل (۶) که مقدار γ در رابطه (۱۱) را کمینه می‌کند در هر زمان نمونه‌برداری k به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = YQ^{-1} \quad (12)$$

که $Q > 0$ و Y از حل مسئله بهینه‌سازی (۱۳) تحت LMI‌های (۱۴) و (۱۵) محاسبه می‌شوند.

که $x \in R^{nm}, u \in R^{nu}, y \in R^{ny}$ به ترتیب متغیرهای سیستم، ورودی کنترل و خروجی سیستم هستند. Ω مجموعه‌ای از پیش تعیین شده است که نامعینی‌های سیستم را در بر می‌گیرد. Co بیانگر مجموعه فضا محدب^۵ است. یعنی اگر $[A \ B] \in \Omega$ باشد، آنگاه برای برخی از $0 < \alpha_i < 1$ داریم:

$$[A \ B] = \sum_{i=0}^L \alpha_i [A_i \ B_i] \quad (3)$$

فرض: فرض کنید جفت (A, B) در رابطه (۱) با استفاده از قانون کنترل فیدبک حالت پایدارپذیر باشد. یعنی یک ماتریس F موجود است که ماتریس $A + BF$ را پایدار می‌کند.

فرض کنید $x(k+i|k)$ و $u(k+i|k)$ به ترتیب حالت‌ها و ورودی‌های کنترل سیستم در زمان k باشند. تابع هزینه مرتبه ۲ زیر را در نظر بگیرید:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [x(k+i|k)]^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k) \quad (4)$$

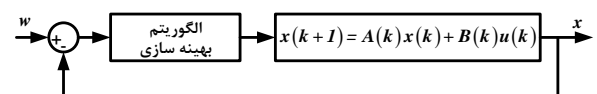
که k بیانگر زمان جاری است. ماتریس‌های وزنی R و Q_1 نیز ماتریس‌های مثبت معین و متقارن هستند که برای وزن‌دهی ورودی کنترل و حالت‌های سیستم استفاده می‌شوند. هدف محاسبه دنباله‌ای از سیگنال‌های کنترل بهینه به صورت $u(k|k), u(k+1|k), \dots$ است که بیش‌ترین مقدار تابع هزینه $J(k)$ را تحت مجموعه‌ای از مدل‌های نامعین کمینه کند. فرمولاسیون قانون کنترل پیش‌بین مقاوم مطابق رابطه (۵) است:

$$\min_{u(k+i|k), i=0,1,\dots,m} [A(k+i|k) \quad B(k+i|k)] \in \Omega, i \geq 0 \quad J(k) \quad (5)$$

فرض کنید قانون کنترل فیدبک حالت متغیر با زمان به صورت زیر باشد:

$$u(k+i|k) = F_k x(k+i|k) \quad (6)$$

در این صورت سیستم حلقه بسته مطابق شکل (۱) خواهد بود.



شکل (۱): دیاگرام بلوکی روش RMPC

مسئله کمینه‌سازی-بیشینه‌سازی رابطه ۵ به سادگی و به صورت مستقیم قابل حل نیست. بدین جهت ابتدا حد بالایی از بیش‌ترین مقدار تابع هزینه، تابع عملکرد مقاوم، به دست می‌آید سپس این حد بالا تحت برخی نامساوی‌های ماتریسی خطی کمینه می‌شود. این مسئله کمینه‌سازی را کمینه‌سازی محدب گویند. حاصل این مسئله مقدار مجهول ماتریس بهره فیدبک حالت خواهد بود و بدین ترتیب قانون کنترل فیدبک حالت به دست می‌آید. در ادامه ابتدا به بیان یک لم مهم می‌پردازیم که در محاسبه LMI‌ها پرکاربرد است. سپس به حل مسئله ۵ و محاسبه بهره فیدبک حالت در رابطه ۶ پرداخته می‌شود.

برای تخمین اغتشاش از سیستم MRAS روی خط استفاده شده است. عملکرد کلی سیستم کنترل بدین صورت خواهد بود که ابتدا مدل مرجعی از سیستم که به ورودی پاسخ مطلوب می‌دهد انتخاب می‌شود. سپس اغتشاش ورودی توسط سیستم تطبیقی تخمین زده شده و سیگنال کنترل چنان تنظیم می‌گردد که اثر اغتشاش بر سیستم جبران شود. آنچه حائز اهمیت است بخش مکانیسم تنظیم سیستم است که سیگنال کنترل را بر اساس خطا بین خروجی سیستم y و خروجی مدل مرجع y_m تنظیم می‌کند. این قسمت باید چنان طراحی گردد که خطای مذکور به حداقل رسیده و سیستم پایدار گردد. در ادامه با استفاده از قاعده MIT پارامتر تنظیم به دست می‌آید.

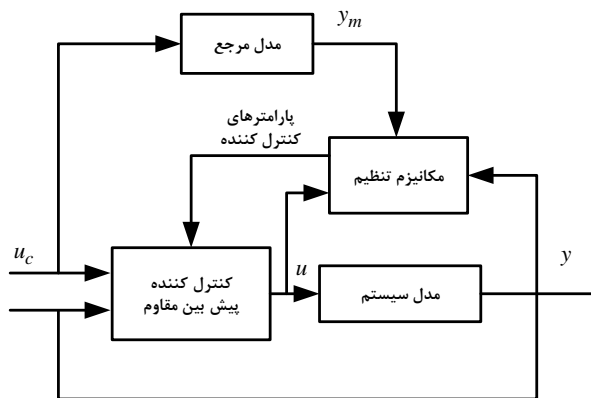
لم ۳ (قاعده MIT) [۱۳]: سیستم حلقه بسته‌ای در نظر بگیرید که کنترل کننده آن دارای یک پارامتر قابل تنظیم θ است. فرض کنید y_m, y و e به ترتیب خروجی سیستم، خروجی مدل مرجع و خطای ناشی از اختلاف بین آن‌ها است. یک روش برای تنظیم پارامتر کنترل کننده کمینه کردن تابع هزینه‌ای به صورت رابطه ۱۸ است.

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (18)$$

برای کوچک کردن J پارامترها را در جهت گرادیان منفی آن تغییر می‌دهیم. داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (19)$$

شکل (۲) دیاگرام سیستم حلقه بسته اصلاح شده را نمایش می‌دهد.



شکل (۲): دیاگرام بلوکی کنترل کننده RMPC و سیستم تطبیقی مدل مرجع

۳- الگوریتم کنترل پیش بین تفاضلی تعمیم یافته (GIPC)

در این قسمت مختصری در مورد الگوریتم GIPC توضیح داده می‌شود. این روش در مرجع [۱۵] به صورت کامل توضیح داده شده است. در مدل سازی فضای حالت کنترل کننده پیش بین استاندارد از حالت های جاری برای پیش بینی های آینده استفاده می شود لیکن در الگوریتم GIPC از حالت های جاری و گذشته جهت پیش بینی

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, Q > 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ A_j Q + B_j Y & Q & * & * \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, \dots, L \quad (15)$$

اثبات این قضیه در ضمیمه ب پیوست شده است.

تبصره ۲: به لحاظ عملی، کنترل کننده باید به گونه ای طراحی شود که عملگرها وارد ناحیه اشباع نشوند. برای جلوگیری از این مشکل می توان محدوده کاربردی عملگر را مطابق رابطه (۱۶) در قالب قید ورودی در ساختار مسئله بهینه سازی فوق گنجانند [۱].

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & * \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

لم ۲. (امکان پذیری): هر حل موجود از مسئله بهینه سازی قضیه ۱ در زمان k برای سایر زمان های $t > k$ نیز موجود است.

اثبات این لم در [۱] بیان شده است.

قضیه ۲: قانون کنترل فیدبک حالت افق بازگشتی موجود که از قضیه یک حاصل می شود، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را تضمین می کند.

اثبات این قضیه در [۱] بیان شده است.

۲-۲- مسئله ردیابی

فرض کنید که هدف، ردیابی مسیر مرجع $y_r = Cx_r$ باشد. در این صورت تابع هزینه به صورت زیر تغییر می کند.

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [Cx(k+i|k) - Cx_r(k+i|k)]^T \times Q_1 [Cx(k+i|k) - Cx_r(k+i|k)] + [u^T(k+i|k)Ru(k+i|k)] \quad (17)$$

با در نظر گرفتن ماتریس وزنه و حالت های جدید سیستم مطابق (۱۷) به رابطه (۴) تبدیل شده و با حفظ عمومیت مسئله قانون کنترل از رابطه $u(k+i|k) = FX(k+i|k)$ به دست می آید.

۳-۲- دفع اغتشاش

در حالت کلی، قانون کنترل فیدبک حالت در اغلب موارد قابلیت دفع اغتشاش را ندارد و کنترل کننده RMPC حاضر نیز از این قاعده مستثنا نیست حال آنکه پدیده اغتشاش امری انکارناپذیر است. برای حل این مشکل در این زیربخش کنترل کننده CRMPC ارائه می شود. بدنه اصلی کنترل کننده همان الگوریتم RMPC پیشین است لیکن

حالت‌های آینده سیستم استفاده می‌شود. بنابراین حل بهینه شامل اختلاف وزندهی شده حالت‌های جاری و گذشته و نیز مجموع سیگنال‌های کنترلی تفاضلی، Δu ، می‌شود. مدل فضای حالت خطی شده سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (20)$$

$$y(k+1) = Cx(k+1)$$

جاییکه $x \in R^n$ ، $u \in R$ و $y \in R$ بیانگر حالت‌ها، ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم هستند. هم‌چنین ماتریس $A \in R^{n \times n}$ ، $B \in R^n$ و $C \in R^n$ ماتریس‌های سیستم هستند. شکل تفاضلی حالت‌های پیش‌بینی شده سیستم به صورت زیر است:

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k) \quad (21)$$

که در آن:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1), \quad (22)$$

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1), \quad (23)$$

$$\Delta x(k+1) = x(k+1) - x(k). \quad (24)$$

مسئله طراحی کنترل کننده GIPC به صورت کمینه کردن تابع هزینه ۲۵ است:

$$V = \frac{1}{2} \Delta u_{k-1}^T H \Delta u_{k-1} + b \Delta u_{k-1} + f \quad (25)$$

قیدهای مسئله عبارتند از:

$$M \Delta u_{k-1} \leq N \quad (27)$$

$$\Delta u(k+i) = 0; n_u, \dots, n_y = 0$$

سایر پارامترها عبارتند از: n_y افق پیش‌بین، n_u افق کنترل، است.

$$M = \begin{bmatrix} T \\ -T \\ I \\ -I \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} \bar{1}u_{\max} - u(k-1)\bar{1} \\ \bar{1}u_{\min} + u(k-1)\bar{1} \\ \bar{1}du_{\max} \\ -\bar{1}du_{\min} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$H = 2(H_y^T H_y + R) \quad (29)$$

$$b = -2(w - P_{y0}x(k)) + P_{y1}x(k-1)^T H_y \quad (30)$$

$$f = (\bar{w}_k - P_{y0}x(k) + P_{y1}x(k-1))^T \times (\bar{w}_k - P_{y0}x(k) + P_{y1}x(k-1)) \quad (31)$$

u_{\max} و u_{\min} کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار سیگنال کنترل‌اند. du_{\max} و du_{\min} مشخص‌کننده کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار سرعت سیگنال کنترل هستند. که در آن برداری واحد با بعد n_u است. T ماتریسی پایین‌مثلثی با درایه‌های واحد و بعد $n_u \times n_u$ است. $\bar{w}_k = [w(k+1), w(k+2), \dots, w(k+n_y)]^T$ نیز بیانگر مسیر مرجع و $R = rI$ ماتریس وزنی سیگنال کنترل است. مقادیر

$$\bar{y}_k = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ y(k+3) \\ \vdots \\ y(k+n_y) \end{bmatrix}, \Delta \bar{u}_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+n_u-1) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$H_y = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ C(A+I)B & CB & 0 & \vdots & 0 \\ C(A^2+A+I)B & C(A+I)B & CB & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ C \left(\sum_{i=0}^{n_y-1} A^i \right) B & C \left(\sum_{i=0}^{n_y-2} A^i \right) B & \vdots & \vdots & CB \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$P_{y0} = \begin{bmatrix} C(A+I) \\ C(A^2+A+I) \\ C(A^3+A^2+A+I) \\ \vdots \\ C \left(\sum_{i=0}^{n_y} A^i \right) \end{bmatrix}, P_{y1} = \begin{bmatrix} CA \\ C(A^2+A) \\ C(A^3+A^2+A) \\ \vdots \\ C \left(\sum_{i=0}^{n_y} A^i \right) \end{bmatrix} \quad (34)$$

از حل این مسئله کمینه‌سازی یک دنباله کنترلی به صورت $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+h_c-1)$ به دست می‌آید که فقط اولین درایه آن به سیستم اعمال شده و در زمان نمونه‌برداری بعد مجدداً فرایند بهینه‌سازی تکرار می‌گردد. چون در این الگوریتم از اختلاف حالت‌های لحظه جاری و گذشته استفاده می‌شود لذا مقاومت کنترل کننده افزایش می‌یابد.

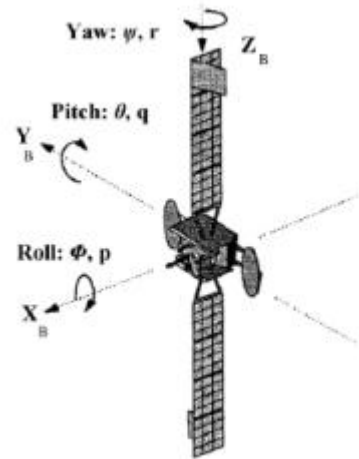
۴- مدل سه درجه آزادی ماهواره

در این قسمت مدل سه درجه آزادی ماهواره به دست می‌آید. در شکل (۳) مدل یک میکروماهواره مشخص شده است [۱۴].

محورهای X_B ، Y_B و Z_B محورهای بدنی نام دارند که به بدنه ماهواره چسبیده و مبدأ آن‌ها مرکز جرمی ماهواره است. پارامترهای p ، q و r سرعت ماهواره حول هریک از محورهای مذکور را نمایش می‌دهند. پارامترهای φ ، θ و ψ نیز بیانگر میزان حرکت وضعی ماهواره حول هر محور مختصات هستند و زوایای اویلر نام دارند.

جدول (۱): مقادیر اولیه پارامترهای سیستم ماهواره [۱۲]

نام پارامترها	توصیف پارامترها	مقدار
I_{xx}	ممان اینرسی در راستای محور x	$۱/۹۲۸\text{kgm}^2$
I_{yy}	ممان اینرسی در راستای محور y	$۱/۹۲۸\text{kgm}^2$
I_{zz}	ممان اینرسی در راستای محور z	$۴/۹۵۳\text{kgm}^2$
M_x, M_y, M_z	گشتاورهای ورودی ماهواره	حداکثر ۱ نیوتن متر
ϕ_0	مقدار اولیه زاویه رول (غلت)	$۰/۳۶۲\text{rad}$
θ_0	مقدار اولیه زاویه پیچ (خمش)	$۰/۵۲۴\text{rad}$
ψ_0	مقدار اولیه زاویه یاو (گردش)	$-۰/۲۶۲\text{rad}$
p	سرعت زاویه‌ای بدنه در راستای محور x	صفر rad/s
q	سرعت زاویه‌ای بدنه در راستای محور y	صفر rad/s
r	سرعت زاویه‌ای بدنه در راستای محور z	صفر rad/s



شکل (۳): میکروماهواره و مختصات بدنی [۱۴]

مدل فضای حالت غیرخطی ماهواره‌ای مطابق رابطه ۳۵ است [۱۴].

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_x - qI_{zz}r + rI_{zz}q}{I_{xx}} \\ \frac{M_y - rI_{xx}p + pI_{zz}r}{I_{yy}} \\ \frac{M_z + pI_{xx}q - qI_{yy}p}{I_{zz}} \\ p + \frac{(q \sin \phi + r \cos \phi) \sin \theta}{\cos \theta} \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

که در آن پارامترهای M_x ، M_y و M_z گشتاورهای کنترلی، پارامترهای p ، q و r سرعت زاویه‌ای و مقادیر I_x ، I_y و I_z نیز بیانگر ممان‌های اینرسی ماهواره هستند. سیستم فوق با روش ژاکوبی و با استفاده از مقادیر اولیه در جدول ۱ [۱۴] مطابق روابط ۳۶ و ۳۷ خطی می‌شود.

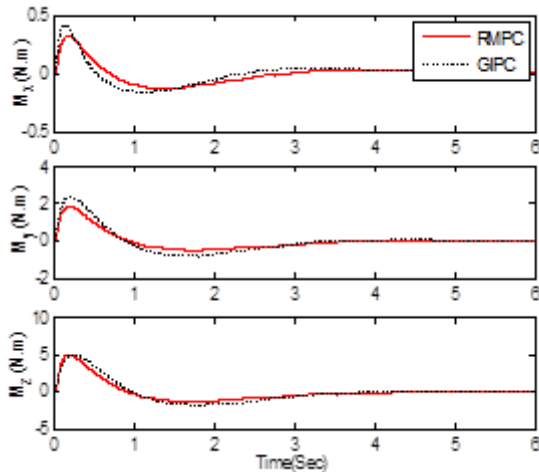
$$A = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

$$B = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

سپس آن را با زمان نمونه‌برداری ۱۰ میلی‌ثانیه گسسته می‌کنیم. در ادامه نتایج پیاده‌سازی دو الگوریتم RMPC و کنترل کننده GIPC بر سیستم ماهواره ارائه شده است.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این قسمت عملکرد دو کنترل کننده RMPC و GIPC ارزیابی می‌شود. نامعینی‌های سیستم که ناشی از خطا در اندازه‌گیری پارامترهای ممان اینرسی هستند را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

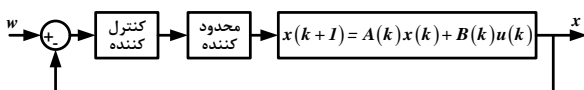


شکل (۴-ب): عملکرد کنترل کننده های RMPC و GIPC بر سیستم کنترل وضعیت ماهواره (تلاش کنترلی)

۵-۲- عملکرد دو کنترل کننده RMPC و GIPC با وجود

محدود کننده و قید ورود

در این قسمت برای کاهش دامنه سیگنال کنترل و جلوگیری از اشباع عملگرها از دو روش استفاده شده است، یکی استفاده از محدود کننده و دیگری استفاده از قید ورودی $|u| \leq 1$ برای کنترل کننده RMPC و قیود $|u| \leq 1$ و $-0.01 \leq \Delta u \leq 0.01$ برای کنترل کننده GIPC. در حالت اول، استفاده از محدود کننده، عاملی خارج از کنترل کننده سبب محدود شدن سیگنال کنترل می شود. مطابق شکل (۵) سیگنال کنترلی که از کنترل کننده خارج شده و وارد بخش محدود کننده می شود، سیگنال بهینه ای با دامنه ای فراتر از حد مجاز است. در بخش محدود کننده صرفاً قسمتی از سیگنال کنترل ورودی حذف می گردد و هیچ عمل بهینه سازی برای حذف آن تعبیه نمی شود. بر این اساس، مطابق شکل های (۶-الف) و (۶-ب) اگرچه سیگنال های کنترل هر دو کنترل کننده برش خورده و آماده اعمال به عملگرها هستند لیکن هیچ یک از این دو سیگنال کنترل، بهینه نیستند. چون این گشتاورهای کنترلی توسط عاملی خارج از ساختار کنترل کننده و الگوریتم بهینه سازی موجود در آن فراهم شده اند.



شکل (۵): حلقه کنترل با وجود محدود کننده

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{zz} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\bar{I}_{xx} = I_{xx,nom} \pm 20\% I_{xx,nom},$$

$$\bar{I}_{yy} = I_{yy,nom} \pm 20\% I_{yy,nom} \quad (39)$$

$$\bar{I}_{zz} = I_{zz,nom} \pm 20\% I_{zz,nom}$$

مجموعه نامعینی مطابق رابطه زیر خواهد شد:

$$\{[A \ B_1][A \ B_2]\} \quad (40)$$

که B_1 به ازای حد بالای نامعینی و B_2 به ازای حد پایین نامعینی حاصل می شود.

عملگر مورد نظر در این مقاله از نوع چرخ عکس العملی با دینامیک رابطه ۴۱ است:

$$x_a(k+1) = 0.86x_a(k) + 0.0093u_a(k) \quad (41)$$

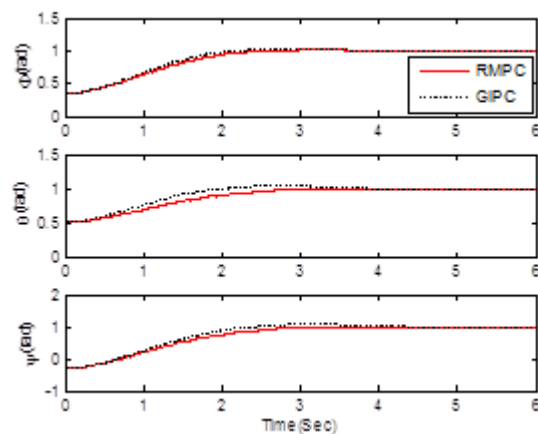
$$y_a(k) = 14.28x_a(k)$$

محدوده ورودی در این رابطه $|u| \leq 1$ است.

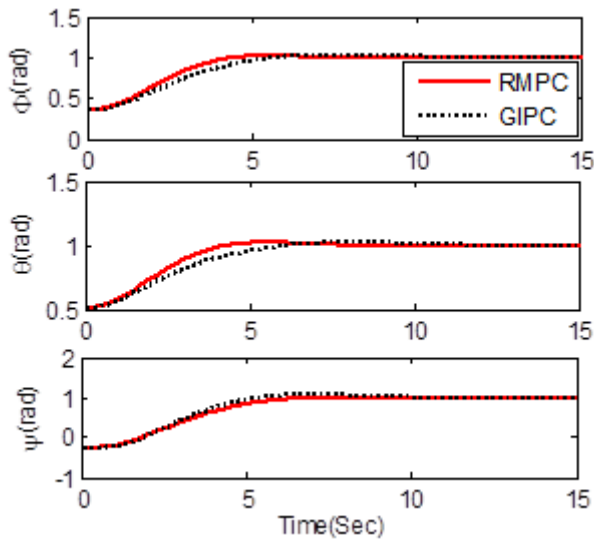
۵-۱- مقایسه دو کنترل کننده RMPC و GIPC بدون قید

ورودی

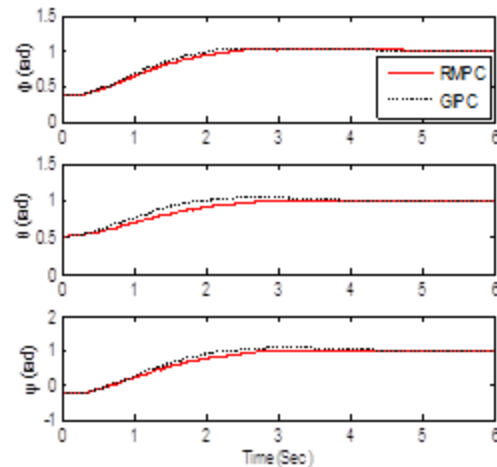
شکل های ۴-الف و ۴-ب پاسخ پله و گشتاورهای کنترلی سیستم خطی شده را با اعمال کنترل کننده های RMPC و GIPC نشان می دهند. چنانچه مشاهده می شود در سیگنال کنترل هر دو روش جهش بزرگی رخ داده است که سبب اشباع عملگرها می شود. برای رفع این مشکل می توان از محدود کننده و یا یک قید ورودی در ساختار کنترل کننده استفاده کرد.



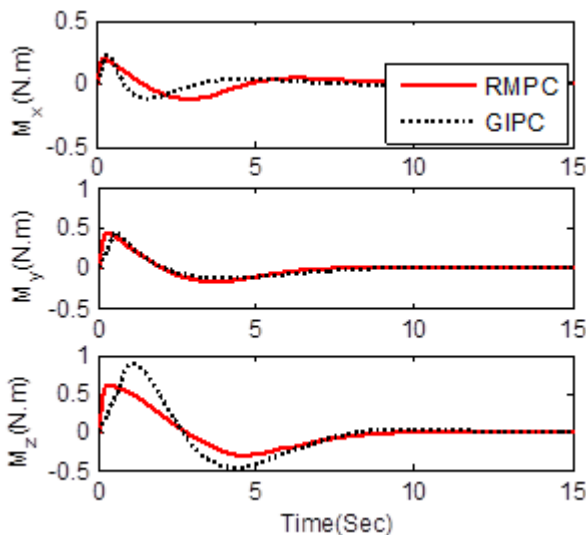
شکل (۴-الف): عملکرد کنترل کننده های RMPC و GIPC بر سیستم کنترل وضعیت ماهواره (پاسخ پله)



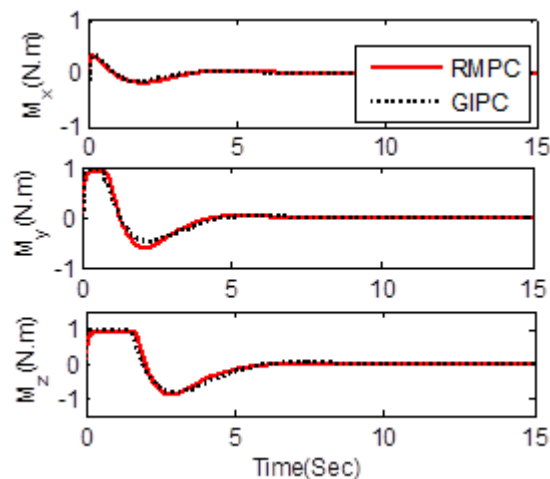
شکل (۷-الف): عملکرد کنترل کننده‌های RMPC و GIPC با وجود قید ورودی بر مدل خطی (پاسخ پله)



شکل (۶-الف): عملکرد کنترل کننده‌های RMPC و GIPC با وجود محدودکننده بر مدل خطی (پاسخ پله)



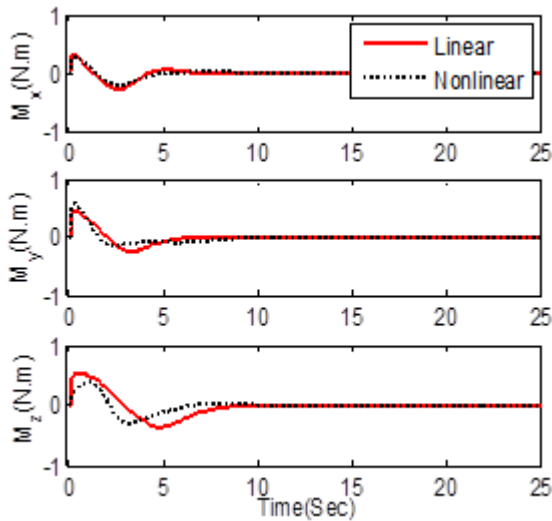
شکل (۷-ب): عملکرد کنترل کننده‌های RMPC و GIPC با وجود قید ورودی بر مدل خطی (تلاش کنترلی)



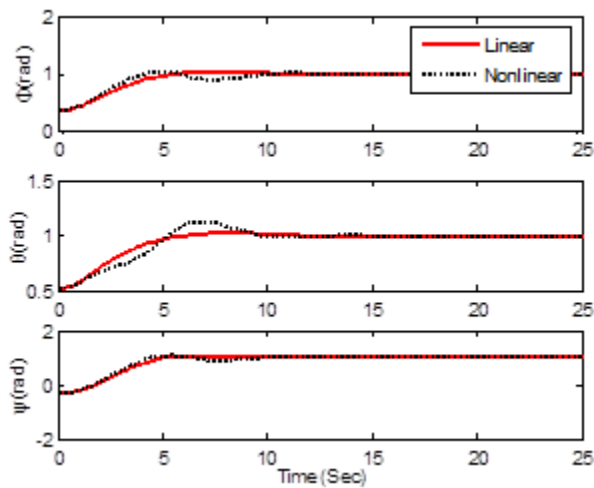
شکل (۶-ب): عملکرد کنترل کننده‌های RMPC و GIPC با وجود محدودکننده بر مدل خطی (تلاش کنترلی)

جدول‌های (۲) و (۳) خطای خروجی کنترل کننده‌های فوق را با معیار عملکرد $\sum_{k=0}^n |e(k)|$ نشان می‌دهد. چنانچه ملاحظه می‌شود در حالت اعمال قید ورودی خطای خروجی‌ها در کنترل کننده RMPC کم‌تر از کنترل کننده GIPC است. در حالت استفاده از محدودکننده اگرچه کنترل کننده RMPC حول دو زاویه roll و yaw خطای کم‌تری دارد لیکن خطای خروجی حول زاویه pitch بیش‌تر از مقدار متناظر در الگوریتم GIPC است.

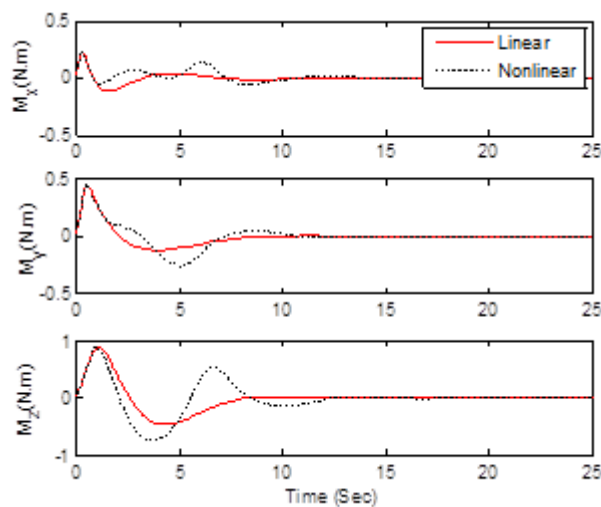
در حالت دوم، مطابق شکل (۷-ب) گشتاورهای کنترل از محدوده تعیین شده تجاوز نمی‌کنند و هموارتر از حالت اول هستند. این تفاوت بدین دلیل است که وقتی کاهش دامنه گشتاورهای ورودی با قرار دادن قید ورودی در کنترل کننده فراهم شود، چون این قید در فرآیند بهینه‌سازی کنترل کننده گنجانده شده است بنابراین سیگنال کنترل حاضر بهینگی خود را محفوظ می‌دارد در حالی که در قسمت محدودکننده بهینگی مدنظر نبوده و تنها کاهش دامنه سیگنال کنترل مورد توجه قرار گرفته است. چنانچه مشاهده می‌شود شکل (۷-الف) کندتر از شکل (۴-الف) است. این کندبودن به علت اعمال قید ورودی رخ می‌دهد. به ازای هزینه کاهش سرعت خروجی سیگنال‌های کنترل در شکل (۷-ب) در محدوده مطلوب واقع شده‌اند.



شکل (۸-ب): عملکرد کنترل کننده های RMPC بر مدل غیرخطی (تلاش کنترلی)



شکل (۹-الف): عملکرد کنترل کننده های GIPC بر مدل غیرخطی (پاسخ پله)



شکل (۹-ب): عملکرد کنترل کننده های GIPC بر مدل غیرخطی (تلاش کنترلی)

جدول (۲): خطای خروجی ها در دو حالت اعمال قید ورودی و محدود کننده در کنترل کننده RMPC در مقیاس $\times 100$

	Roll	Pitch	Yaw
محدودکننده	۱/۰۷۳	۰/۷۵۸	۲/۵۳۶
قید ورودی	۱/۴۱۹	۱/۰۲۹	۳/۶۸۲

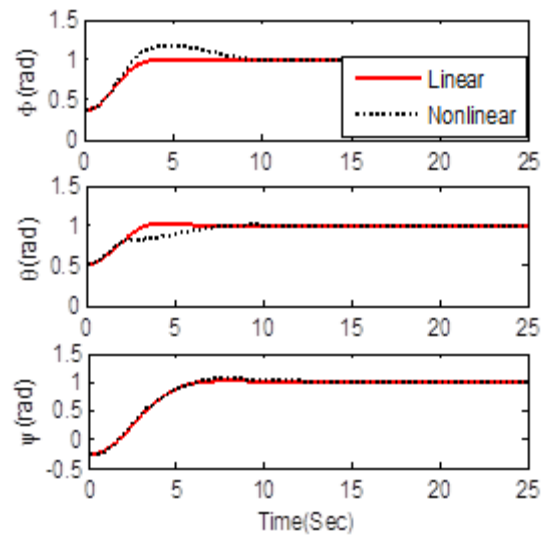
جدول (۳): خطای خروجی ها در دو حالت اعمال قید ورودی و محدود کننده در کنترل کننده GIPC در مقیاس $\times 100$

	Roll	Pitch	Yaw
محدودکننده	۱/۱۴۰	۰/۷۵۰	۲/۵۴۰
قید ورودی	۱/۸۰۰	۱/۳۵۹	۳/۸۱۳

۵-۳- عملکرد کنترل کننده های RMPC و GIPC بر سیستم

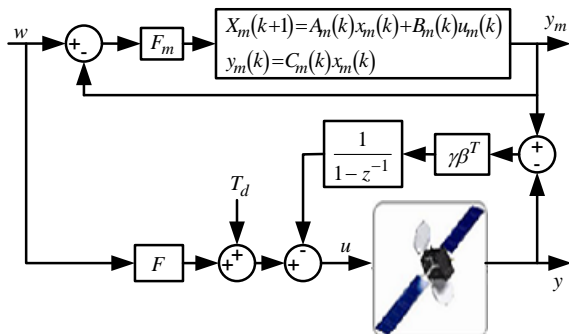
واقعی

شکل های (۸) و (۹) پاسخ های پله و تلاش کنترلی هر دو کنترل کنت RMPC و GIPC را بر سیستم غیرخطی نمایش می دهند. چنانچه مشاهده می شود اگرچه هر دو کنترل کننده عملکرد مناسبی بر سینما غیرخطی دارند لیکن در کنترل کننده RMPC پاسخ سیستم ها خطی و غیرخطی به یکدیگر نزدیک تر هستند. علاوه بر این گشتاورهای کنترلی در این کنترل کننده نسبت به کنترل کننده IPC هموارتر است.

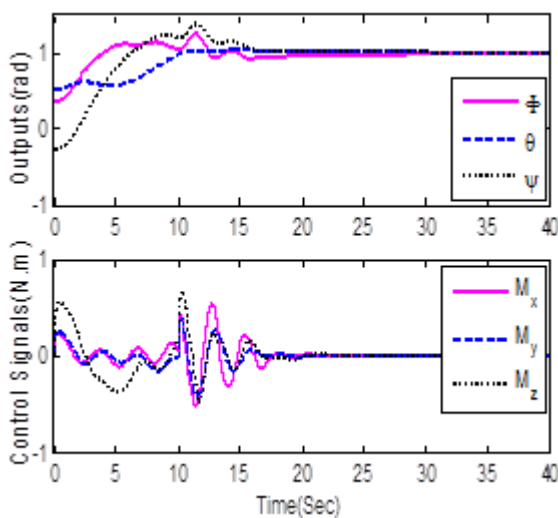


شکل (۸-الف): عملکرد کنترل کننده های RMPC بر مدل غیرخطی (پاسخ پله)

خوبی قادر به دفع اغتشاش می باشد که این بیانگر عملکرد مناسب مکانیزم تنظیم است.



شکل (۱۲): نمودار بلوکی تلفیق کنترل کننده RMPC و سیستم MRAS



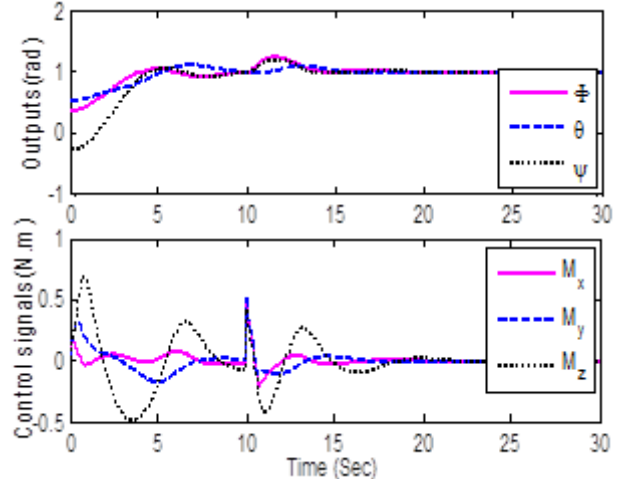
شکل (۱۳): عملکرد کنترل کننده RMPC بهبود یافته در مقابل اغتشاش ورودی (پاسخ پله)

۵-۵- ارزیابی مقاومت کنترل کننده های GIPC و RMPC در مقابل افزایش نامعینی

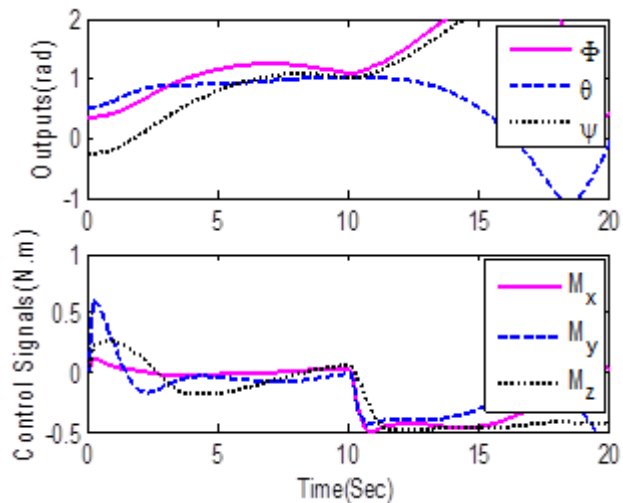
در این زیربخش با افزایش نامعینی های سیستم واقعی و با وجود اغتشاش ورودی $T(k) = 0.5[u(t - 10)]$ به ارزیابی عملکرد هر دو کنترل کننده می پردازیم. مطابق شکل های (۱۴) و (۱۵) چنانچه مشاهده می شود با افزایش نامعینی های ممان اینرسی تا ۷۰٪ مقدار نامی اگر چه سیستم پایدار می ماند لیکن گشتاورهای کنترلی در کنترل کننده GIPC به اشباع می روند حال آنکه الگوریتم RMPC ترکیبی حاضر در مقابل این مقدار نامعینی مقاوم بوده و گشتاورهای کنترلی نیز به رغم نوساناتشان به اشباع نمی روند. این مطلب بیانگر مقاوم تر بودن الگوریتم RMPC ترکیبی نسبت به الگوریتم GIPC است.

۴-۵- عملکرد کنترل کننده های RMPC و GIPC در مقابل اغتشاش ورودی

در این قسمت قابلیت دفع اغتشاش دو کنترل کننده RMPC و GIPC با اعمال اغتشاش ورودی $T(k) = 0.5[u(t - 10)]$ بر سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار می گیرد. مطابق شکل های (۱۰) و (۱۱) الگوریتم GIPC به خوبی اغتشاش ورودی را دفع می کند در حالی که الگوریتم RMPC به تنهایی قادر به دفع اغتشاش نیست. برای رفع این مشکل بر اساس مطالب زیربخش ۲-۳ از سیستم MRAS استفاده می شود.

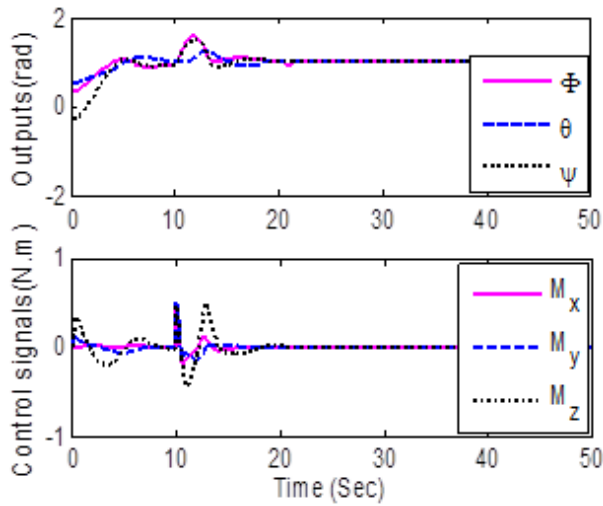


شکل (۱۰): عملکرد کنترل کننده GIPC در مقابل اغتشاش $T_d = 0.5u(t - 10)$

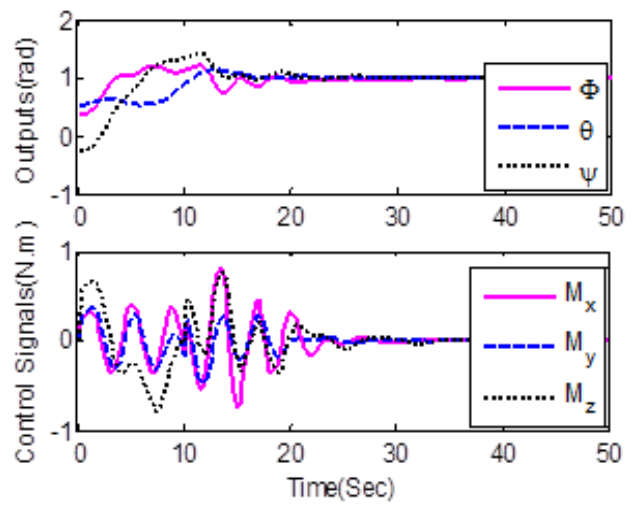


شکل (۱۱): عملکرد کنترل کننده RMPC در مقابل اغتشاش $T_d = 0.5u(t - 10)$

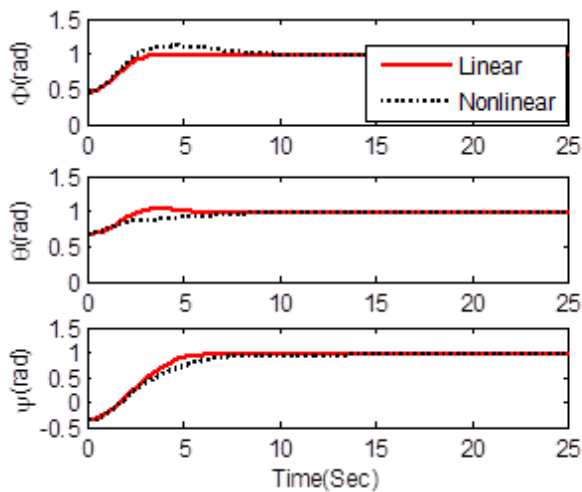
شکل (۱۲) کنترل کننده RMPC اصلاح شده را نمایش می دهد. در نمودار بلوکی مذکور پارامترهای F ، F_m و γ به ترتیب بهره فیدبک حالت کنترل کننده RMPC، بهره فیدبک حالت مدل مرجع و ضرب تطبیق هستند. شکل (۱۳) پاسخ پله و تلاش کنترلی سیستم حلقه بسته را با وجود این کنترل کننده و با حضور اغتشاش مذکور نشان می دهد. چنانچه مشاهده می شود کنترل کننده RMPC جدید به



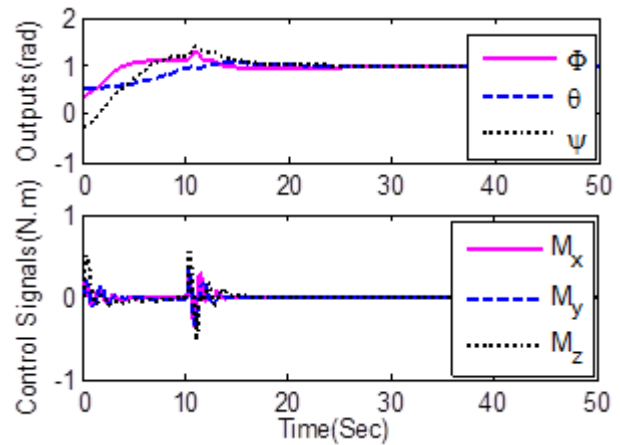
شکل (۱۵-ب) عملکرد الگوریتم GIPC با وجود ۷۰٪ نامعینی



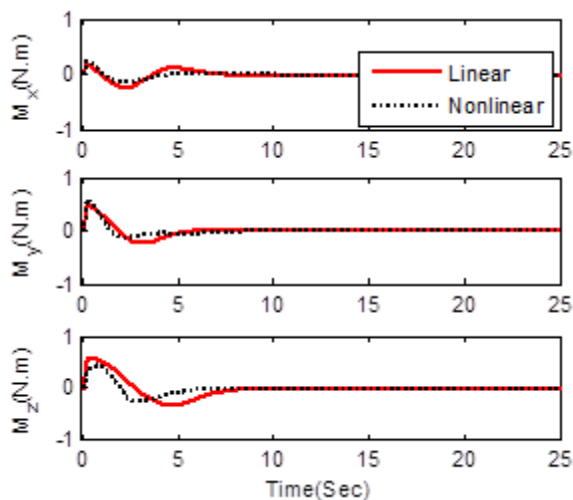
شکل (۱۴-الف): عملکرد الگوریتم RMPC با وجود ۷۰٪ نامعینی



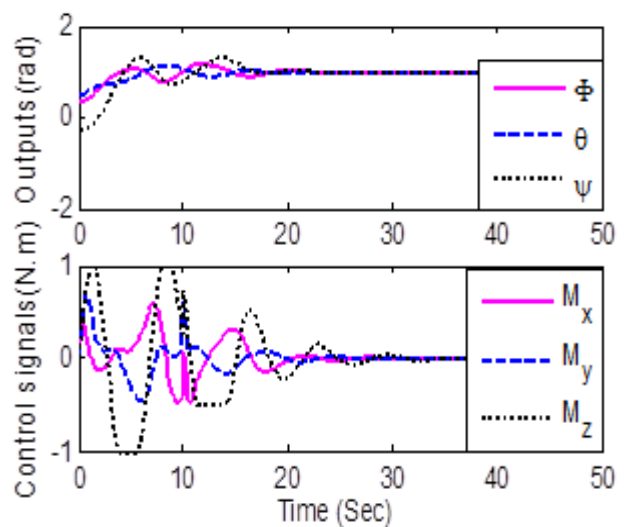
شکل (۱۶-الف): عملکرد کنترل کننده RMPC بر مدل خطی و غیرخطی در مقابل تغییر شرایط اولیه (پاسخ پله)



شکل (۱۴-ب): عملکرد الگوریتم RMPC با وجود ۷۰٪ نامعینی



شکل (۱۶-ب): عملکرد کنترل کننده RMPC بر مدل خطی و غیرخطی در مقابل تغییر شرایط اولیه (تلاش کنترلی)



شکل (۱۵-الف) عملکرد الگوریتم GIPC با وجود ۷۰٪ نامعینی

ممان اینرسی

اینرسی، اغتشاش خارجی و اشباع عملگرها مقاوم باشد. قانون کنترل به صورت یک فیدبک حالت است که بهره آن از حل یک مسئله بهینه سازی محدب تحت چندین LMI که تضمین کننده پایداری مجانبی سیستم هستند محاسبه می شود. برای جلوگیری از اشباع عملگرها و تضمین عملکرد سیستم در مقابل اغتشاش خارجی به ترتیب از قید ورودی در قالب LMI و تلفیق سیستم MRAS با الگوریتم RMPC استفاده شده است. البته استفاده از این سیستم جانبی سبب افزایش محاسبات و پیچیدگی مسئله می شود لیکن دفع اغتشاش را به همراه دارد. نتایج حاصل از این روش با الگوریتم GIPC مقایسه شده و بیانگر این هستند که الگوریتم CRMPC حاضر نسبت به الگوریتم GIPC در مقابل اغتشاش و نامعینی ها رفتار مقاومتری دارد. علاوه بر این، الگوریتم حاضر نسبت به الگوریتم RMPC در مقابل اغتشاش خارجی مقاوم تر است.

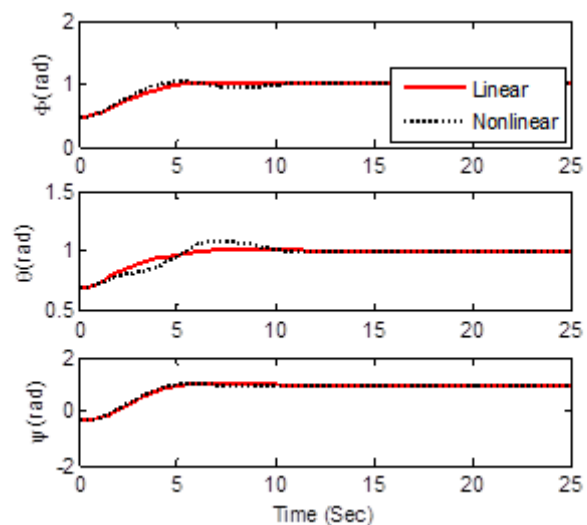
مراجع

- [1] M. V. Kothare, V. Balakrishnans and M. Moraris, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," *Automatica*, Vol. 32, pp. 1361-1379, 1996.
- [2] Zh. Wan and M. V. Kothare, "Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities," *Journal of Process Control*, Vol. 12, No. 7, pp. 763-774, 2002.
- [3] Zh. Wan and M. V. Kothare, "A framework for design of scheduled output feedback model predictive control," *Journal of Process Control*, pp. 391-398, 2008.
- [4] B. Ding, Y. Xi, M. T. Cychowski and Th. O'Mahony, "A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control," *Automatica*, Vol. 44, pp. 258-264, 2008.
- [5] V. Ghaffari, S. Vahid Naghavi and A. A. Safavi, "Robust model predictive control of a class of uncertain nonlinear systems with application to typical CSTR problems," *Journal of Process Control*, Vol. 23, No. 4, Pages 493-499, 2013.
- [6] J. L. Figueroa, S. I. Biagiola, M. P. Alvarez, L. R. Castro and O. E. Agamenoni, "Robust model predictive control of a Wiener-like system," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 350, pp. 556-574, 2013.
- [7] J. H. Lee, "From robust model predictive control to stochastic optimal control and approximate dynamic programming: A perspective gained from a personal journey," *Computers and Chemical Engineering*, 2013.
- [8] E. N. Hartley, P. A. Trodden, A. G. Richards and J. M. Maciejowski, "Model predictive control system design and implementation for spacecraft rendezvous," *Control Engineering Practice*, Vol. 20, No. 7, pp. 695-713, 2012.
- [9] H. Fei, E. Song, X. Ma and D. Jiang, "Research on whole-spacecraft vibration isolation based on predictive control," *Procedia Engineering*, Vol. 16, pp. 467-476, 2011.
- [10] O. Hegrenaes, J.T. Gravdahl and P. Tondel, "Spacecraft attitude control using explicit model predictive control," *Automatica*, 2005.
- [11] X. Bai and X. Wu, "1-Bit processing based model predictive control for fractionated satellite missions," *Acta Astronautica*, Vol. 95, pp. 37-50, 2014.

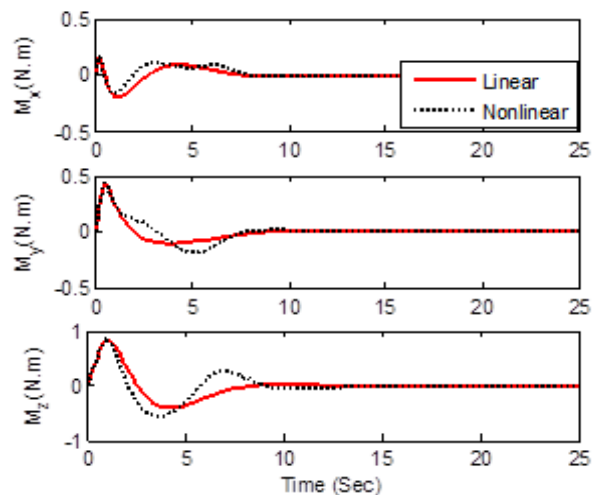
۵-۶- ارزیابی مقاومت کنترل کننده های RMPC و GIPC

در مقابل تغییر شرایط اولیه

در این زیربخش شرایط اولیه سیستم را به ۳۰٪ مقدار اولیه افزایش داده و عملکرد کنترل کننده های خطی و غیرخطی را در این موقعیت مقایسه می کنیم. مطابق شکل های (۱۶-الف/ب) و (۱۷-الف/ب) تغییرات در سیستم خطی و غیرخطی هر دو کنترل کننده بسیار جزئی می باشد. در سیستم خطی هر دو کنترل کننده تقریباً می توان گفت تغییری مشاهده نشده و کلاً سیستم نسبت به تغییرات شرایط اولیه پایدار می ماند.



شکل (۱۷-الف): عملکرد کنترل کننده GIPC بر مدل خطی و غیرخطی در مقابل تغییر شرایط اولیه (پاسخ پله)



شکل (۱۷-ب): عملکرد کنترل کننده GIPC بر مدل خطی و غیرخطی در مقابل تغییر شرایط اولیه (تلاش کنترلی)

۶- نتیجه

در این مقاله یک کنترل کننده RMPC بهبود یافته با نام کنترل کننده CRMPC سه محوره برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره به گونه ای طراحی شده است که سیستم حلقه بسته در مقابل نامعینی ممان

$$\max_{[A(k+i) \ B(k+i)] \in \Omega} J_{\infty} \leq \max V(x(k)) \quad (44)$$

حال با انتخاب $\max V(x(k)) = \gamma$ خواهیم داشت:

$$\max_{[A(k+i) \ B(k+i)] \in \Omega} J_{\infty} \leq \gamma$$

و رابطه (۱۰) اثبات می شود.

ب

برای اثبات رابطه (۱۴) می دانیم که کمینه سازی

$$V(x(k|k)) = x(k|k)^T P x(k|k); P > 0$$

است:

$$\min_{\gamma, P} \gamma \quad (45)$$

S.t

$$x(k|k)^T P x(k|k) \leq \gamma$$

با تعریف $Q^{-1} = P\gamma^{-1}$ و با استفاده از لم ۱ داریم:

$$\min_{\gamma, Q} \gamma \quad (46)$$

S.t

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

تا اینجا رابطه (۱۴) اثبات شد. در ادامه به اثبات رابطه (۱۵) می پردازیم:

رابطه (۹) را در نظر بگیرید. رابطه (۱) و قانون کنترل $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$ را در آن جایگزین کنید.

داریم:

$$x(k+i)^T [(A(k+i) + B(k+i)F)^T P(A(k+i) + B(k+i)F) - P + Q_1 + F^T R F] x(k+i) \leq 0$$

رابطه فوق برای سایر $i \geq 0$ برقرار است، اگر:

$$[A(k+i) + B(k+i)F]^T P[A(k+i) + B(k+i)F] - P + F^T R F + Q_1 \leq 0 \quad (47)$$

در ادامه پارامترهای $P = \gamma Q^{-1}, Q > 0$ و $Y = FQ$ را در رابطه فوق جایگزین کرده و حاصل را از پیش و پس در پارامتر Q ضرب کنید. حال با استفاده از لم ۱ رابطه (۱۵) به دست می آید.

- [12] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Theory*, SIAM, 1994.
- [13] K. Astrom and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, second edition, Pearson Education, 2003.
- [14] F. Nagi, A. T. Zulkarnain and J. Nagi, "Tuning fuzzy Bang-bang relay controller for satellite attitude control system," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 26, No. 1, pp. 76-86, 2010.
- [15] N. Ghahramani and F. Towhidkhal, "Constrained incremental predictive controller design for a flexible joint robot," *ISA Transaction*, Vol. 48, pp. 321-326, 2009.
- [16] B. Ding. *Modern Predictive control*, CRC Press, 2010.
- [17] E. F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive control*, Springer, 1999.

زیر نویس ها

- ¹ Robust Model Predictive Control (RMPC)
- ² Model Reference Adaptive system (MRAS)
- ³ Combinational Robust Model Predictive Control (CRMPC)
- ⁴ Generalized Incremental Model Predictive Control (GIPC)
- ⁵ Convex hull

ضمائم

الف

با توجه به زیربخش ۱-۲، می دانیم که تابع هزینه مورد نظر به صورت

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \max_{[A(k+i) \ B(k+i)] \in \Omega} J_{\infty}(k) \quad (42)$$

بوده و نامساوی:

$$V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) \leq -[x(k+i|k)^T \times Qx(k+i|k) + u(k+i|k)^T Ru(k+i|k)]$$

نیز برقرار است.

هدف اثبات رابطه (۱۰) یعنی

$$\max_{[A(k+i) \ B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_{\infty}(k) \leq \max V(x(k|k)) \leq \gamma$$

با توجه به تئوری پایداری لیاپانوف می دانیم که اگر $x(\infty|k) = 0$

آنگاه $V(x(\infty|k)) = 0$. عمل $\sum_{i=0}^{\infty}$ را بر طرفین نامساوی فوق انجام می دهیم. خواهیم داشت:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k))] \leq -J_{\infty} \quad (43)$$

سمت چپ رابطه فوق را می توان به صورت:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) + V(x(k+2)) - V(x(k+1)) + V(x(k+3)) - V(x(k+2)) + \dots = -V(x(k)) \leq -J_{\infty}$$

بازنویسی کرد. تا اینجا نامساوی $J_{\infty} \leq V(x(k))$ اثبات شد. مایلیم

بیشترین مقدار این تابع هزینه J_{∞} ، $\max_{[A(k+i) \ B(k+i)] \in \Omega}$ ، را روی

مجموعه ای از نامعینی ها به دست آوریم. داریم: